

# Analyse taille finie d'une crise de fluctuations dans l'écoulement de Couette plan transitionnel

Joran Rolland

IAU, Frankfurt Universität, Altenhöferallee 1, Frankfurt  
rolland@iau.uni-frankfurt.de

**Résumé.** Ce compte rendu présente l'étude d'une crise de fluctuation se déroulant à la disparition de la modulation laminaire-turbulente de l'écoulement de Couette plan. La modulation prend la forme de bandes, obliques par rapport à la direction de l'écoulement de base. Lorsque que l'on augmente le nombre de Reynolds, on peut voir apparaître des fluctuations d'orientation. De la même manière, lorsque le domaine est assez grand pour contenir plusieurs longueurs d'ondes de la modulation, de la coexistence entre les deux orientations peut se manifester spontanément. Afin de quantifier le phénomène, on simule l'écoulement de Couette plan et on mesure la fonction de réponse ( $\chi$ ) de l'amplitude de la modulation ( $M$ ) en fonction du Reynolds, pour des domaines de tailles croissantes. Les résultats disponibles montrent une croissance du maximum de  $\chi$  en fonction de la surface du domaine, tandis que le Reynolds auquel il est atteint semble converger vers une valeur asymptotique. Au delà de ce Reynolds, la modulation ne disparaît pas totalement. Poursuivant la comparaison avec un phénomène critique on trouve des lois d'échelle en Reynolds et en taille typique d'une phase désordonnée pour  $M$  et  $\chi$ .

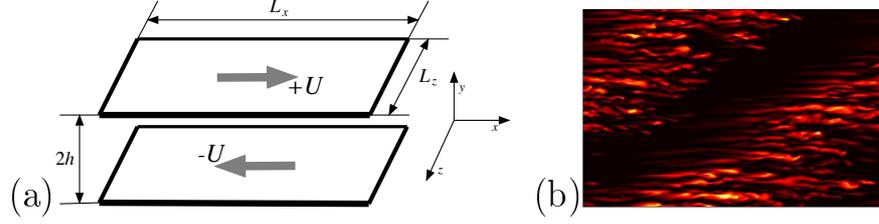
**Abstract.** This proceeding presents the study of a fluctuation crisis taking place at the disappearance of the laminar-turbulent modulation of plane Couette flow (PCF). The modulation takes the form of bands oblique with respect to the streamwise direction. As the Reynolds number is increased, visualisations indicate fluctuations of orientation. Meanwhile spatial coexistence of both orientations spontaneously appear when the domain contains several wavelengths of the modulation. So as to quantify this phenomenon, numerical simulations of plane Couette flow are performed and we measure the response function ( $\chi$ ) of the modulation ( $M$ ) as a function of the Reynolds number, for domains of increasing sizes. The results currently available show that the maximum of  $\chi$  grows with the surface of the domain, while the Reynolds number at which it is reached seems to converge toward an asymptotic value. Beyond that Reynolds number, the modulation does not disappear completely. Comparison with a critical phenomenon still holds and we find scaling laws in Reynolds and in size typical of a disordered phase for  $M$  and  $\chi$ .

## 1 Introduction

L'écoulement de Couette plan (Fig. 1 (a)), comme de nombreux écoulements de paroi, est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds  $R$ . En conséquence, la turbulence nécessite des perturbations d'amplitude finie pour se développer. Une des propriétés de ces écoulements est qu'il peut y avoir coexistence spatiale et temporelle de la turbulence. Dans une gamme de Reynolds  $[R_g; R_t]$  ( $\simeq [325; 415]$  selon les définitions classiques), la coexistence est très régulière et prend la forme de bandes obliques, ayant deux orientations possibles, alternativement laminaires et turbulentes [1,2,3] (Fig. 1 (b)). Ces bandes correspondent à une modulation en très bonne approximation sinusoïdale de l'amplitude de la turbulence de longueur d'onde  $\lambda_x \simeq 110h$ ,  $30h \lesssim \lambda_z \lesssim 60h$ .

