THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ
PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Mathématiques
(École Doctorale Paris Centre)

soutenue publiquement par

Cyrille HÉRIVEAUX

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Quelques problèmes inverses en analyse semiclassique

Rapporteurs :

M. **Sandro GRAFFI**, Professeur à l'Université de Bologne
M. **Benoît GRÉBERT**, Professeur à l'Université de Nantes

Soutenue le 24 juin 2013 devant le jury composé de :

M. **Hakan ELIASSON**, Professeur à l'Université Paris 7	Examinateur
M. **François GOLSE**, Professeur à l'École Polytechnique	Examinateur
M. **Sandro GRAFFI**, Professeur à l'Université de Bologne	Rapporteur
M. **Nicolas LERNER**, Professeur à l'UPMC	Examinateur
M. **Thierry PAUL**, DR-CNRS à l'École Polytechnique	Directeur
Mme **Laure SAINT-RAYMOND**, Professeur à l'UPMC	Examinatrice

Département de Mathématiques et Applications, ÉNS Ulm
45, rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex

Département de Mathématiques de l'ÉNS Cachan
61, avenue du Président Wilson
94235 Cachan Cedex

École Doctorale 386
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

À mes *familles.*

Il est en bras de chemise, avec des bretelles mauves […]. *Les bretelles se voient à peine sur la chemise bleue, elles sont tout effacées, enfouies dans le bleu, mais c'est de la fausse humilité : en fait, elles ne se laissent pas oublier, elles m'agacent par leur entêtement de moutons, comme si, parties pour devenir violettes, elles s'étaient arrêtées en route sans abandonner leurs prétentions. On a envie de leur dire : « Allez-y,* devenez *violettes, et qu'on n'en parle plus. »Mais non, elles restent en suspens, butées dans leur effort inachevé. Parfois le bleu qui les entoure glisse sur elles et les recouvre tout à fait : je reste un instant sans les voir. Mais ce n'est qu'une vague, bientôt le bleu pâlit par places et je vois réapparaître des îlots d'un mauve hésitant, qui s'élargissent, se rejoignent et reconstituent les bretelles.*

Jean-Paul SARTRE, *La Nausée.*

Remerciements

Tout d'abord, un grand merci à Thierry Paul, pour m'avoir fait découvrir l'analyse semiclassique, pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir, ainsi que pour la relation amicale qu'il nous a permis d'établir. Un grand merci également de m'avoir encadré et encouragé tout au long de ces années.

Je suis véritablement honoré que de si grandEs mathématicienNEs aient accepté de composer mon jury.

Sandro Graffi et Benoît Grébert ont accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs de cette thèse. Je tiens à les remercier chaleureusement pour leur relecture attentive, leurs remarques, conseils, et encouragements. Sandro Graffi a gentiment accepté d'être présent malgré la distance : je lui en suis très reconnaissant.

C'est également un très grand plaisir de retrouver Laure Saint-Raymond dans mon jury de soutenance, presque neuf ans après celui d'admission aux ÉNS. Je remercie François Golse pour ses conseils bienveillants, ainsi que Hakan Eliasson et Nicolas Lerner pour l'attention qu'ils ont portée sur ma thèse. Encore une fois, je ne saurais assez remercier les membres du jury d'avoir accepté l'invitation de Thierry dans de si brefs délais.

J'en profite pour remercier ici Corentin Lacombe, qui a fait de nombreuses démarches administratives pour raccourcir le temps entre la soumission de mon manuscrit et cette soutenance.

J'ai passé au Lycée Franco-Allemand de très belles années, et je lui suis encore aujourd'hui très attaché. Je tiens à en remercier toute l'équipe pédagogique, avec une pensée spéciale pour Mme Debost.

Mes années en CPGE au Lycée Henri-IV ne furent pas moins enrichissantes. Mme Mahieux, et MM. Brunel, Coup et Esperet sont pour moi, chacun à sa manière, des modèles d'enseignement. Les sigles de M. Esperet, ainsi que certaines phrases de Mme Mahieux et de M. Brunel sont gravés dans ma mémoire, et c'est avec émotion que je les transmets aujourd'hui à mes étudiants.

J'ai pu bénéficier, à l'ÉNS Ulm, d'un enseignement de qualité teinté d'initiation à la recherche. Le dialogue avec chercheurs et enseignants y est rendu facile par ces derniers. Je tiens à tous les en remercier grandement, et en particulier David Harari, qui a encadré mon stage de M1, et Laurence Vincent qui nous a facilité la vie au quotidien.

Christian Gérard m'a fait découvrir le formalisme mathématique de la Mécanique Quantique via un cours passionnant à l'Université Paris-Sud, puis a accepté d'encadrer mon mémoire de M2. Il m'a beaucoup appris lors de nombreux entretiens, et je l'en remercie vivement.

J'ai eu la chance d'être chaleureusement accueilli par trois laboratoires lors de ces années de thèses.

Au Département de Mathématiques et Applications de l'ÉNS Ulm, j'ai retrouvé l'agréable cadre de travail de mes années d'école. Les doctorants y ont la chance d'être écoutés dès les premiers mois de leurs recherches. J'en remercie tous les membres du laboratoire. Un grand merci à l'équipe administrative, notamment Bénédicte Auffray et Zaïna Elmir. Enfin, une pensée ici pour la joyeuse équipe que nous formions avec mes camarades de bureau : Thibaut, Daniel et Vincent.

Au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, j'ai également eu la joie de faire des rencontres enrichissantes, et de participer à des discussions qui ne l'étaient pas moins. J'en remercie tous les membres de l'équipe. Je pense aussi à Agis, et à mes petits frères de thèse partis dans d'autres directions : Emmanuel et Baptiste. Une pensée spéciale pour Michèle Lavalette, notamment pour son soutien dans les moments difficiles.

Enfin, j'ai le plaisir d'être depuis bientôt deux ans agrégé préparateur à l'ÉNS Cachan. L'ambiance au sein de l'équipe y est extrêmement agréable. Je remercie chaudement Claudine Picaronny pour toutes nos discussions, ses conseils, et son soutien dans les périodes difficiles, mais également Laurent Desvillettes, Jean-Michel Ghidaglia, Frédéric Pascal, Alain Trouvé et Nicolas Vayatis, pour tout ce qu'ils m'ont, chacun, apporté. Je n'oublie pas non plus Adrien, Benoît, Sandrine, et plus particulièrement Claire, qui saura pourquoi.

Mes amis constituent une part très importante de ma vie. Les moments passés avec eux, nos échanges, leurs messages affectueux m'ont été indispensables tout au long de cette thèse.

De Paris à Campeaux en passant par Skype, autour d'un verre ou d'un tableau blanc, au-delà de nos disciplines respectives, nous avons passé beaucoup de temps à partager et réfléchir à cette période que nous traversions tous : je tiens à remercier ici profondément Anne-Claire, Béné, Claire G., Claire M., Dali, Diane, Emile, Justin, Louis-Hadrien, Lucie, Madlen, et Marine.

Ils m'accompagnent également depuis le début de cette thèse, et même depuis bien plus longtemps pour la plupart. C'est un véritable plaisir de remercier Audrey, Bao Chi, Chris, Claire L., Cyril, Fabrice, François, Gautier, Guillaume, Guy, Hugo, Jérémie, Jonathan, Katharina, Laure, Lauréline, Manu, Marie S., Mathieu B., Morgane, Nico, Paul, Pierre-Antoine, Pierre-Édouard, Sara, Sébastien, Sophie, et Vincent.

Un FIL conducteur de cette thèse a été mon activité de comédien amateur : un grand merci à Lauriane, qui m'apprend tant, ainsi qu'à Arnaud, Béatrice, Justine, Fred, Gaëlle, et Marine.

Merci également à ceux qui m'ont, depuis plusieurs années déjà, accueilli dans

leur groupe : Anouck, Aurélie, Cédric, Iria, Johan, Jennifer, Marie L., Maëlle, Mathieu P., Nicolas, Stéphane, Sylvie, et Yuki. Je pense aussi à ceux qui m'ont accueilli au sein de leur famille : Meriem et Clémence, Amel et Walid, Narimène, Azyadé, Fethi, Assia, Raouf et Riad.

Ma famille est également très présente dans ma vie, et l'a été en particulier pendant ces années de thèse. Je tiens à remercier tout particulièrement mes parents pour leur soutien sans faille et en toute occasion, et tout aussi chaleureusement ma soeur, mes frères et belles-soeurs. Mon filleul Bastian, ainsi que mes neveux et nièces Aziliz, Émilie, Énora, Kristell, Laurine, Loïse, Maëlys, Mattéo, Morgane, Thibaud, et Yoann ont également leur place dans ces pages de remerciements.

طَارَق، مُون اَمُور پُور تُواَ يلاَ پلُوس دَاَنِس كُون اُورَانِجَ ، كَ شَ پَاَ پُوشِبَل. جَاَ تِ دُواَ تُو اِيِ بِاَن پلُوس اَنِكُور.

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons le problème inverse suivant : supposons que H est un opérateur pseudodifférentiel elliptique (a priori inconnu) sur une variété X. De quelles données spectrales avons-nous besoin pour retrouver son symbole « total », autrement dit H microlocalement au voisinage infinitésimal d'un ensemble (supposé connu) invariant par la dynamique classique engendrée par son symbole principal ?

