

Relaminarisations rares dans un modèle de turbulence de paroi transitionnelle : au delà des expériences et simulations numériques directes

Joran Rolland¹

Goethe Universität Frankfurt, Altenhoferallee 1, D60348, Frankfurt, Allemagne
rolland@iau.uni-frankfurt.de

Résumé. Ce texte présente une étude des relaminarisations extrêmement rares dans un modèle de turbulence de paroi à l'aide d'un algorithme de type mutation sélection. Premièrement, l'effondrement de bouffées turbulentes isolées est étudié. Dans ce cas, il est possible de séparer l'effet du renforcement des bouffées turbulentes et du changement de l'espace des phases de sur la dépendance du temps de vie de la turbulence en le nombre de Reynolds. Deuxièmement, l'effondrement de la turbulence dans un domaine initialement à sa fraction turbulente stationnaire est étudiée. Dans ce cas, on montre la croissance exponentielle du temps de vie de la turbulence avec la taille du domaine. De plus, on montre l'augmentation du taux de croissance avec le nombre de Reynolds. Les deux cas sont brièvement discuté dans un cadre théorique de l'étude des événements rares.

Abstract. This text presents a study of extremely rare collapses of turbulence in a model of wall turbulence using a mutation selection algorithm. We consider two types of relaminarisations. One the one hand, we study the collapse of isolated turbulent puffs. In that case, we can separate the effect of strengthening of the equilibrium puff and the change of the phase space on the dependence of the lifetime of turbulence on Reynolds number. On the other hand, we study the collapse of a domain starting at its steady state turbulent fraction. In that case, we highlight the exponential growth of the lifetime with the size of the domain. Moreover, we show the increase of the growth rate of the lifetime of turbulence with Reynolds number. Both cases are briefly discussed in a theoretical framework for rare events.

1 Introduction

La transition vers la turbulence dans les écoulements de paroi, tels que l'écoulement de Poiseuille dans une conduite, l'écoulement de Couette plan, la couche limite, *etc.* se distingue notablement des séries de bifurcations et d'instabilités linéaires que l'on retrouve par exemple dans la convection thermique. L'écoulement de base est linéairement stable à des Reynolds bien au delà du seuil de transition. En conséquence, des perturbations d'amplitude finie sont nécessaires pour créer de la turbulence. On peut de plus constater de la coexistence spatiale et temporelle entre écoulement laminaire et écoulement turbulent. Une autre caractéristique est que dans le régime transitionnel, des relaminarisations de tout ou partie de l'écoulement sont observées. La turbulence est alors caractérisée par son temps de vie moyen T [1,2]. Cela peut rendre la turbulence de paroi très intermittente. Comprendre et savoir modéliser cette intermittence est fondamental pour comprendre les couches limites planétaires stables par exemple [3].

Bien qu'il soit clair que le temps de vie moyen de la turbulence T croisse au moins exponentiellement avec le nombre de Reynolds, la dépendance exacte de $\ln(T)$ en R n'est pas entièrement bien connue pour tous les écoulements de paroi. De plus, lorsque l'écoulement a sa fraction turbulente naturelle, la dépendance de T avec la taille du domaine est très partiellement connue [2]. Le principal frein à ces investigations est l'extrême longueur de T . Connaître précisément $T(R, L)$ permettra de confronter les explications proposées pour la physique des relaminarisations.

Un moyen de calculer $T(R, L)$ efficacement est de reformuler le problème en la recherche d'un événement rare. On peut alors utiliser des méthodes numériques dédiées pour obtenir $T(R, L)$ [4]. Le cadre théorique de l'étude de ces excursions rares peut être utilisé pour interpréter la dépendance de $T(R, L)$ [7]. Ce compte rendu présente une étude de ce type réalisée sur un modèle de l'écoulement de poiseuille dans une

conduite [1]. Le corps de l'étude concerne le calcul systématique de $T(R)$ pour les bouffées turbulentes isolées et $T(R, L)$ dans les conduites ayant une fraction turbulente naturelle (§ 3). Une interprétation du comportement de $T(L)$ selon les valeurs de L est brièvement proposée (§ 4).