Cette modulation n'est pas permanente. Lorsque  $R$  s'approche de  $R_t$  par valeurs inférieures, il apparaît des fluctuations d'orientation lorsque le domaine (de taille  $L_x, L_z$ ) ne contient qu'une seule longueur d'onde [4] ( $L_{x,z} \simeq \lambda_{x,z}$ ). Le temps de vie dans l'une ou l'autre des deux orientations est très décrit par une loi de type Arrhenius. Pour l'expliquer, on utilise la théorie d'Eyring-Kramers dans le cadre d'un modèle où  $A_{\pm}$  (complexe) décrit l'amplitude locale et instantannée de la modulation :

$$\partial_t A_{\pm} = (R_t - R)A_{\pm} + \Delta A_{\pm} - g|A| \pm^2 A_{\pm} - |A_{\mp}|^2 A_{\pm} + \alpha \zeta. \quad (1)$$



**FIGURE 1.** (a) : Schéma de l'écoulement de Couette plan. (b) : Niveaux de couleur de norme du champ de vitesse, écart à l'écoulement laminaire (résultat numérique).

Soit une equation d'amplitude contenant la compétition entre orientations et un bruit blanc [1,2]. Ce modèle est quantitativement validée par les mesures et simulations et contient (en plus des fluctuations d'orientation) la loi d'échelle pour  $M(R, k_x, k_z)$ , le maximum de  $\chi$  vers  $R_t$ , la marche aléatoire de la position relative de la bande dans le domaine (phase de  $A_{\pm}$ ) [2], ainsi que l'évolution de l'amplitude de la modulation (module de  $A_{\pm}$ ) qui suit en très bonne approximation un processus d'Ornstein–Uhlenbeck [5]. Aux fluctuations d'orientation, les expériences dans de grands domaines font correspondre de la coexistence spontanée des deux orientations (toujours en accord).

Ces sauts entre structures cohérentes et le maximum de fluctuations semblent très semblables à la crise de fluctuations qui est observée dans l'écoulement de Von-Kármán (VK) [6]. Cependant, un certain nombre de différences sont présentes (en plus de la taille fixe de VK). D'une part, le cas de PCF n'est pas de la turbulence développée. De plus, dans cette gamme de  $R$ , le modèle Eq. 1 ; forcément *ad hoc* car il n'y a pas de dérivation quantitative bottom-up à l'heure actuelle ; provient de la physique statistique à d'équilibre, tandis que la meilleure description pour VK provient de la physique statistique hors d'équilibre. Ce caractère Gaussien semble être une propriété de toutes les grandeurs moyennées en espace dans l'écoulement, ainsi (dans cette gamme de  $R \lesssim R_t$ ) la fonction de grandes déviations de l'énergie cinétique moyenne est parabolique dans la limite de taille grande [7]. Tout cela étant *ad hoc*, il s'avère que pour des nombres de Reynolds plus faibles, les meilleurs modèles proviennent de la physique statistique hors d'équilibre [8]<sup>1</sup>. Pour cette gamme de  $R \gtrsim R_g$ , la fonction de grandes déviations de l'énergie cinétique se dissymétrise clairement, les grandeurs moyennées en espace perdent leur caractère Gaussien.

Cela motive l'étude de la crise du point de vue d'un phénomène critique. On va chercher à savoir si la comparaison quantitative se maintient lorsque l'on étudie la crise dans la limite thermodynamique. En effet, lors d'une transition de phase du second ordre dans un système de taille finie le maximum de la fonction de réponse  $\chi_m$  et le paramètre auquel il est atteint  $R_L (\simeq R_t)$  suivent des lois d'échelle en fonction de la taille du système :

$$\chi_m \propto L^{\frac{\gamma}{\nu}}, R_L = R_{\infty} \pm L^{-\frac{1}{\nu}}, \gamma, \nu > 0. \quad (2)$$

Les exposants  $\gamma$  et  $\nu$  sont respectivement l'exposant de la fonction de réponse et celui de la longueur de corrélation. On a  $R_t \simeq R_{\infty}$ .

On commence par présenter les grandeurs mesurées et l'on procède à une description visuelle du phénomène (§ 2). On procède ensuite à l'analyse taille finie proprement dite (§ 3). On discute finalement des résultats (§ 4).

## 2 La crise de fluctuation

Les simulations numériques sont réalisées avec le code Channelflow, de John Gibson [9]<sup>2</sup>. Dans toute la suite, le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  (écart à l'écoulement de base) est adimensionnée par la vitesse des plaques

1. On précise, pour s'épargner la confusion régulière entre réponse linéaire et physique statistique hors d'équilibre.

2. On a gardé une habitude peut-être discutable de résolution spatiale intermédiaire, en conséquence, les seuils et valeurs numériques sont toutes décalées environ 15%.