Dans le cas où cet ensemble est une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée γ, nous montrons que le développement de Taylor du symbole total du hamiltonien quantique dans un système de coordonnées locales autour de γ peut être reconstruit à partir des contributions de γ à la formule des traces de Gutzwiller associée à une certaine famille d'observables localisées au voisinage de γ. Nous donnons également des résultats analogues dans le cas où l'ensemble invariant est un minimum non-dégénéré du symbole principal de H. Nous nous intéressons finalement au cas particulier du précédent où il est su a priori que le hamiltonien est un opérateur de Schrödinger, et à des analogues classiques de nos résultats.

Mots-clés : Formule des traces de Gutzwiller, forme normale de Birkhoff, analyse semiclassique, trajectoire périodique elliptique non-dégénérée, fond de puits, opérateur de Schrödinger, problèmes inverses.

Abstract

In this thesis, we consider the following inverse problem : let us assume that H is an elliptic semiclassical pseudodifferential operateur on a manifold X (a priori unknown). What spectral data do we need in order to recover its "total" symbol, namely H microlocally in formal neighborhood of a (known) set which is invariant by the classical dynamics generated by its principal symbol ?

In the case where this set is an elliptic nondegenerate periodic trajectory γ, we show that the Taylor series of the total symbol of the quantum Hamiltonian in a system of local coordinates near γ can be recovered from the contributions of γ to the Gutzwiller trace formula with observable associated to certain families of observables localized near γ. We also give some analog results in the case where the invariant set is a non-degenerate minimum of the principal symbol of H. We are finally interested in the special case of the preceeding where it is known a priori that the Hamiltonian is a Schrödinger operator, and in classical analogs of our results.

Keywords: Gutzwiller trace formula, Birkhoff normal form, semiclassical analysis, non-degenerate periodic elliptic trajectory, bottom of the well, Schrödinger operator, inverse problems.

Table des matières

Introduction

Dans l'introduction de son article [Kel76], J.B. Keller donne une définition des problèmes inverses par opposition aux problèmes directs :

> We call two problems inverses of one another if the formulation of each involves all or part of the solution of the other. Often, for historical reasons, one of the two problems has been studied extensively for some time, while the other is newer and not so well understood. In such cases, the former is called the *direct problem*, while the latter is called the *inverse problem.*

Il en donne ensuite onze exemples, avec beaucoup d'humour pour les trois premiers dans lesquels il définit un problème inverse comme celui de trouver la question à une réponse donnée telle que : « Nine W » [1]. Il donne également l'exemple de l'interpolation de Lagrange (le problème direct étant l'évaluation d'un polynôme), trouver un polynôme connaissant ses racines (le problème direct étant celui de trouver les racines d'un polynôme donné), ou enfin celui de trouver une matrice symétrique réelle connaissant ses valeurs propres. La définition donnée par J.B. Keller est sujette à interprétation. En physique, dont bon nombre de problèmes inverses proviennent, elle s'interprète de la manière suivante : le problème inverse consiste à retrouver les *causes* à partir des *effets.*

Un des problèmes inverses les plus célèbres est probablement celui que se pose M. Kac dans son article « Can one hear the shape of a drum ? »([Kac66]) : étant donné le spectre du laplacien sur un domaine plan Ω borné à bord lisse avec une condition de Dirichlet au bord (correspondant aux fréquences propres de vibration du tambour), peut-on connaître, à isométrie près, le domaine Ω (la forme du tambour) ? Plus généralement, le spectre d'un laplacien sur une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ détermine-t-il, à isométrie près, la variété $(\mathcal{M}, g)$? Le problème direct est connu : si deux variétés sont isométriques, elles sont isospectrales. La réponse au problème inverse est négative en général, comme l'a prouvé J. Milnor dans [Mil64] en exhibant une paire de tores plats de dimension 16, isospectraux mais non isométriques. Le premier contre-exemple en dimension 2 apparaît, lui, dans [GWW92]. En revanche, on peut par exemple entendre l'aire (via la formule de Weyl) et d'autres caractéristiques géométriques d'un tambour. S. Zelditch prouve également dans [Zel00] que la réponse au problème de Kac est positive dans le cas de domaines plans sous des conditions de régularité et de symétrie.

1. La question qu'il propose est : « Do you spell your name with a "V", Herr Wagner ? »

Dans cette thèse, nous étudierons le problème inverse suivant : supposons que H est un opérateur pseudodifférentiel elliptique (a priori inconnu) sur une variété X. De quelles données spectrales avons-nous besoin pour retrouver son symbole « total », autrement dit H microlocalement au voisinage infinitésimal d'un ensemble (supposé connu) invariant par la dynamique classique engendrée par son symbole principal ?

Dans le cas où cet ensemble est une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée γ d'énergie E, si l'on suppose pour simplifier les énoncés que les périodes lT, $l \in \mathbb{Z}^*$, des itérées de γ sont isolées et que l'on choisit des fonctions ϕ_l telles que le support de $\hat{\phi}_l$ ne contient que la période lT, on sait que le développement semiclassique –donné par la formule des traces de Gutzwiller [Gut71] – des traces de $\phi_l\left(\frac{H-E}{\hbar}\right)$ pour $l \in \mathbb{Z}^*$ détermine la forme normale de Birkhoff associée à $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ au voisinage de γ (voir [ISZ02, GP10]). Dans le cas où l'ensemble invariant est un fond de puits m d'énergie E, on a un résultat analogue, où la forme normale de Birkhoff est déterminée par le spectre du hamiltonien dans l'intervalle $[E, E+\hbar^{1-\alpha}]$ (où $\alpha > 0$ peut être choisi quelconque, voir [GPU07]).

Le but de cette thèse est la détermination du symbole de H lui-même, et non plus seulement de sa forme normale de Birkhoff, dans un voisinage infinitésimal de l'ensemble invariant (γ ou m) considéré dans les deux cas précédents.

Puisque les coefficients de la formule des traces de Gutzwiller dans le cas d'une trajectoire périodique et le bas du spectre dans le cas d'un fond de puits sont invariants par conjugaison par un opérateur microlocalement unitaire, il est nécessaire de supposer connue plus d'information spectrale que précédemment. Dans le cas où l'invariant γ est une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée, on se donne les coefficients de la formule des traces semiclassique avec observables :

$$\operatorname{Tr}\left(A_\hbar \phi\left(\frac{H-E}{\hbar}\right)\right) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k(A_h)\hbar^k + O(\hbar^\infty) \qquad (*)$$

On montre que le développement de Fourier-Taylor du symbole total du hamiltonien dans un système de coordonnées locales $(x, t, \xi, \tau) \in \mathcal{U} \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ au voisinage de la trajectoire (alors identifiée au cercle $\mathbb{S}^1$) jusqu'à un certain ordre N – que l'on définira par la suite – peut être reconstruit à partir de la donnée des coefficients de la formule des traces $(*)$ associée à une certaine famille d'observables. Le cardinal de cette famille est équivalent, quand N tend vers $+\infty$ et à constante multiplicative près, à N^n. Ce cardinal est à comparer à la dimension de l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus N en (x, ξ, τ) dont les coefficients sont des polynômes trigonométriques de degré au plus N, qui est équivalente, quand N tend vers $+\infty$ et à constante multiplicative près, à N^{2n+1} : la réduction du nombre d'observables nécessaires à la reconstruction du symbole du hamiltonien provient du fait que ce dernier est conjugué à sa forme normale de Birkhoff par un symplectomorphisme, et non pas un difféomorphisme quelconque.

On montre également que la contribution principale de la trajectoire périodique à la formule des traces $(*)$ associée à une famille finie d'observables permet de reconstruire explicitement, non plus seulement les angles de Poincaré modulo 2π mais un système de coordonnées de Fermi, *i.e.* un système de coordonnées symplectiques locales (x, t, ξ, τ) dans lequel la trajectoire s'écrit $\gamma(t) = (0, t, 0, 0)$ et le symbole principal $\sigma_p(H)$ du hamiltonien s'écrit :

$$\sigma_p(H)(x, t, \xi, \tau) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + \tau + O\left(\left(||(x, \xi)||^2 + |\tau| \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

On donne également des résultats analogues dans le cas d'un fond de puits.

Remarquons que l'information nécessaire ne requiert pas la connaissance des vecteurs propres $(\psi_{j,\hbar})_j$ mais seulement des éléments de matrice diagonaux – qui sont déterminés par les coefficients de la formule des traces $(*)$ dans le cas d'une trajectoire périodique elliptique – associés à une famille d'observables, ces éléments de matrice correspondant physiquement à la valeur moyenne des résultats d'une mesure.

Notons que l'on donne également des analogues classiques de ces résultats dans la partie 5.4.

Rappelons que dans le cas où l'on sait a priori que le hamiltonien est un opérateur de Schrödinger, V. Guillemin et A. Uribe ont montré dans [GU07] que le développement de Taylor à tout ordre du potentiel est déterminé par la forme normale de Birkhoff classique si ce dernier vérifie une hypothèse de symétrie. Dans [CdVG11], Y. Colin de Verdière et V. Guillemin prouvent qu'en dimension 1, il est possible de déterminer le potentiel à partir de la forme normale de Birkhoff *quantique* sous des hypothèses génériques, affaiblies par le premier auteur dans [CdV11].