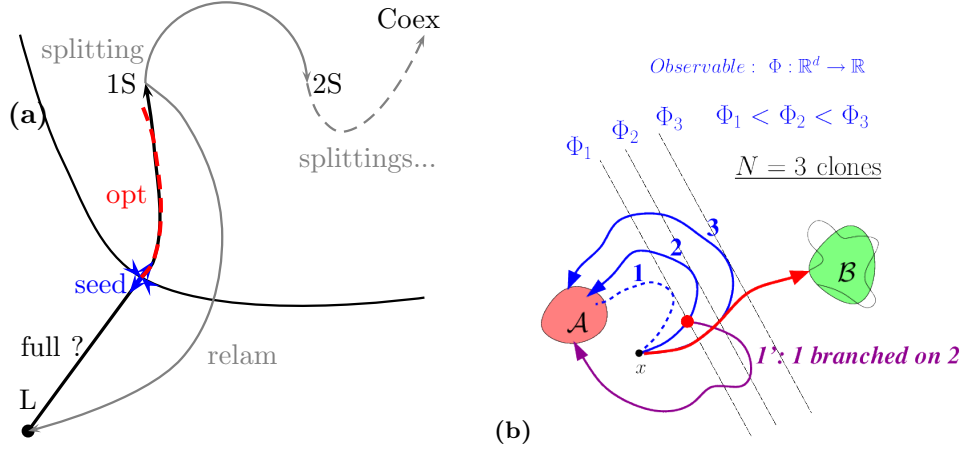


Figure 1. (a) Schéma de l'espace des phases de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite transitionnel indiquant les états métastables (écoulement laminaire L), un ou plusieurs *puff* (n S), les régions spécifiques (séparatrice : ligne noire), germe minimal de la turbulence : *seed* [9]) ainsi que les événements particuliers les reliant (*splitting*, *relaminarisation*). (b) Schéma de principe de l'algorithme *Adaptive Multilevel Splitting*, pour le cas de trois clones, indiquant les états de départ \mathcal{A} et d'arrivée \mathcal{B} , les niveaux de coordonnée réactionnelle Φ ainsi que deux exemples de branchement.

2 Modèle et méthode

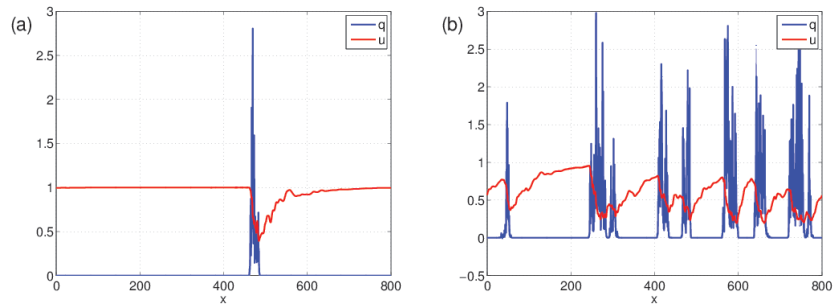


Figure 2. Vitesse longitudinale u et intensité de la turbulence q à un instant donné en fonction de la coordonnée longitudinale x dans deux situations. (a) bouffée turbulente isolée, (b) fraction turbulente stationnaire.

2.1 Le modèle stochastique

Le modèle stochastique de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite contient le champ $u(x, t)$ rendant compte du champ de vitesse longitudinale et le champ $q(x, t)$ rendant compte de l'intensité de la turbulence [1]. Les deux champs dépendent du temps et de la coordonnée longitudinale x . La conduite a une longueur longitudinale L et est supposée périodique. Les coordonnées radiales et azimutales de la

conduite sont “toutes intégrées” dans ce modèle. Les deux équations différentielles stochastiques couplées sont

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(1+U)\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1(1-u) - \epsilon_2 u q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -U\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q(u+r-1-(r+\delta)(q-1)^2) + q\sqrt{\frac{2}{\beta}}\eta. \quad (2)$$

Ici r , le nombre de Reynolds, est le principal paramètre de contrôle tandis que $\epsilon_1 = 0.04$, $\epsilon_2 = 0.2$, $\delta = 0.1$ et $\beta = 1.5$ sont choisis pour que le modèle décrive la dynamique désirée. En l’occurrence, il s’agit d’un système excitable, inspiré par les potentiels d’action dans les neurones. Cela produit des bouffées turbulentes ou *puff* très réalistes (Fig. 2). Il s’agit de l’état de l’écoulement dans la conduite lors de la transition, quand écoulement laminaire et turbulent coexistent de manière permanente. Le modèle décrit aussi fidèlement l’invasion de la conduite par la turbulence à plus haut nombre de Reynolds (régime dit de *slug* [1]).