$U$ , les longueurs par le demi gap  $h$  et les durées par  $h/U$ . Le nombre de Reynolds est défini par  $R = hU/\nu$ , avec  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

La quantité fondamentale pour étudier la crise de fluctuation est une mesure de l'amplitude de la modulation, dans une orientation donnée. Pour cela, dans des domaines de taille  $L_x, L_z$  raisonnable, on utilise le mode fondamental de la modulation pour définir une paire de paramètres d'ordre :

$$m_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 |\hat{u}|_x^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda_x}, y, \pm \frac{2\pi}{\lambda_z} \right) dy}. \quad (3)$$

On échantillonne les pdf  $\rho(m_{\pm})$ , la procédure est relativement standard pour cet écoulement [2,3].  $m_{\pm}$  et la pdf  $\rho(m_{\pm})$  sont directement modélisés par  $|A_{\pm}|$  et sa pdf [2]. On définit la moyenne de l'amplitude de la modulation  $M$  ainsi que ses fluctuations  $\sigma$  à l'aide cette pdf. On note que les tailles de domaines étudiées ici sont suffisamment petites pour utiliser uniquement le mode fondamental de Fourier. Lorsque les domaines étudiés sont plus grands, il est plus pertinent de travailler à partir de la transformée de Hilbert du champ de vitesse (ou d'une grandeur proportionnelle) [1]. Comme il n'y a pas de champ associé à  $M$  (autre différence avec VK), la fonction de réponse est définie à partir des fluctuations  $\chi = \sqrt{L_x L_z} \sigma$ . On peut aussi définir une fraction turbulente  $f$  mesurant la proportion du domaine occupée par un écoulement non trivial. Cependant, elle ne donne aucune information sur l'orientation des bandes.

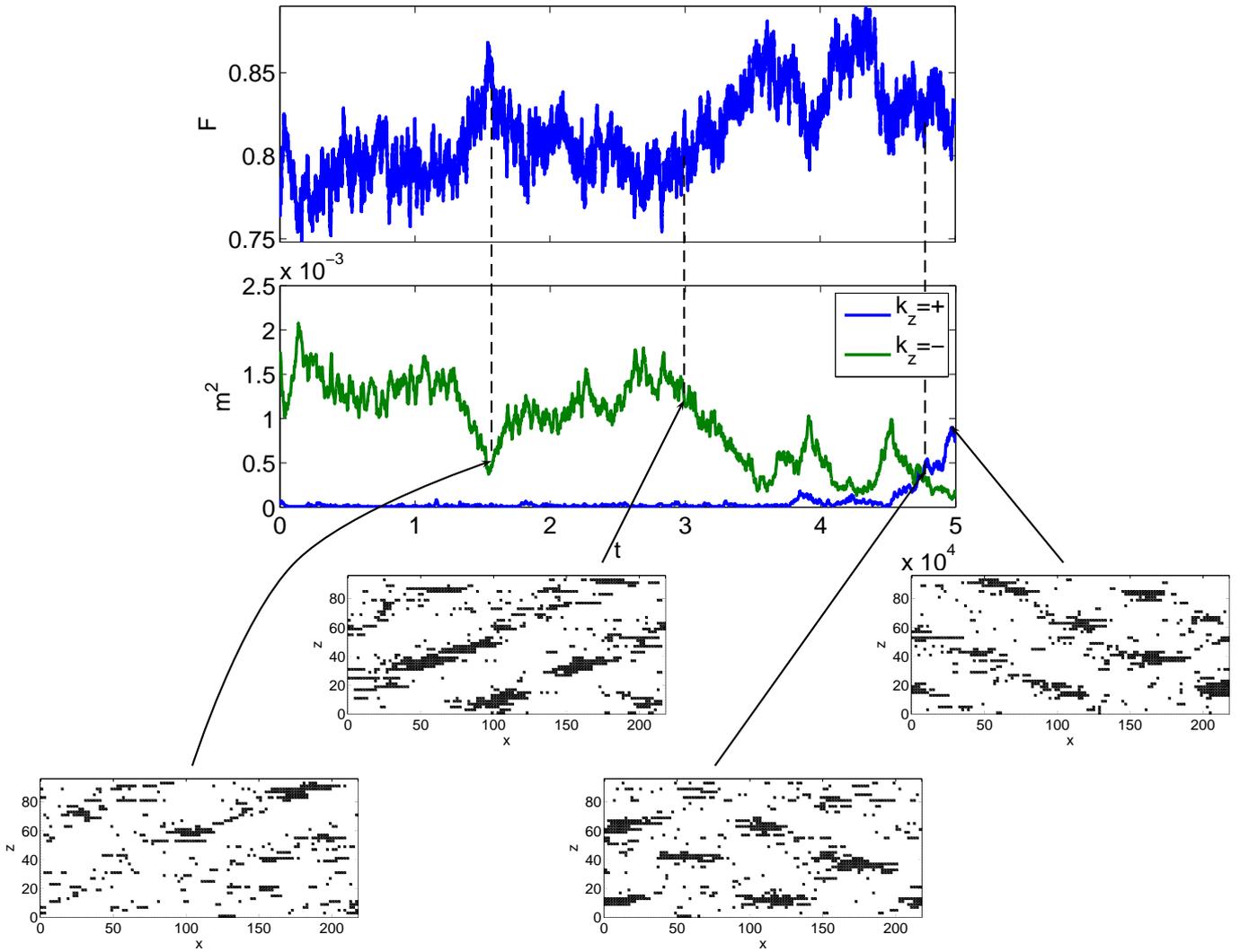
On présente un exemple de fluctuation d'orientation dans un domaine de taille  $L_x \times L_z = 220 \times 96$  pouvant contenir  $2\lambda_{x,z}$  dans chaque direction. On suit l'état de l'écoulement à l'aide de visualisations (Fig. 2)<sup>3</sup>, on choisit  $R$  proche de  $R_t$ . La grande majorité du temps, la modulation se trouve dans une orientation. On peut distinguer deux types décaris : d'une part,  $m_{\pm}$  peut décroître et  $m_{\mp}$  croître à  $f$  relativement constant : ce type d'événements correspond à un retournement de l'orientation (visible pour  $t \in [2 \cdot 10^4; 5 \cdot 10^4]$ , trois dernières vignettes). L'état intermédiaire est relativement désordonné et présente des traces des deux orientations. On a constaté parfois que la turbulence envahit de manière transitoire tout l'écoulement afin de laisser à nouveau sa place aux bandes (vignettes 1 et 2). Ce type d'événements laisse une trace nette dans la fraction turbulente. Il conduit de plus à l'existence d'un troisième maximum dans les pdf de  $m_{\pm}$  et peut éventuellement causer une transition discontinue juste après la crise de fluctuations.