Dans cette thèse, on montre que le développement de Taylor à tout ordre du potentiel peut être reconstruit, sans les hypothèses génériques des résultats de [CdVG11, CdV11] et en dimension finie quelconque, à partir d'éléments de matrices diagonaux associés à une famille *finie* d'observables. On montre également que le résultat de V. Guillemin et A. Uribe est optimal : il est impossible de déterminer le potentiel uniquement à partir de la forme normale de Birkhoff classique sans cette hypothèse de symétrie.

Plan de la thèse

Chapitre 1 : Rappels et définitions

Dans cette partie, on rappelle quelques définitions et propriétés nécessaires aux chapitres suivants. On y fixe également quelques notations.

Chapitre 2 : Forme normale de Birkhoff

Dans chacune des parties de ce chapitre, les constructions sont faites dans les deux cas suivants : au voisinage d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée et au voisinage d'un fond de puits (minimum non-dégénéré avec une condition de non-résonance)

Dans la partie 2.2, on construit un système de coordonnées de Fermi, c'est-à-dire un système de coordonnées symplectiques locales dans lequel le hamiltonien s'écrit comme une somme d'oscillateurs harmoniques (plus une partie linéaire en la variable transverse à la surface d'énergie dans le cas d'une trajectoire périodique) : c'est la première étape de la réduction à la forme normale de Birkhoff. On y considère également le cas particulier du symbole d'un opérateur de Schrödinger, pour lequel la reconstruction la partie quadratique du potentiel requerra moins de données spectrales que dans le cas général.

La partie 2.3 est l'occasion d'introduire quelques notations et objets qui nous seront utiles tout au long de cette thèse. On y présente ensuite une construction de la forme normale de Birkhoff quantique.

Dans la partie 2.4, on présente une construction purement classique de la forme normale de Birkhoff, puis le lien entre cette dernière et la construction précédente.

Enfin, dans la partie 2.5, on montre l'unicité de la forme normale de Birkhoff classique d'un hamiltonien modulo certaines relations d'équivalence.

Sans être nouvelles, la construction des coordonnées de Fermi dans le cas d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée (inspirée par [Zel97]) et la preuve (directe) de l'unicité de forme normale de Birkhoff sont rarement trouvées dans la littérature.

Chapitre 3 : Formules des traces

Dans ce chapitre, après présentation de quelques notions préliminaires, on donne une interprétation de la formule sommatoire de Poisson comme formule des traces dans deux cas particuliers. On donne ensuite les énoncés de la formule des traces de Gutzwiller avec et sans observable, avant de présenter un calcul explicite de tous les coefficients de ce développement asymptotique dans la limite semiclassique à l'aide de la forme normale de Birkhoff quantique.

Chapitre 4 : Problèmes inverses

Dans le Chapitre 4, on présente d'abord les principaux résultats obtenus pendant cette thèse. Ceux-ci ont fait l'objet d'une prépublication avec Thierry Paul, [HP12], reproduite à l'identique dans le Chapitre 5.

Dans le reste de ce chapitre (partie 4.3), on présente un résultat de V. Guillemin et A. Uribe [GU07], selon lequel le développement de Taylor à tout ordre du potentiel vérifiant une hypothèse de symétrie d'un opérateur de Schrödinger est déterminé par la forme normale de Birkhoff classique de ce dernier. On montre ensuite que ce résultat est optimal, *i.e.* qu'il est impossible de déterminer le potentiel uniquement à partir de la forme normale de Birkhoff classique sans cette hypothèse de symétrie.

Comme annoncé dans l'introduction, on se donne dans [HP12] plus de données spectrales pour déterminer cette fois-ci tout le développement de Taylor du symbole total du hamiltonien dans un système de coordonnées locales, et non plus seulement sa forme normale de Birkhoff quantique, dans les trois cas suivants :

Cas 1. au voisinage d'une trajectoire elliptique non-dégénérée γ.

Cas 2. au voisinage d'un minimum m non-dégénéré (avec une condition de non-résonance).

Cas 3. au voisinage d'un minimum m non-dégénéré (avec une condition de non-résonance) dans le cas particulier où le hamiltonien est un opérateur de Schrödinger.

Dans chacun des trois cas suivants, on a séparé la détermination locale du hamiltonien (résultats C ci-dessous) en deux résultats intermédiaires (résultats A et B).

Résultats A. Dans le cas 1, les premiers coefficients de la formule des traces associée à une famille (finie) d'observables vérifiant des propriétés algébriques au voisinage de γ permettent de reconstruire explicitement un système de coordonnées de Fermi. Dans les cas 2 et3, le système de coordonnées de Fermi est reconstruit à partir du bas du spectre et d'éléments de matrice diagonaux d'une famille (finie) d'observables relativement aux vecteurs propres associés. Ces résultats sont énoncés précisément dans les Théorèmes 5.1.3, 5.1.7 et 5.1.10.

Résultats B. Dans le cas 1, les coefficients de la formule des traces associés à une famille d'observables définie dans un système de coordonnées de Fermi (non nécessairement celui construit en A) permettent de reconstruire explicitement le développement de Taylor du symbole total du hamiltonien exprimé dans ce même système de coordonnées de Fermi. Dans les cas 2 et 3, ce développement de Taylor est reconstruit à partir du bas du spectre et d'éléments de matrice diagonaux relativement aux vecteurs propres associés. Dans le cas 3, la famille d'observables est finie. Ces résultats sont énoncés précisément dans les Théorèmes 5.1.4, 5.1.8 et 5.1.11.

Résultats C. La combinaison des résultats A et B permet d'obtenir le résultat annoncé : le développement de Taylor du symbole total du hamiltonien est déterminé à l'aide des données spectrales ci-dessus. C'est le contenu des Corollaires 5.1.5, 5.1.9 et 5.1.12.

Enfin, on donne des analogues classiques de ces résultats dans la partie 5.4.

Chapitre 5 : Recovering the Hamiltonian from spectral data

Ce chapitre est une reproduction à l'identique de la prépublication [HP12].

Chapitre 1

Rappels et définitions

Dans cette partie, on rappelle brièvement quelques définitions et propriétés nécessaires aux chapitres suivants. On y fixe également quelques notations. Pour plus de détails sur la mécanique classique, on pourra par exemple consulter [AM78, Arn89, MZ05]. En ce qui concerne l'analyse semiclassique, [Rob87, DS99, Mar01], la théorie spectrale [RS75] et pour une introduction aux opérateurs pseudodifférentiels (en théorie homogène) [Hör90, Shu87, AG91]. Finalement, [CdV93, Pau97, VuN06, Lab09] proposent un panorama de ces notions.

1.1 Dynamique d'un système hamiltonien

1.1.1 Mécanique classique

En physique newtonienne, le mouvement d'une particule de l'espace est décrit par le couple de sa position et de son impulsion $(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Son mouvement au cours du temps $t \in \mathbb{R}$ est décrit par l'équation de Hamilton :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}(t) & = & \frac{\partial H}{\partial p}(p(t), q(t)) \\ \dot{p}(t) & = & -\frac{\partial H}{\partial q}(p(t), q(t)) \end{array} \right. \tag{1.1.1}$$

où $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$ est le hamiltonien du système, et $H(q, p)$ est l'énergie de la particule en (q, p). Celle-ci est conservée au cours du temps.

Plus généralement, les champs de vecteurs hamiltoniens sur des variétés symplectiques offrent le cadre naturel d'un tel système, comme on le verra dans la suite (voir Remarque 1.1.15).

1.1.2 Variétés symplectiques

Définition 1.1.1. Une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$ est une variété différentielle munie d'une 2-forme différentielle ω fermée et non-dégénérée, ou 2-*forme symplectique*.

Remarque 1.1.2. La dimension de chaque composante connexe de $\mathcal{M}$ est nécessairement paire, puisqu'une forme bilinéaire alternée est dégénérée en dimension impaire.

Définition 1.1.3. Soient $(\mathcal{M}, \omega)$ et $(\mathcal{M}', \omega')$ deux variétés symplectiques, et $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ un difféomorphisme. Alors on dit φ est un symplectomorphisme si et seulement si $\varphi^*\omega' = \omega$, *i.e.* si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{M},\ \forall (u,v) \in T_x\mathcal{M},\ \omega'_{\varphi(x)}\left(d\varphi_x(u), d\varphi_x(v)\right) = \omega(u,v) \tag{1.1.2}$$

La définition d'un symplectomorphisme est une propriété *globale* : un difféomorphisme est une bijection. Cependant, par le théorème d'inversion locale, une application différentiable φ dont la différentielle est inversible en un point x est un difféomorphisme local : il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x dont l'image est ouverte, et φ restreinte à $\mathcal{U}$ et corestreinte à $\varphi(\mathcal{U})$ est un difféomorphisme. Si de plus φ vérifie la propriété (1.1.2) sur $\mathcal{U}$, on dit que φ est un *symplectomorphisme local.*

Proposition 1.1.4. *Soit $\mathcal{U}$ une variété différentielle. Alors $T^*\mathcal{U}$ est muni canoniquement (*i.e. *indépendamment du choix de cartes locales) d'une 2-forme symplectique ω définie par :*

$$\forall (x,\xi) \in T^*\mathcal{U},\ \forall (u,v) \in T_x(T^*\mathcal{U}) = T_x\mathcal{U} \times (T_x\mathcal{U})^*,\ \omega_{(x,\xi)}(u,v) = \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité.

Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux variétés, on peut associer à tout difféomorphisme $u : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un symplectomorphisme :

Proposition 1.1.5. *L'application ϕ_u définie par :*

$$\phi_u : \begin{array}{ccc} T^*\mathcal{U} & \to & T^*\mathcal{V} \\ (x,\xi) & \mapsto & (u(x), du_x^{*-1}(\xi)) \end{array} \tag{1.1.3}$$

est un symplectomorphisme.

Démonstration de la Proposition 1.1.5. ϕ_u est un difféomorphisme car u en est un. Soient ω^1 et ω^2 les formes symplectiques canoniquement associées à $T^*\mathcal{U}$ et $T^*\mathcal{V}$, et soit $(x,\xi) \in T^*\mathcal{U}$. Soient enfin (f, f^*) et (g, g^*) deux éléments de $T_x\mathcal{U} \times (T_x\mathcal{U})^*$.

$$\begin{aligned}(\phi_u^*\omega^2)_{(x,\xi)}\left((f,f^*),(g,g^*)\right) &= \omega^2_{\phi_u(x,\xi)}\left(d\phi_{u|(x,\xi)}(f,f^*), d\phi_{u|(x,\xi)}(g,g^*)\right) \\ &= \langle du_x^{*-1}(g^*), du_x(f)\rangle - \langle du_x^{*-1}(f^*), du_x(g)\rangle \\ &= \langle g^*, f\rangle - \langle f^*, g\rangle \\ &= \omega^1_{(x,\xi)}\left((f,f^*),(g,g^*)\right)\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Finalement, ϕ_u est bien un symplectomorphisme. □

Proposition 1.1.6. $\mathbb{R}^{2n}$ *est muni d'une structure de variété symplectique par la 2-forme ω définie par :*

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n},\ \omega_{(x,\xi)} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i \tag{1.1.5}$$

Remarque 1.1.7. Comme $\omega_{(x,\xi)}$ ne dépend pas de (x, ξ), on écrit simplement ω pour $\omega_{(x,\xi)}$.

Remarque 1.1.8. L'identification $\mathbb{R}^{2n} \simeq T^*(\mathbb{R}^n)$ est un symplectomorphisme : dans toute cette thèse, on écrit souvent $T^*(\mathbb{R}^n)$ au lieu de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$.

Ces deux exemples (qui n'en forment qu'un dans le cas $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ d'après la remarque précédente) décrivent toute variété symplectique localement. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.9 (Darboux). *Toute variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega^{\mathcal{M}})$ est localement symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$.*

Autrement dit, si $x \in \mathcal{M}$, il existe un symplectomorphisme $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ d'un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ de 0 sur un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de x, tel que $\omega^{\mathcal{M}} = \varphi^* \omega$.

Le système de coordonnées locales définies par φ au voisinage de x est appelé un *système de coordonnées de Darboux centré en x.*

1.1.3 Flot hamiltonien

Soient $(\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

Remarque 1.1.10. Dans cette partie, on pourrait faire des hypothèses de régularité moins fortes. Cependant, dans les chapitres qui suivent (et notamment dans la construction de la forme normale de Birkhoff), ce sont celles que l'on fera. On ne cherche donc pas à exposer les rappels avec des hypothèses minimales.

Définition-proposition 1.1.11. On définit de manière unique un champ de vecteurs par la relation :

$$\forall m \in \mathcal{M},\ \omega_m(\chi_H(m), \cdot) = d_m H \tag{1.1.6}$$

On dit alors que χ_H est le champ de vecteurs hamiltonien associé à H. Dans un système de coordonnées de Darboux (x, ξ) centré en $m \in \mathcal{M}$, on a :

$$\chi_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \tag{1.1.7}$$

Par application du théorème de Cauchy-Lipschitz dans un système de coordonnées locales, on obtient :

Définition-proposition 1.1.12. Soit $m \in \mathcal{M}$. Il existe une unique solution maximale du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Phi}^t(m) = \chi_H\left(\Phi^t(m)\right) \\ \Phi^0(m) = m \end{array} \right. \tag{1.1.8}$$

En notant I_m l'intervalle (ouvert) de définition de $t \mapsto \Phi^t(m)$, alors pour tout $m \in \mathcal{M}$, il existe $\epsilon > 0$ et $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ un voisinage de m, tels que pour tout $m' \in \mathcal{U}$, $]-\epsilon, \epsilon[\subset I_{m'}$.

En notant $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{m\in\mathcal{M}} \{m\} \times I_m \subset \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, on appelle flot hamiltonien engendré par H l'application $\mathcal{V} \ni (m,t) \mapsto \Phi^t(m)$. De plus, $\mathcal{V}$ est ouvert et le flot y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En dérivant le membre de gauche de l'équation suivante, on obtient :

$$\forall t \in I_m,\ H \circ \Phi^t(m) = H(m). \tag{1.1.9}$$

On dit que H est le hamiltonien du système (1.1.8), et on appelle énergie de m (ou de la trajectoire $t \mapsto \Phi^t(m)$) le réel $H(m)$.

On a également, pour $E \in \mathbb{R}$, une condition suffisante de complétude du flot sur la *surface d'énergie* $\Sigma_E = H^{-1}(E)$ (conséquence du théorème de sortie de tout compact, voir par exemple [AM78], chapitre 2) :

Proposition 1.1.13. *Soit $E \in \mathbb{R}$. Si Σ_E est compacte, alors pour tout $m \in \Sigma_E$, $I_m = \mathbb{R}$,* i.e. *l'application $(m,t) \mapsto \Phi^t(m)$ est définie sur tout $\Sigma_E \times \mathbb{R}$.*

Remarque 1.1.14. On écrira parfois $\exp \chi_H$ pour le flot à temps 1 : Φ^1.

Remarque 1.1.15. Dans le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^6$, et en notant $\Phi^t(m) = (q(t), p(t))$, on retrouve le système 1.1.1. L'équation (1.1.9) s'interprète comme la conservation de l'énergie d'une particule libre. Dans le cas où la particule est dans un champ de potentiel V, on retrouve l'énergie mécanique :

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + V(q) \tag{1.1.10}$$

La justification du fait que le cadre naturel pour l'étude de la mécanique classique se trouve ci-dessous.

Soient $(\mathcal{M}_1, \omega_1)$ et $(\mathcal{M}_2, \omega_2)$ deux variétés symplectiques, $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}_2, \mathbb{R})$, Φ le flot hamiltonien engendré par H, $\psi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ un difféomorphisme.

On définit un champ de vecteurs $\psi^*\chi_H$ sur $\mathcal{M}_1$ par la relation :

$$\forall m \in \mathcal{M}_1,\ \psi^*\chi_H(m) = (d\psi_m)^{-1}\chi_H(\psi(m)) \tag{1.1.11}$$

Pour $m \in \mathcal{M}_1$, on notant I_m l'intervalle d'existence de $t \mapsto \Phi^t(\psi(m))$, on pose pour $t \in I_m$: $\Psi^t(m) = \psi^{-1} \circ \Phi^t \circ \psi(m)$. Alors Ψ est définie sur un ouvert de $\mathcal{M}_1 \times \mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}^t(m) &= d_{\Phi^t\circ\psi(m)}(\psi^{-1})\left(\dot{\Phi}^t \circ \psi(z)\right) \\
&= (d_{\psi^{-1}\circ\Phi^t\circ\psi(m)}\psi)^{-1}\left(\chi_H(\Phi^t \circ \psi(z))\right) \\
&= (d_{\Psi^t(m)}\psi)^{-1}\left(\chi_H(\psi \circ \Psi^t(z))\right) \\
&= \psi^*\chi_H(\Psi^t(z))
\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

En toute généralité, le champ de vecteurs $\psi^*\chi_H$ n'est pas nécessairement hamiltonien. Cependant, le théorème suivant nous dit alors que les symplectomorphismes sont exactement les difféomorphismes ψ qui envoient le flot hamiltonien engendré par toute fonction H sur celui engendré par $H \circ \psi$:

Théorème 1.1.16 ([AM78]). *Soient* $(\mathcal{M}_1, \omega_1)$ *et* $(\mathcal{M}_2, \omega_2)$ *deux variétés symplectiques, et* $\psi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *un difféomorphisme. Alors* ψ *est un symplectomorphisme si et seulement si :*

$$\forall H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}_2, \mathbb{R}), \ \psi^* \chi_H = \chi_{H \circ \psi} \tag{1.1.13}$$

Finissons cette partie par une définition :

Définition 1.1.17. On dit qu'un réel E est une valeur régulière de H si $\Sigma_E \neq \emptyset$ et pour tout $m \in \Sigma_E$, m est un point régulier : $dH_m \neq 0$.

Remarque 1.1.18. En particulier, Σ_E est sous-variété de $\mathcal{M}$ de dimension $2n+1$. Physiquement, cela signifie qu'il n'existe pas de point d'équilibre dans la surface d'énergie Σ_E, *i.e.* qu'il n'existe pas de point dans Σ_E invariant par le flot.