Pour étudier qualitativement les *splitting* et quantitativement les relaminarisations, on utilise deux types de condition initiale. Le premier type de condition initiale est dit de bouffée turbulente isolée dans la conduite (Fig. 2 (a)). Quelque soit la taille de la conduite L elle ne contient qu’une seule bouffée. Il ne s’agit pas d’une situation stationnaire. Le second type de condition initiale est dit de fraction turbulente stationnaire (Fig. 2). Il s’agit de l’état atteint lorsqu’on laisse les bouffées se dédoubler jusqu’à ce que la fraction turbulente $Q = (1/L) \int_{0 \leq x \leq L} q(x, t) dx$ fluctue autour d’une valeur moyenne.

2.2 l’Adaptive Multilevel Splitting

On rappelle brièvement la méthode numérique utilisée pour calculer les relaminarisations et *splitting* ainsi que les temps de vie de la turbulence associés. Il s’agit de l’algorithme *Adaptive Multilevel Splitting* (AMS) [4] (Fig. 1 (b)). C’est un algorithme de mutation sélection appartenant à la famille générale de l’*importance sampling*. L’algorithme utilise N dynamiques clones ainsi qu’une coordonnée réactionnelle Φ (ou *observable*) pour calculer itérativement N réalisations de trajectoires réactives. On définit une condition initiale \mathcal{A} (par exemple une bouffée isolée) et un état final \mathcal{B} (par exemple l’écoulement laminaire). La coordonnée réactionnelle mesure la position relative du système par rapport à \mathcal{A} et \mathcal{B} . On choisit souvent $\Phi(\mathcal{A}) = 0$, $\Phi(\mathcal{B}) = 1$ et Φ croissant de manière monotone entre les deux. La construction des trajectoires réactives se réalise en deux temps. Lors d’une étape 0, les N clones partent d’un voisinage de \mathcal{A} et évoluent naturellement jusqu’à ce qu’ils rejoignent \mathcal{A} ou \mathcal{B} . Puis on réalise la mutation sélection : à chaque étape, la trajectoire allant le moins loin (mesuré par le maximum de Φ sur la trajectoire) est supprimée puis rebranchée sur une des autres, on lui laisse alors avoir sa dynamique naturelle (avec sa propre réalisation du bruit) jusqu’à ce qu’elle rejoigne \mathcal{A} ou \mathcal{B} . Au bout de k itération, toutes les trajectoires ont atteint \mathcal{B} et l’on dispose de N réalisations de trajectoires réactives. Le temps de vie de l’état \mathcal{A} est calculé à partir de k [7]. L’intérêt de l’algorithme est de drastiquement réduire la durée de calcul. Si on utilise des simulations numériques directes, le coût est directement proportionnel à T , tandis qu’avec l’AMS il est typiquement proportionnel à $\ln(T)$. Il s’agit d’un gain d’autant plus considérable que l’évènement est rare.

On appelle Q_0 la fraction turbulente de la condition initiale. Pour provoquer des relaminarisations, on utilise la coordonnée réactionnelle

$$Q_0 \equiv \frac{1}{L} \int_0^L q(x, t=0) dx, \quad \phi \equiv 1 - \sqrt{\frac{1}{LQ_0} \int_0^L q(x, t) dx}. \quad (3)$$

Cela a l’avantage de ne pas négliger la réduction de la fraction turbulente lorsque la conduite est quasiment laminaire grâce à la racine carrée.

3 Résultats

3.1 Visualisations

À l'aide de l'AMS, des trajectoires de relaminarisations (Fig. 3 (a,c,d)) et de splittings (Fig. 3 (b)) sont calculées. On commence par les décrire à l'aide de diagrammes spatiotemporel de q ou $1 - u$. La relaminarisation d'un *puff* se produit avec une réduction globale de la fraction turbulente. La taille du *puff* ne change que très peu, à la toute fin de la trajectoire. Le splitting d'un puff se produit par l'ejection de turbulence vers l'avant puis le développement de ce second germe (Fig. 3 (b)). L'intérêt de l'utilisation de l'algorithme à ce niveau est de calculer simplement des relaminarisations très rares comme lorsque la turbulence s'effondre dans une conduite qui a initialement sa fraction turbulente stationnaire (Fig. 3 (c,d)). À plus bas Reynolds ($r = 1.1$), ce type de relaminarisations se produit par l'écroulement successifs et indépendant des *puffs* (Fig. 3). À plus haut Reynolds ($r = 1.2$), ce type de relaminarisations se produit par l'écroulement en bloc de tous les bouffées initialement présentes.