### 3 Analyse taille finie

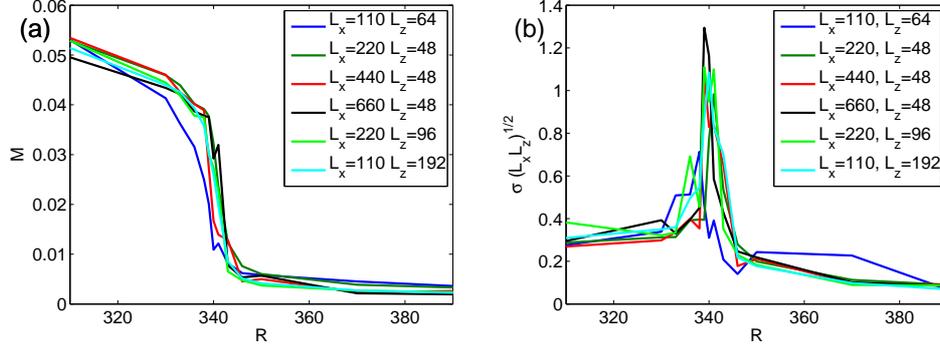
On décrit maintenant l'analyse taille finie proprement dite. La moyenne du paramètre d'ordre  $M$  et la fonction de réponse  $\chi$  sont échantillonnés en fonction de  $R$  pour des domaines de taille  $L_x \times L_z = 110 \times 64, 220 \times 48, 440 \times 48, 220 \times 96, 110 \times 192$  et  $660 \times 48$ . On examine d'abord rapidement le paramètre d'ordre en fonction de  $R$ , pour toutes les tailles (Fig. 3). Il indique que la modulation disparaît progressivement pour laisser place à de la turbulence de paroi uniformément répartie dans le domaine (ici, pour  $R \simeq 340$ ). On note que le paramètre d'ordre ne tombe pas à 0 : cela indique qu'il reste une trace de modulation, de manière intermittente et désorganisée à des nombre de Reynolds plus importants. Les valeurs prises décroissent avec la taille du domaine. Ainsi, on retrouve cette modulation dans des domaines contenant une longueur d'onde [2,3], tandis qu'elle a quasiment disparu dans de très grands domaines [1]. Ce fait se retrouve aussi dans la fraction turbulente, qui ne converge que très lentement vers 1. L'effet a aussi été dans l'écoulement de Poiseuille dans une conduite [10].