1.1.4 Trajectoires périodiques d'un système hamiltonien

Dans cette partie, on commence par introduire la notion d'application de Poincaré, outil essentiel à l'étude des trajectoires au voisinage d'une trajectoire périodique (partie 1.1.4.a), et plus particulièrement celle d'application de premier retour, unique à conjugaison symplectique locale près. Dans la partie 1.1.4.b, on définit les trajectoires périodiques non dégénérées de période T, et on fait le lien entre le flot linéarisé à temps T et l'application de Poincaré linéarisée. Après une étude générale de la réduction des matrices symplectiques (partie 1.1.4.c), on introduit un des objets principaux d'étude dans cette thèse : les trajectoires périodiques elliptiques non-dégénérées (partie 1.1.4.d).

Dans toute cette partie, on adopte les notations suivantes : soient $(\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique de dimension $2n+2$ et $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Soit E une valeur régulière de H. On suppose qu'il existe $\delta E > 0$ tel que $H^{-1}([E - \delta E, E + \delta E])$ est compacte [1] si bien que le flot hamiltonien Φ^t associé à H est défini pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ sur un voisinage de Σ_E.

Soit enfin $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ une trajectoire périodique du système hamiltonien associé à H, de plus petite période (ou période *primitive*) $T > 0$ et d'énergie E.

1.1.4.a Application de Poincaré

Pour cette partie, ainsi que pour la suivante, on s'est inspiré de [AM78, MZ05].

Définition 1.1.19 (Section et application de Poincaré). On appelle *section de Poincaré* Σ une sous-variété symplectique de dimension $2n$ contenue dans Σ_E et partout transverse à χ_H. Si $m \in \gamma$ (on confond γ et $\gamma(\mathbb{R})$), et Σ est une section de Poincaré passant par m, on appelle *application de Poincaré* P_m un difféomorphisme d'un voisinage $U \subset \Sigma$ de m sur son image tel que $P_m(m) = m$ et pour tout $z \in U$, $P_m(z)$ est sur la même trajectoire que z.

1. C'est le cas notamment si $\mathcal{M}$ est compacte ou plus généralement si H est une application propre, *i.e.* l'image réciproque de tout compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathcal{M}$.

Remarquons que si l'on établit l'existence d'une application de Poincaré P définie sur U, alors on a la propriété remarquable suivante, due au caractère autonome de notre système hamiltonien :

Proposition 1.1.20. *Soit $z \in U$, alors z est un point périodique du flot hamiltonien engendré par H si z est un point fixe de P.*

Pour obtenir une équivalence dans la proposition précédente, on s'intéresse alors plus particulièrement aux applications de *premier retour* :

Proposition 1.1.21. *Soient Φ^t le flot hamiltonien à temps $t \in \mathbb{R}$ engendré par H, $m \in \gamma$, et Σ une section de Poincaré passant par m. Alors pour tout $z \in \Sigma$, l'ensemble $\mathcal{T}_z = \{t > 0 \mid \Phi^t(z) \in \Sigma\}$ est discret. On peut donc définir le* temps de premier retour *de z : $\tau(z) = \min \mathcal{T}_z$ ($\tau(z) = +\infty$ si $\mathcal{T}_z = \emptyset$).*

Démonstration de la Proposition 1.1.21. Soit $z \in U$. Σ est transverse à χ_H en z, donc si $t \in \mathcal{T}_z$, il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout $\tau \in]t-\epsilon, t+\epsilon[$, $\Phi^\tau(z) \notin \Sigma$. $\mathcal{T}_z$ est donc bien une partie discrète de $\mathbb{R}$. □

Le théorème suivant (dont la démonstration est donnée plus bas) donne l'existence et l'unicité d'une application de premier retour associée à γ :

Théorème 1.1.22. *Soient $m \in \gamma$ et Φ^t le flot hamiltonien à temps $t \in \mathbb{R}$ engendré par H. Il existe une application de premier retour définie localement autour de m. Plus précisément, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de m, une section de Poincaré $\Sigma \subset \mathcal{V}$ contenant m dans son intérieur, un voisinage $\mathcal{U} \subset \Sigma$ de m et une application lisse $T : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$, telle que $T(m) = T$ et telle que pour tout $z \in \mathcal{U}$, $T(z)$ est le temps de premier retour de z. L'application de premier retour P_m est alors définie sur $\mathcal{U}$ par :*

$$P_m(z) = \Phi^{T(z)}(z).$$

De plus, l'application de premier retour est un symplectomorphisme, unique au sens suivant : un changement de point $m \in \gamma$ ou de section de Poincaré ne change P_m qu'à conjugaison par un symplectomorphisme local près. Lorsque cela ne prête pas à confusion, on le notera P_γ, sans référence au point m ni à une section de Poincaré.

On a aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.23. *Soit P_γ une application de premier retour. Alors sa différentielle, l'*application de premier retour linéarisée*, est un symplectomorphisme linéaire, unique à conjugaison symplectique près. En particulier, son spectre est bien défini (*i.e.* ne dépend pas du choix du point $m \in \gamma$ ni d'une section de Poincaré).*

Remarque 1.1.24 (CONVENTION)**.** Une application de premier retour est une application de Poincaré (au sens de la Définition 1.1.19). Si γ est une trajectoire périodique de période $T > 0$, on note $T^\sharp > 0$ sa période primitive. Il existe $N \geq 1$, tel que $T = NT^\sharp$. On appelle application de Poincaré associée à γ l'application P_γ^N (définie sur un ouvert $\mathcal{U}_N$ – construit comme dans la preuve du Corollaire 1.1.25 – tel que P_γ est définie sur $\mathcal{U}_N$ pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, $P_\gamma^i(\mathcal{U}_N) \subset \mathcal{U}_N$).

Le corollaire suivant, dont la preuve est donnée à la fin de cette partie, donne la réciproque voulue à la Proposition 1.1.20 :

Corollaire 1.1.25. *Soient $m \in \gamma$, Σ une section de Poincaré locale contenant m et $P_m : \mathcal{U} \subset \Sigma \to \Sigma$ une application de premier retour . Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in]0, \frac{T}{2}[$. Alors il existe un ouvert $\mathcal{U}_{N,\epsilon} \subset \Sigma$ contenant m tel que :*

(i) $\mathcal{U}_{N,\epsilon}$ n'intersecte aucune trajectoire périodique de période dans $\mathcal{D}_{N,\epsilon}$, où :

$$\mathcal{D}_{N,\epsilon} =]0, (N+1)T - \epsilon[\setminus \bigcup_{i=1}^{N}]iT - \epsilon, iT + \epsilon[\tag{1.1.14}$$

(ii) $P_m, \dots, P_m^N$ sont bien définies sur $\mathcal{U}_{N,\epsilon}$.

(iii) Pour $i \in [\![1, N]\!]$, $z \in \mathcal{U}_{N,\epsilon}$ est périodique de période dans $]iT - \epsilon, iT + \epsilon[$ si et seulement si z est un point fixe de P_m^i.

Avant de prouver le Théorème 1.1.22, énonçons le théorème suivant :

Théorème 1.1.26 ([MZ05])**.** *Soit $m \in \mathcal{M}$ tel que $dH_m \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de m et un système de coordonnées de Darboux centré en m, $(x, \xi) \in \mathcal{V}$, tel que :*

$$\forall (x, \xi) \in \mathcal{V}, \; H(x, \xi) = H(m) + \xi_1 \tag{1.1.15}$$

Remarque 1.1.27. Le Théorème 1.1.26 fournit un premier exemple de forme normale. Au voisinage d'un point régulier, il existe un unique hamiltonien à symplectomorphisme local près. Ce ne sera plus le cas au voisinage d'un point critique (partie 2.2.1) ni au voisinage d'une trajectoire périodique d'énergie régulière (partie 2.2.3).

Démonstration du Théorème 1.1.26. Quitte à faire un changement de variable linéaire symplectique sur un système de coordonnées de Darboux, on peut supposer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de m et un système de coordonnées de Darboux centré en m : $(x, \xi) \in \mathcal{V}$ tel que :

$$H(x, \xi) = H(m) + \xi_1 + O(||(x, \xi)||^2) \tag{1.1.16}$$

$\mathcal{V}$ est un ouvert contenant m, donc il existe ϵ tel que $\mathcal{V}$ contient le pavé ouvert $\mathcal{V}_\epsilon =] - \epsilon, \epsilon[^{2n}$ [2]. Dans toute la suite, on remplace $\mathcal{V}$ par ce pavé $\mathcal{V}_\epsilon$. $\frac{\partial H}{\xi_1}(0, 0) = 1$, donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction f définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \cap \{x_1 = 0\}$ contenant $m = (0, 0)$ telle que $f(\mathcal{U}) \subset] - \epsilon, \epsilon[$ et :

$$H(0, x', f(x', \xi), \xi') = \xi_1 \tag{1.1.17}$$

où l'on a noté, comme dans toute la suite, $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$.

2. Il s'agit ici d'un abus de notation : les coordonnées de Darboux sont définies via un symplectomorphisme ψ d'un voisinage $\mathcal{W}$ de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ (muni de sa structure symplectique standard) sur $\mathcal{V}$. Cette inclusion s'exprime en réalité dans les coordonnées de Darboux : $] - \epsilon, \epsilon[^{2n} \subset \mathcal{W}$.