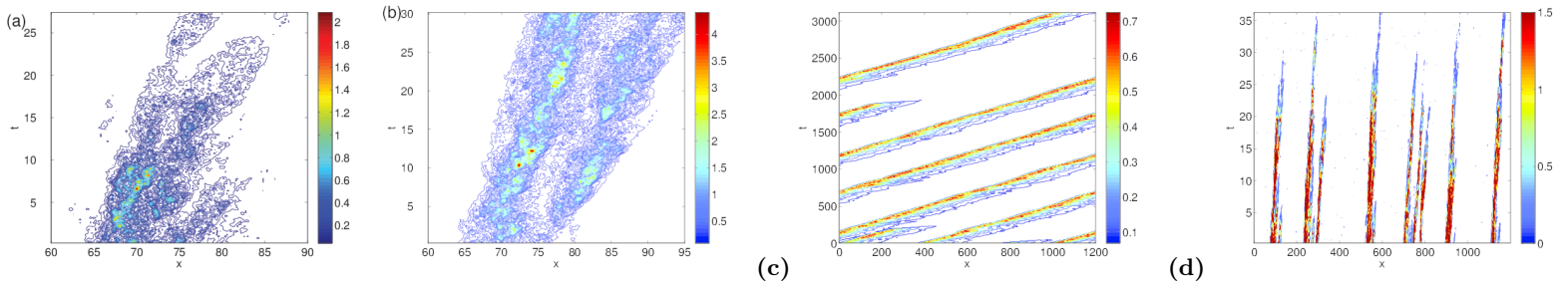


Figure 3. Diagrammes spatiotemporels de trajectoires calculées grace à l'AMS. (a) : $q(x, t)$ lors de la relaminarisation d'un *puff* isolé. (b) : $q(x, t)$ lors du splitting d'un puff isolé. (c) : $1 - u(x, t)$ lors de la relaminarisation d'une conduite entière partant de la fraction turbulente stationnaire à $r = 1.1$. (d) : $q(x, t)$ lors de la relaminarisation d'une conduite entière partant de la fraction turbulente stationnaire à $r = 1.2$.

3.2 Effet de la taille et du nombre de Reynolds

On présente ensuite la dépendance du temps de vie de la turbulence en le nombre de Reynolds et la taille dans deux types de relaminarisations.

Le premier type de relaminarisations concerne des bouffées isolées. On peut utiliser deux types de condition initiale lorsque le nombre de Reynolds est varié. D'une part on peut utiliser une bouffée isolée à l'équilibre à chaque nombre de Reynolds (Fig. 4 (a), pointillés rouges), on peut d'autre part utiliser la même condition initiale (une bouffée à l'équilibre à r_0) pour tous les nombres de Reynolds considérés (Fig. 4 (a), courbes continues). On note deux comportements distincts selon les types de conditions initiales. Dans le premier cas, $\ln(T)$ est surlinéaire, comme cela est généralement constaté lors d'expériences ou de simulations numériques directes [1]. Cela n'est pas surprenant car il s'agit de la reproduction des expériences classiques. Dans le second cas, on note une dépendance affine $\ln(T) = a(r_0) + b(r_0)r$, les deux coefficients dépendant de r_0 . Il apparaît que b croît nettement avec r_0 .

Le second type d'expérience consiste à prendre une condition initiale de fraction turbulente stationnaire dans des conduites de taille croissante à un nombre de Reynolds donné et d'étudier $\ln(T)$ en fonction de L (Fig. 4, (b)). Une dépendance affine, presque linéaire apparaît. En comparaison, le temps de vie d'une bouffée isolée sature assez rapidement avec l'augmentation de la taille (courbe rouge). Pour la conduite ayant une fraction turbulente stationnaire initialement, on trouve des grandes déviations en la taille du temps de vie de la turbulence

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (1/L) \ln(T) = f(r, \mathcal{L}). \quad (4)$$