On passe à la description de la fonction de réponse (Fig. 3). On note que pour des  $R$  clairement en dessous ou clairement au dessus de  $R_L$ , la fonction de réponse prend des valeurs modérées, et dans l'ensemble indépendantes de la taille du domaine. Il y a cependant un pic très marqué à  $R \simeq 340$ , précisément là où se manifestent les fluctuations d'orientation. On note que la valeur maximum de  $\chi_m$  croît avec la surface du domaine. La valeur  $R_L$  à laquelle elle est atteinte semble elle aussi dépendre de  $L_x L_z$ . On examine plus précisément le comportement au maximum. La croissance de  $\chi_m$  en fonction de

3. des visualisations couleurs sont visibles dans [4,5] le choix du noir et blanc coarse grained est dicté par le coup de stockage en mémoire des champs de vitesse. La méthode de calcul est décrite dans [2,5]

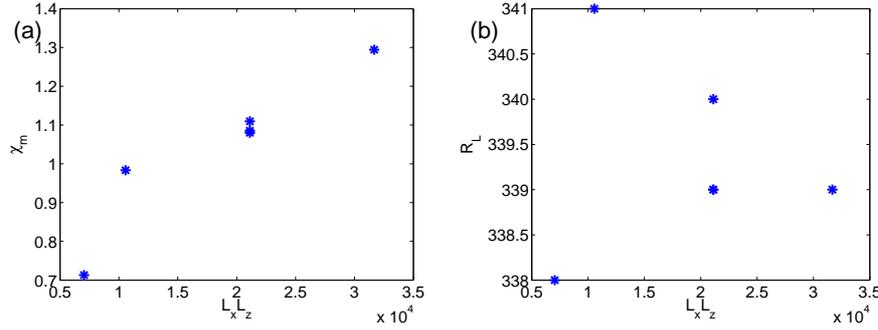


**FIGURE 2.** Exemple de métastabilité et de fluctuations dans un domaine de taille  $L_x \times L_z = 220 \times 96$ . Une série temporelle des deux paramètres d'ordre  $m_{\pm}^2$  est affichée au milieu, la série temporelle de la fraction turbulente  $f$  correspondante est affichée en haut. Les images en noir et blanc correspondent à une discrimination laminaire/turbulente de l'écoulement (blanc : turbulent, noir : laminaire). Les flèches pointent aux instants correspondant dans la série temporelle de  $m_{\pm}^2$ .



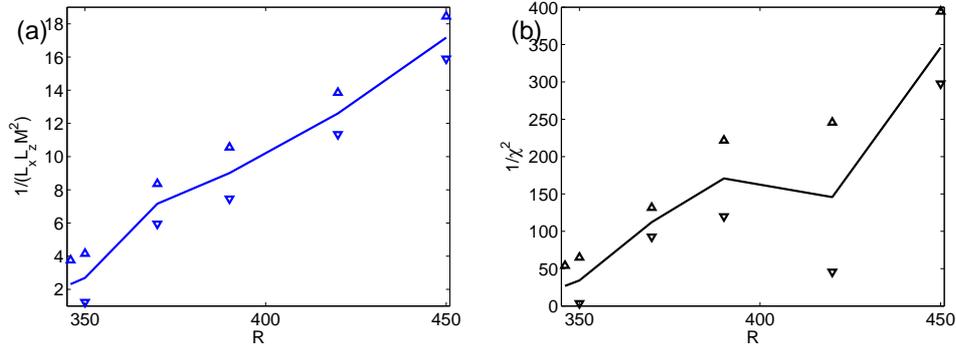
**FIGURE 3.** (a) : Paramètre d'ordre en fonction de  $R$ , pour toutes les tailles considérées. (b) : Fonction de réponse du paramètre d'ordre en fonction de  $R$  pour toutes les tailles considérées.

$L_x L_z$  est bien visible (Fig. 4 (a)). Cependant des données sur des tailles plus importantes sont nécessaires pour affirmer que l'on a bien un comportement critique (et extraire d'éventuels exposants). En ce qui concerne  $R_L$ , il semble converger vers une valeur asymptotique  $R_\infty$ . Des données plus fines en  $R$  et pour des tailles plus importantes devraient là aussi aider à préciser le comportement de  $R$ .



**FIGURE 4.** (a) : Maximum de la fonction de réponse  $\chi$  en fonction de la surface du domaine  $L_x L_z$ . (b) : Nombre de Reynolds où le maximum de  $\chi$  est atteint en fonction de la surface du domaine  $L_x L_z$ .