Quitte à restreindre $\mathcal{V}$ à nouveau, on peut supposer (toujours avec le même abus de notation) que $\mathcal{V} =]-\epsilon, \epsilon[\times \mathcal{U}$ et on définit un difféomorphisme local φ par la relation :

$$\forall (x,\xi) \in \mathcal{V},\ \varphi(x,\xi) = \Phi^{x_1}(0, x', f(x',\xi), \xi') \tag{1.1.18}$$

On a pour tout $(x,\xi) \in \mathcal{V}$ et pour tous $(u,v) \in T_{(x,\xi)}\mathcal{V}$:

$$d\varphi_{(x,\xi)}(u,v) = u_1 \chi_H(\varphi(x,\xi)) + d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u', df_{(x',\xi)}(u',v), v') \tag{1.1.19}$$

D'après (1.1.17) et parce que le flot conserve l'énergie :

$$\begin{aligned}
&\omega_{\varphi(x,\xi)}(\chi_H(\varphi(x,\xi)), d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u', df_{(x',\xi)}(u',v), v')) \\
&= dH_{\varphi(x,\xi)}(d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u', df_{(x',\xi)}(u',v), v')) \\
&= dH_{\varphi(0,x',\xi)}((0, u', df_{(x',\xi)}(u',v), v')) \\
&= v_1
\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Comme Φ^{x_1} est un symplectomorphisme, on a pour tous $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in T_{(x,\xi)}\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
&\omega_{\varphi(x,\xi)}(d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u'_1, df_{(x',\xi)}(u'_1,v_1), v'_1), d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u'_2, df_{(x',\xi)}(u'_2,v_2), v'_2)) \\
&= \omega_{\varphi(0,x',\xi)}((0, u'_1, df_{(x',\xi)}(u'_1,v_1), v'_1), (0, u'_2, df_{(x',\xi)}(u'_2,v_2), v'_2)) \\
&= \omega_{\varphi(0,x',\xi)}((0, u'_1, 0, v'_1), (0, u'_2, 0, v'_2)) \\
&= \sum_{j=2}^{n} u_{1j}v_{2j} - u_{2j}v_{1j}
\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

En regroupant (1.1.20) et (1.1.21) :

$$\begin{aligned}
&\varphi^*\omega_{(x,\xi)}((u_1,v_1),(u_2,v_2)) \\
=&\omega_{\varphi(x,\xi)}(d\varphi_{(x,\xi)}(u_1,v_1), d\varphi_{(x,\xi)}(u_2,v_2)) \\
=&\omega_{\varphi(x,\xi)}(u_{11}\chi_H(\varphi(x,\xi)), d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u'_2, df_{(x',\xi)}(u'_2,v_2), v'_2)) \\
+&\omega_{\varphi(x,\xi)}(u_{11}\chi_H(\varphi(x,\xi)), d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u'_2, df_{(x',\xi)}(u'_2,v_2), v'_2)) \\
+&\omega_{\varphi(x,\xi)}(d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u'_1, df_{(x',\xi)}(u'_1,v_1), v'_1), d\Phi^{x_1}_{\varphi(0,x',\xi)}(0, u'_2, df_{(x',\xi)}(u'_2,v_2), v'_2)) \\
=&\sum_{j=1}^{n} u_{1j}v_{2j} - u_{2j}v_{1j} \\
=&\omega_{(x,\xi)}((u_1,v_1),(u_2,v_2))
\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Finalement, φ est un symplectomorphisme et :

$$\forall (x,\xi) \in \mathcal{V},\ H \circ \varphi(x,\xi) = H(0, x', f(x',\xi), \xi') = \xi_1 \tag{1.1.23}$$

□

Démonstration du Théorème 1.1.22. E est une valeur régulière de H, donc $dH_m \neq 0$. D'après le Théorème 1.1.26, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de m et un système de coordonnées de Darboux centré en m, $(x, \xi) \in \mathcal{V}$, tel que :

$$\forall (x,\xi) \in \mathcal{V},\ H(x,\xi) = E + \xi_1 \tag{1.1.24}$$

$\mathcal{V}$ est un ouvert contenant m, donc il existe ϵ tel que $\mathcal{V}$ contient le pavé ouvert $\mathcal{V}_\epsilon =]-\epsilon, \epsilon[^{2n}$ [3]. Dans toute la suite, on remplace $\mathcal{V}$ par ce pavé $\mathcal{V}_\epsilon$.

La sous-variété définie sur $\mathcal{V}$ par $\Sigma = \{x_1 = \xi_1 = 0\} \subset \Sigma_E$ est partout transverse au champ de vecteurs χ_H et $\chi_H = \frac{\partial}{\partial x_1}$ sur $\mathcal{V}$. Soit $i : \Sigma \hookrightarrow \mathcal{M}$ l'injection canonique. Alors $d\omega_{|\Sigma} = d(i^*\omega) = i^*(d\omega) = 0$, donc $\omega_{|\Sigma}$ est bien fermée. De plus, soient $z \in \Sigma$ et $u \in T_z\Sigma$. ω_z est non-dégénérée donc il existe $v \in T_z\mathcal{M}$ tel que : $\omega_z(u,v) \neq 0$. Or $T_z\Sigma \cap T_z\Sigma^\perp = \{0\}$, donc $T_z\Sigma \oplus T_z\Sigma^\perp = T_z\mathcal{M}$. Soit alors $(v_1, v_2) \in T_z\Sigma \times T_z\Sigma^\perp$ tel que : $v = v_1 + v_2$. On a $\omega_z(u, v_1) = \omega_z(u,v) \neq 0$. Finalement, $\omega_{|\Sigma}$ est bien non-dégénérée, et Σ est donc une sous-variété symplectique de $\mathcal{M}$, de dimension $2n$ et partout transverse à χ_H : c'est une section de Poincaré.

Φ^T est continu, donc $\widetilde{\mathcal{V}} = (\Phi^T)^{-1}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{V}$ est un voisinage de m tel que $\Phi^T(\widetilde{\mathcal{V}}) \subset \mathcal{V}$. Soient alors $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{V}} \cap \Sigma$ et $z \in \mathcal{U}$. $\Phi^T(z) \in \mathcal{V} \cap \Sigma_E$, donc s'écrit $(x, 0, \xi')$. Par conséquent, pour tout $t \in [-|x_1|, |x_1|] \subset]-\epsilon, \epsilon[$, $\Phi^{t+T}(z)$ reste dans $\mathcal{V}$ et s'écrit $(x_1 + t, x', 0, \xi')$.

Soit maintenant φ l'application définie sur $\mathcal{V}$ par : $\varphi(x,\xi) = x_1$, et T l'application définie sur $\mathcal{U}$ par : $T(z) = -x_1 = -\varphi(\Phi^T(z))$. $T : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est lisse car φ et Φ^T le sont, et pour tout $z \in \mathcal{U}$, $\Phi^{T(z)}(z) \in \Sigma$. De plus, $\Phi^T(m) = m$ donc $T(m) = T$.

L'ensemble des temps de retour de m est discret d'après la Proposition 1.1.21, donc quitte à resteindre $\mathcal{U}$, on peut supposer que $T(m)$ est le temps de premier retour de m. Comme $\chi_H = \frac{\partial}{\partial x_1}$ sur $\mathcal{V}$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{U},\ \tau(z) \neq T(z) \Rightarrow \tau(z) \leq T(z) - \epsilon. \tag{1.1.25}$$

où ϵ a été choisi au début de la présente preuve. Supposons qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ telle que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tau(z_n) \neq T(z_n)$. Alors quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\tau(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\tau \geq 0$, et $\tau = \lim\limits_{n\to+\infty} \tau(z_n) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} T(z_n) - \epsilon = T - \epsilon$. Par continuité du flot, on obtient : $\Phi^{\tau(z_n)}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi^\tau(m)$, et donc $\tau(m) = T < \tau$, ce qui est absurde. Finalement, quitte à restreindre $\mathcal{U}$ à nouveau, $T(z)$ est bien le temps de premier retour de z.

On définit donc $P : \mathcal{U} \ni z \mapsto \Phi^{T(z)}(z)$. P est différentiable, et pour tout $z \in \mathcal{U}$:

$$\forall h \in T_z\mathcal{U},\ dP_z(h) = dT_z(h)\chi_H(P(z)) + d\Phi^{T(z)}(h) \tag{1.1.26}$$

Or, pour tout $h \in T_z\mathcal{U}$:

$$\omega_{P(z)}(\chi_H(P(z)), d\Phi^{T(z)}(h)) = dH_{P(z)}(d\Phi^{T(z)}(h)) = dH_{P(z)}(h) = 0 \tag{1.1.27}$$

3. Il s'agit ici du même abus de notation que celui évoqué dans la note 2 : cette inclusion s'exprime en réalité dans $\mathbb{R}^{2n}$ via le symplectomorphisme qui définit les coordonnées de Darboux.

car $T_z\mathcal{U} \subset T_z\Sigma_E$. Donc, pour tout $(h_1, h_2) \in T_z\mathcal{U}^2$, on a :

$$\begin{aligned}(P^*\omega)_z(h_1, h_2) &= \omega_{P(z)}(dP_z(h_1), dP_z(h_2)) \\ &= \omega_{P(z)}(d\Phi^{T(z)}(h_1), d\Phi^{T(z)}(h_2)) \\ &= \omega_z(h_1, h_2)\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

Ainsi, P est un symplectomorphisme local donc quitte à restreindre $\mathcal{U}$ et à corestreindre P à $P(\mathcal{U})$, c'est un symplectomorphisme fixant m : c'est bien une application de Poincaré.