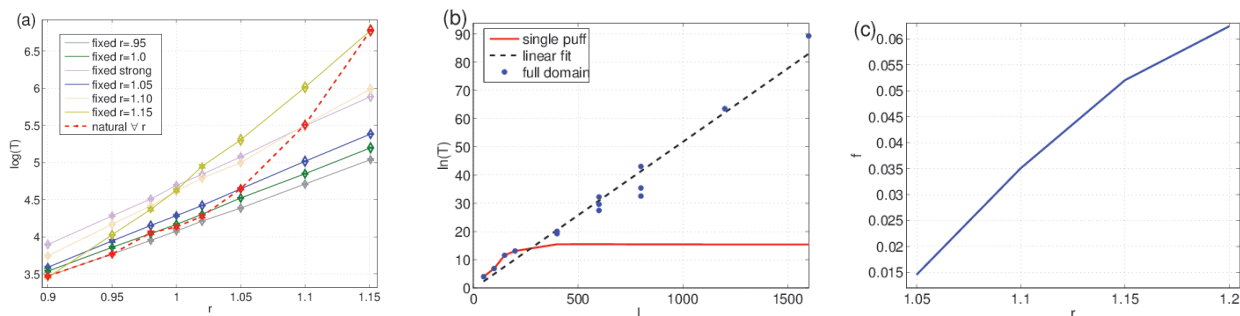


Figure 4. (a) : logarithme du temps de vie d’un *puff* isolé en fonction de r dans deux types d’expérience : lorsqu’on prend le même *puff* quelque soit r comme condition initiale ou lorsque la condition initiale est un *puff* à l’équilibre à r . (b) : logarithme du temps de vie de turbulence à $r = 1.15$ en fonction de la taille de la conduite, avec deux types de condition initiale : *puff* isolé ou fraction turbulente stationnaire. (c) *rate function* des grandes déviations en taille du temps de vie en fonction du nombre de Reynolds.

Ce type de grandes déviations avaient déjà été mises en évidence dans les PDFs de l’énergie cinétique de l’écoulement de Couette plan transitionnel, en particulier à bas Reynolds lorsqu’elle ont une asymétrie claire vers les valeurs basses [11]. On peut finalement reproduire ce second type d’expérience à différents nombre de Reynolds et noter que $f(r)$ croît avec r (Fig. 4 (c)).

4 Discussion

Le cadre théorique de l’étude des événements rares permet de discuter brièvement des résultats numériques. Dans les systèmes stochastiques, le temps de vie d’un état peut se réécrire comme un temps de premier passage moyen T (ou inversement un taux de transition $1/T$). Sous des conditions assez générale, le temps de premier passage moyen peut être formellement écrit dans une limite de faible bruit $\beta \rightarrow \infty$ à l’aide du principe de grandes déviations de Freidlin–Wentzell $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln(T)/\beta = S(\beta)$ où S est l’action de l’équation différentielle stochastique [10,7]. Cette action apparaît naturellement dans l’intégrale de chemin dite d’Onsager–Machlup. Grossièrement, elle mesure la quantité de bruit sentie par le système lors de la trajectoire conduisant au premier passage. Sous des conditions relativement générales, cette action S peut être écrite comme la différence de *quasipotential* Φ du système entre le col par lequel passe le premier passage et le point de départ. Ce type d’écriture généralise la loi d’Arrhenius et la formule d’Eyring–Kramers à une large variété de systèmes hors d’équilibre. Le prefacteur α dans $T = \alpha \exp(-\beta \Delta \Phi)$ peut aussi être étudié dans les systèmes hors d’équilibre [5]. Ce type d’écriture est dans l’esprit des quasipotentiels apparaissant dans les solutions de faible bruit de l’équation de Fokker–Plank [6].