On revient sur la traces de modulation au delà de  $R_L$ . Dans une première approche de champ moyen, en taille finie et dans la phase désordonnée, on s'attend à des lois d'échelle pour  $1/M^2$  et  $1/\chi^2$  respectivement en  $L_x L_z (R - R_L)$  et en  $(R - R_L)$  ([2,5]), déduites de Eq. 1. On avait noté la faible variabilité de  $\chi$  en fonction de la surface, on remarque de plus que  $L_x L_z M^2$  ne dépend pas de la surface du domaine. On trace donc  $1/(M^2 L_x L_z)$  (Fig. 5 (a)) et  $1/\chi^2$  (Fig. 5 (b)) en fonction de  $R$ , moyennés sur l'ensemble des tailles de domaines disponibles. Les barres d'erreurs correspondent à la variance pour les différentes tailles de domaines. Comme dans le cas de la phase ordonnée, une approche "champ moyen" donne une bonne prédiction des lois d'échelle (il y a un léger décrochage pour  $\chi$ ) [1,2]. Le ratio entre  $M^2 L_x L_z$  et  $\chi^2$  dans cette phase sont en bon accord avec la constatation que la pdf de  $|m_\pm|$ , divisée par  $|m_\pm|$  ne trouve pas son maximum en 0, mais décalé d'une valeur  $\delta$  [3]. Dans notre cas,  $\delta$  est indépendant de  $R$ . Cela étant dit, il s'agit d'un paramètre assez fin, dont l'estimation est fortement dépendente de l'observable utilisée. L'accord sur  $\delta \neq 0$  ainsi que son ordre de grandeur (environ  $M(R \gtrsim R_L)$ ) est le point important.



**FIGURE 5.** Dans la “phase désordonnée”, moyenné sur toutes les tailles considérées : (a) inverse du carré de  $M$ , normalisé par la taille, (b) : inverse du carré de la fonction de réponse.

## 4 Discussion

Ce compte rendu présente une analyse en taille finie de la crise de fluctuations se produisant lors de la disparition de la modulation de la turbulence dans l’écoulement de Couette plan. Les résultats numériques indiquent que l’on retrouve un comportement de champ moyen dans la “phase désordonnée” en bon accord avec ce qui a été mesuré dans la “phase ordonnée” [1,2]. En ce qui concerne l’analyse taille finie proprement dite, les données actuellement disponible montrent la croissance du maximum de fluctuation avec la surface du domaine. Des données supplémentaires sont toutefois nécessaires pour vérifier si cette croissance se poursuit, et si la comparaison quantitative avec un phénomène critique est valide.

La réapparition transitoire de la turbulence (Fig. 2, parfois appelée intermittence [3]) se manifeste autour de  $R_L$ . En introduisant un troisième maximum dans les pdf  $\rho(m_{\pm})$ , qualitativement différent des deux autres (en  $m_{\pm} \simeq M, m_{\mp} \gtrsim 0$ ), ce phénomène est potentiellement de nature à changer la transition se produisant à  $R_L$ . Il reste en effet à voir s’il apparaît une discontinuité dans des grandeurs comme la fraction turbulente ou le paramètre d’ordre. Des simulations (ou des expériences) pour une gamme de  $R$  suffisamment fine autour de  $R$  et des tailles suffisamment grandes.

## Références

1. A. Prigent, G. Grégoire, H. Chaté, O. Dauchot, W. van Sarloos, Phys. Rev. Lett. **89** 014501 (2002).
2. J. Rolland, P. Manneville, Eur. Phys. J B **80**, 529–544 (2011).
3. L. S. Tuckerman, D. Barkley, Phys. Fluids **23**, 041301 (2011).
4. J. Rolland, P. Manneville, J. Stat. Phys. **142**, 577–591 (2011).
5. J Rolland, thèse de doctorat (2012).
6. P.P. Cortet, E. Herbert, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, V. Padilla, J. Stat. Mech, P07012 (2011).
7. J. Rolland, Eur. Phys. J B. *accepté*, arxiv :1502.00813, DOI : 10.1140/epjb/e2015-50344-y.
8. D. Barkley, Phys. Rev. E **84**, 016309 (2011).
9. J. Gibson, J. Halcrow, P. Cvitanović, J. Fluid Mech. **611**, 107–130 (2008).
10. M. Avila, B. Hof, Phys. rev. E **87**, 063012, (2013).