On prouve l'unicité à conjugaison par un symplectomorphisme local près en deux étapes : on traite d'abord le cas où les applications de Poincaré P_1 et P_2 sont définies sur deux sections de Poincaré différentes mais intersectant γ en un même point, puis on fait varier ce dernier point. Dans le premier cas, quitte à restreindre les sections de Poincaré locales $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathcal{V}$ associées à P_1 et P_2, on peut supposer qu'elles intersectent exactement les mêmes trajectoires du flot (et que $\chi_H = \frac{\partial}{\partial x_1}$) : dans un voisinage $\mathcal{U}_1 \subset \Sigma_1$, on peut définir une unique application différentiable telle que $t(m) = 0$ et, pour tout $z \in \mathcal{U}_1$, $\Phi^{t(z)}(z) \in \Sigma_2$. L'application définie sur $\mathcal{U}_1$ par $\chi(z) = \Phi^{t(z)}(z)$ est bien un symplectomorphisme local et $P_2 \circ \chi = \chi \circ P_1$. Si maintenant P_1 et P_2 sont définies au voisinage de deux points $m_1 \neq m_2 \in \gamma$, on se ramène au cas précédent en envoyant au préalable m_1 sur m_2 par le flot. $\square$

Démonstration du Corollaire 1.1.25. Soit $T : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ l'application de premier retour définie par le Théorème 1.1.22. T est continue et $T(m) = T$, donc il existe un ouvert $\mathcal{U}^1_{N,\epsilon} \subset \mathcal{U}$ contenant m tel que $T\left(\mathcal{U}^1_{N,\epsilon}\right) \subset]T - \frac{\epsilon}{N+1}, T + \frac{\epsilon}{N+1}[$. On construit alors une suite décroissante d'ouverts de $\mathcal{U}$ contenant m de la manière suivante :

$$\forall i \in [\![1, N]\!],\ \mathcal{U}^{i+1}_{N,\epsilon} = \mathcal{U}^i_{N,\epsilon} \cap P_m^{-1}\left(\mathcal{U}^i_{N,\epsilon} \cap P_m(\mathcal{U}^i_{N,\epsilon})\right) \tag{1.1.29}$$

On a, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $P_m(\mathcal{U}^{i+1}_{N,\epsilon}) \subset \mathcal{U}^i_{N,\epsilon} \subset \mathcal{U}$. Donc par récurrence, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, P_m^i est bien défini sur $\mathcal{U}^{i+1}_{N,\epsilon}$ et $P_m^i(\mathcal{U}^{i+1}_{N,\epsilon}) \subset \mathcal{U}^1_{N,\epsilon}$. On pose finalement $\mathcal{U}_{N,\epsilon} = \mathcal{U}^{N+1}_{N,\epsilon}$. Comme la famille $(\mathcal{U}^i_{N,\epsilon})_{i \in [\![1, N+1]\!]}$ est décroissante, les N premières itérées de P_m sont bien définies sur $\mathcal{U}_{N,\epsilon}$: le point (ii) est vérifié.

Pour $z \in \mathcal{U}_{N,\epsilon}$, notons $\tau_i(z)$ le i-ème temps de retour de z (cela a bien un sens car l'ensemble des temps de retour est discret d'après la Proposition 1.1.21). Alors pour $i \in [\![1, N+1]\!]$, on a : $\tau_i(z) = \sum\limits_{j=0}^{i-1} T(P_m^j(z))$. Nécessairement, si z engendre une trajectoire périodique, sa période est un temps de retour. Or, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$: $P_m^i(\mathcal{U}_{N,\epsilon}) \subset \mathcal{U}^1_{N,\epsilon}$. Donc pour $i \in [\![1, N+1]\!]$, $\tau_i(z) \in]iT - \epsilon, iT + \epsilon[$. Le point (i) est aussitôt vérifié. Enfin, les intervalles $]iT - \epsilon, iT + \epsilon[$, $i \in [\![1, N+1[\![$ sont deux à deux disjoints, donc $z \in \mathcal{U}_{N,\epsilon}$ est périodique de période dans un certain $]iT - \epsilon, iT + \epsilon[$ avec $i \in [\![1, N]\!]$ si seulement si sa période est son i-ème temps de retour, *i.e.* si seulement si c'est un point fixe de P_m^i : le point (iii) est donc vérifié, et le corollaire prouvé. $\square$

1.1.4.b Trajectoires périodiques non-dégénérées

Introduisons la notion de trajectoire périodique non-dégénérée :

Définition 1.1.28. On dit que γ est non-dégénérée si et seulement si :

$$dP_\gamma \text{ n'a pas 1 comme valeur propre.} \tag{1.1.30}$$

Remarque 1.1.29. Cette définition ne pose pas de problème d'ambiguïté par le Corollaire 1.1.23 :

On définit également la notion de cylindre d'orbites :

Définition 1.1.30. On dit qu'un plongement $\Gamma : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathcal{M}$ (où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) est un cylindre d'orbites de χ_H si pour $e \in I$, $\gamma_e = \Gamma(\mathbb{S}^1 \times \{e\})$ est une trajectoire périodique du flot engendré par χ_H, de plus petite période $T(e)$, où T est une fonction lisse de e. On dit que ce cylindre d'orbites est *régulier* si pour tout $e \in I$, $H(\gamma_e) = e$, et si $H \circ \Gamma$ n'a aucun point critique.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.1.31 ([AM78]). *Une trajectoire périodique non-dégénérée γ du flot hamiltonien associé à H est incluse dans l'image $\mathcal{C}$ d'un cylindre régulier d'orbites. De plus, $\mathcal{C}$ est une sous-variété symplectique de dimension 2, et est unique localement au voisinage de γ.*

Démonstration. Soit $m \in \gamma$. E est une valeur régulière de H, donc $dH_m \neq 0$. D'après, le Théorème 1.1.26, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de m et un système de coordonnées de Darboux centré en m : $(x, \xi) \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\forall (x, \xi) \in \mathcal{V},\ H(x, \xi) = E + \xi_1 \tag{1.1.31}$$

Soit Θ la sous-variété de dimension $2n + 1$ définie par $\Theta = \mathcal{V} \cap \{x_1 = 0\}$. Θ est partout transverse à χ_H et, exactement comme dans la démonstration du Théorème 1.1.22, il existe une application lisse définie sur un ouvert $\mathcal{W}$ de Θ contenant m telle que $\Phi^{T(z)}(z) \in \Theta$ pour tout $z \in \mathcal{W}$. De plus, $\Sigma = \Theta \cap \Sigma_E$ est une section de Poincaré locale, T coïncide bien avec l'application définie précédemment sur $\mathcal{W} \cap \Sigma_E$ et $P_m : \mathcal{W} \cap \Sigma_E \ni z \mapsto \Phi^{T(z)}(z) \in \Sigma$ est une application de premier retour (quitte à restreindre $\mathcal{W}$, comme on l'a déjà vu dans la démonstration du Théorème 1.1.22).

Or $dP_m - \mathrm{Id}_{T_m(\mathcal{W} \cap \Sigma_E)}$ est inversible car γ est non-dégénérée. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut choisir des fonctions $f_2, \ldots, f_{n+1}, g_2, \ldots, g_{n+1}$ définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0, telles que pour $\xi_1 \in I$, le $2n$-uplet $(0, f_2(\xi_1), \ldots, f_{n+1}(\xi_1), \xi_1, g_2(\xi_1), \ldots, g_{n+1}(\xi_1))$ est bien dans l'ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ sur lesquels sont définies les coordonnées de Darboux, et telles que le point $z(\xi_1) \in \mathcal{V}$ paramétré par $(0, f_2(\xi_1), \ldots, f_{n+1}(\xi_1), \xi_1, g_2(\xi_1), \ldots, g_{n+1}(\xi_1))$ engendre une trajectoire périodique de période $T(z(\xi_1))$. On a alors d'après (1.1.31) : pour tout $\xi_1 \in I$, $H(z(\xi_1)) = E + \xi_1$.

Posons $\widetilde{I} = E + I$, $\widetilde{z} = z(\cdot - E)$, et $\Gamma : \mathbb{S}^1 \times \widetilde{I} \ni (t, \xi) \mapsto \Phi^{\frac{t}{T}T(\widetilde{z}(\xi))}(\widetilde{z}(\xi))$ (on fait ici l'identification $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$). Γ est injective car pour $(t, \xi) \in \mathbb{S}^1 \times \widetilde{I}$, $H \circ \Gamma(t, \xi) = H(\widetilde{z}(\xi)) = \xi$ et $T(\widetilde{z}(\xi))$ est la plus petite période de $\widetilde{z}(\xi)$. De plus, Γ est différentiable et pour tout $(t, \xi) \in \mathbb{S}^1 \times \widetilde{I}$, pour tout $(h, v) \in T_{(t,\xi)}(\mathbb{S}^1 \times \widetilde{I})$, on a :

$$T d\Gamma_{(t,\xi)}(h, v) = (hT(\widetilde{z}(\xi)) + tv(T \circ \widetilde{z})'(\xi))\, \chi_H(\Gamma(t, \xi)) + vT d\Phi^{\frac{t}{T}T(\widetilde{z}(\xi))}(\widetilde{z}'(\xi))$$

χ_H est en tout point transverse à Θ, donc Γ est un plongement et $\omega_{|\Gamma(\mathbb{S}^1 \times \widetilde{I})}$ est fermée et non-dégénérée : $\mathcal{C} = \Gamma(\mathbb{S}^1 \times \widetilde{I})$ est une sous-variété symplectique de $\mathcal{M}$ contenant γ. De plus, comme γ est compacte et E est une valeur régulière, on peut supposer que $H \circ \Gamma$ n'a aucun point critique (quitte à restreindre $\widetilde{I}$). Enfin pour tout $e \in \widetilde{I}$, $\gamma_e = \Gamma(\mathbb{S}^1 \times \{e\})$ est la trajectoire périodique engendrée par $z(e - E)$, d'énergie e. Γ est donc un cylindre régulier d'orbite.