Le système étudié étant stochastique, il est naturel de considérer les temps de vie dans ce cadre. En particulier, cela permet de généraliser l’intuition acquise lors de l’étude des systèmes gradients à l’étude des systèmes non gradients. Dans les systèmes gradient, la forme du potentiel contrôle la structure des trajectoire de premier passage ainsi que la croissance exponentielle de T . On discute donc le comportement de $T(r, L)$ à l’aide d’un tel quasipotential Φ ¹. Dans le cas de l’effondrement d’une bouffée isolée, cela nous donne des indications sur l’évolution de Φ avec r , en séparant Φ au col et Φ de la bouffée “à l’équilibre”. Dans le cas de la relaminarisation de conduite entière, cela nous permet de comprendre l’effet de la taille en séparant trois gammes de tailles. Pour les plus petits domaines, le comportement de $\Delta \Phi \propto L$ s’apparente aux transition dite *flip* dans un système gradient, où le champ se retourne globalement de manière cohérente [7]. Dans une gamme intermédiaire, on peut réécrire $\Delta \Phi \propto L = nL_{\text{puff}}$, car il s’agit de faire s’effondre n bouffées quasiment indépendantes occupant chacune une taille approximativement

1. À noter que dans la plupart des systèmes du type Eq. (1), (2), la distribution de probabilité stationnaire, dans la limite $t \rightarrow \infty$ et un système de taille L finie est un dirac en $q = 0$, $u = 1 \forall x$.

L_{puff} . Pour les plus grandes tailles, la grande probabilité de division des bouffées fait qu'elles ne sont absolument plus indépendantes et le plus grand nombre d'espaces libérés peut être re-remplis avec une grande probabilité. Les bouffées relaminarisent donc toute en bloc, comme les *flip* des systèmes gradients et on retrouve $\Delta\Phi \propto L$.

Ce compte rendu présentait l'étude numérique des relaminarisations rares dans un modèle de turbulence de paroi et une brève discussion théorique des résultats. Les résultats présents seront d'abord affinnés, en particulier en élargissant la gamme de nombre de Reynolds dans laquelle l'étude est réalisée. Cette étude ouvre un certain nombre de perspectives. Dans un premier temps, une étude similaire peut être réalisée sur un modèle de turbulence de paroi un peu plus réaliste, dont la dynamique est basée sur un réseau d'itérations couplées. Cela nécessitera quelques adaptations pour transposer ce type d'algorithme à un système déterministe [8]. Cela conduira naturellement à des études similaires utilisant la véritable dynamique d'écoulement de paroi. Cela pourra aussi conduire à l'extension du calcul des trajectoires optimales vers la turbulence, en particulier en étant capable de partir de l'écoulement laminaire, et non plus d'un germe minimal sur la frontière entre écoulement laminaire et turbulent dans l'espace des phases [9].

Remerciements

Cette étude a pu utiliser les ressources de HPC et de visualisation du Centre de Calcul Interactif de l'université Nice Sophia Antipolis.

Références

1. D. Barkley, *Modeling the transition to turbulence in shear flows*, J. Phys. : Conf. Ser. **318**, 032001 (2011), *Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe*, J. Fluid Mech. **803** (2016).
2. T. M. Schneider, B. Eckhardt, *Lifetime statistics in transitional pipe flow*, Phys. Rev. E **78**, 046310 (2008).
3. C. Anorge, J. P. Mellado, *Global intermittency and collapsing turbulence in the stratified planetary boundary layer* Boundary-Layer Meteorol. **153**, 89–116 (2014).
4. F. Cérou, A. Guyader, *Adaptative multilevel splitting for rare event analysis*, Stochastic analysis and application, **25**, 417–443 (2007).
5. F. Bouchet, J. Reygner, *Generalisation of the Eyring-Kramers transition rate formula to irreversible diffusion processes*, Ann. H. Poincaré **17**, 3499–3532 (2016).
6. R. Graham, T. Tèl, *On the weak noise limit of Fokker-Plank equation*, J. Stat. Phys. (1983).
7. J. Rolland, F. Bouchet, E. Simonnet, *Computing transition rates for the 1-D stochastic Ginzburg-Landau-Allen-Cahn equation for finite-amplitude noise with a rare event algorithm*, J. Stat. Phys. **162**, 277–311 (2016)
8. J. Wouters, F. Bouchet, *Rare event computation in deterministic chaotic systems using genealogical particle analysis*, J. Phys. A **49**, 374002 (2016).
9. S.M.E. Rabin, C.P. Caulfield, R.R. Kerswell, *Triggering turbulence efficiently in plane Couette flow*, J. Fluid Mech. **712**, 244-272 (2012)
10. H. Touchette, *The large deviation approach to statistical mechanics*, Phys. Rep. **478**, 1–69, (2009).
11. J. Rolland, *Mechanical and statistical study of the laminar hole formation in transitional plane Couette flow*, Eur. Phys. J. B **88** : 66 (2015).