L'unicité locale de $\mathcal{C}$ au voisinage de γ est donnée par l'unicité locale des fonctions $f_2, g_2, \ldots, f_{n+1}, g_{n+1}$ au voisinage de 0 construite à l'aide du théorème des fonctions implicites. □

Remarque 1.1.32. Γ –coresteint à son image dans $(\mathcal{M}, \omega)$– n'est pas un symplectomorphisme a priori. En revanche, si l'on note $\mathcal{T} : I \to \mathbb{R}$ la primitive de $\frac{1}{T}T \circ z$ qui s'annule en 0, alors $\mathcal{T}(0) = 0$ et $\mathcal{T}'(0) = 1$. Soit alors g l'inverse local de $\mathcal{T}$ au voisinage de 0. On a : $g'.\frac{1}{T}T \circ g = 1$ et $g'(0) = 1$. En remplaçant z par $z \circ g$ dans la définition de Γ, Γ est un symplectomorphisme. En revanche, on n'a plus $H \circ \Gamma(t, \xi) = \xi$ mais $H \circ \Gamma(t, \xi) = E + g(\xi - E) = \xi + O((\xi - E)^2)$.

On aurait également pu retrouver ce résultat à l'aide du théorème du voisinage tubulaire de Weinstein [Wei71, Wei77] car γ est une sous-variété lagrangienne de $\Gamma(\mathbb{S}^1 \times \widetilde{I})$.

On a finalement la proposition suivante :

Proposition 1.1.33. *Soient γ une trajectoire périodique non-dégénérée, $\mathcal{C}$ le cylindre d'orbites régulier contenant γ, et $m \in \gamma$. Alors dans une base symplectique adaptée à la décomposition $T_m\mathcal{M} = T_m\mathcal{C} \oplus T_m\mathcal{C}^\perp$, et si P_m est une application de premier retour définie sur une section de Poincaré tangente à $T_m\mathcal{C}^\perp$ en m, on a :*

$$d\Phi^T_m = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -(T \circ z)'(0) & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline & & \\ & 0 & (dP_m) \\ & & \end{array}\right) \tag{1.1.32}$$

où (dP_m) est la matrice dans la base de $T_m\mathcal{C}^\perp$ choisie ci-dessus.

Démonstration. On a pour $t \in \mathbb{R}$: $\Phi^T \circ \Phi^t(m) = \Phi^{T+t}(m)$, et, avec les notations de la démonstration du Théorème 1.1.31, on a pour tout $\xi \in I$: $\Phi^{T(z(\xi))}(z(\xi)) = z(\xi)$. En dérivant ces relations par rapport à t et ξ respectivement en 0, on obtient :

$$d\Phi^T_m(\chi_H(m)) = \chi_H(\Phi^T(m)) = \chi_H(m) \tag{1.1.33}$$

$$d\Phi_m^T(z'(0)) = z'(0) - (T\circ z)'(0)\chi_H(m) \tag{1.1.34}$$

De la définition de la fonction z, on déduit que $(\chi_H(m), z'(0))$ est une base symplectique de $T_m\mathcal{C}$. Or $T_m\mathcal{C}$ est stable par le symplectomorphisme $d\Phi_m^T$ donc $T_m\mathcal{C}^\perp$ l'est également. De plus, $T_m\mathcal{C}^\perp$ est inclus dans le noyau de dH_m et ne contient pas $\chi_H(m)$, donc on peut bien choisir une section de Poincaré locale tangente à $T_m\mathcal{C}^\perp$ en m. Finalement, la matrice de $d\Phi_m^T$ dans une base adaptée à la décomposition $T_m\mathcal{M} = T_m\mathcal{C}\oplus T_m\mathcal{C}^\perp$ a bien la forme annoncée dans la Proposition 1.1.33. □

1.1.4.c Matrices symplectiques et réduction

Pour plus de détails sur cette partie, on pourra consulter par exemple [AD10]. On rappelle d'abord les notations :

Définition 1.1.34. On note $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ le groupe des matrices symplectiques de taille $2n$, *i.e.* l'ensemble des matrices M telles que :

$${}^tMJ_nM = J_n \tag{1.1.35}$$

où J_n est la matrice par blocs :

$$J_n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) \tag{1.1.36}$$

Proposition 1.1.35. *Le polynôme caractéristique π_M d'une matrice symplectique $M\in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ est* réciproque *réel,* i.e. *il satisfait l'équation :*

$$\pi_M(X) = X^{2n}\pi_M\left(\frac{1}{X}\right) \tag{1.1.37}$$

M est inversible, et si $\lambda\in\mathbb{C}^*$ est un valeur propre de M, alors $\overline{\lambda}$ et λ^{-1} sont des valeurs propres de M, de même multiplicité algébrique.

Démonstration de la Proposition 1.1.35. Il suffit d'utiliser la relation :

$${}^tMJ_nM = J_n \tag{1.1.38}$$

et les égalités : $\det(M) = \det(J_n) = 1$ pour en déduire :

$$\begin{aligned}\pi_M(X) &= \det(M - XI_{2n}) \\ &= \det(J_n - X\,{}^tMJ_n) \\ &= \det(I_{2n} - X\,{}^tM) \\ &= X^{2n}\pi_M\left(\frac{1}{X}\right)\end{aligned} \tag{1.1.39}$$

Donc si $\lambda\in\mathbb{C}^*$ est une valeur propre de M, λ^{-1} est une valeur propre de même multiplicité algébrique car π_M est réciproque, $\overline{\lambda}$ de même car π_M est réel. □

Soit maintenant $M \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ n'ayant que des valeurs propres simples. Dans ce cas, 1 et -1 ne sont pas valeurs propres (ce qui sera justifié a posteriori), et on distingue trois types de valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$:

Cas 1. $\lambda \in \mathbb{R}$: dans ce cas, $P_\lambda := E_\lambda \oplus E_{\lambda^{-1}}$ est un plan stable par M.

Cas 2. $\exists \theta \in \mathbb{R},\ \lambda = e^{i\theta}$. Dans ce cas, $Q_\theta := \mathrm{Ker}(M^2 - 2\cos\theta M + I_{2n})$ est un plan stable par M.

Cas 3. $\exists(\rho, \theta) \in (\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}),\ \lambda = \rho e^{i\theta}$. Dans ce cas, les deux plans : $P_{\rho,\theta} := \mathrm{Ker}(M^2 - 2\rho\cos\theta M + \rho^2 I_{2n})$ et $P_{\rho^{-1},\theta} := \mathrm{Ker}(\rho^2 M^2 - 2\rho\cos\theta M + I_{2n})$ sont stables par M, mais sont tous deux isotropes (la restriction de la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n}$ à chacun de ces deux plans est nulle). On considère alors l'espace de dimension 4, $F_{\rho,\theta} = P_{\rho,\theta} \oplus P_{\rho^{-1},\theta}$.

De plus, les espaces P_λ, Q_θ, $F_{\rho,\theta}$ associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe et leur somme est égale à $\mathbb{R}^{2n}$. En effet, puisque M est de déterminant 1, -1 ne peut être une valeur propre simple, et 1 ne peut pas être une valeur propre simple non plus car la dimension de la somme précédente est paire. De plus, ils sont deux à deux symplectiquement orthogonaux.

On en déduit que :

- Dans le cas 1, on peut construire une base symplectique de P_λ dans laquelle la restriction à M à P_λ est donnée par le bloc dit *hyperbolique* :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.1.40}$$
- Dans le cas 2, on peut construire une base symplectique de Q_θ dans laquelle la restriction à M à Q_θ est donnée par le bloc dit *elliptique* :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.1.41}$$
- Dans le cas 3, on peut construire une base symplectique de $F_{\rho,\theta}$ dans laquelle la restriction à M à $F_{\rho,\theta}$ est donnée par le bloc dit *focus-focus* ou *loxodromique* :
$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{1}{\rho}\cos\theta & \frac{1}{\rho}\sin\theta \\ -\frac{1}{\rho}\sin\theta & \frac{1}{\rho}\cos\theta \end{matrix} \end{array}\right) \tag{1.1.42}$$

Finalement, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.36. *Soit $M \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ n'ayant que des valeurs propres simples. Alors, il existe une matrice $S \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $S^{-1}MS$ est diagonale par blocs de type hyperbolique, elliptique, ou loxodromique.*

1.1.4.d Trajectoires périodiques elliptiques non-dégénérées

Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude des trajectoires *périodiques elliptiques non-dégénérées* :

Définition 1.1.37. Une trajectoire périodique γ est dite elliptique non-dégénérée si l'application linéarisée de Poincaré dP_γ n'a que des valeurs propres simples de module 1, notées $(e^{\pm i\theta_j})_{j\in[\![1,n]\!]}$, et si les réels (appelés *angles de Poincaré*) $\theta_1,\dots,\theta_n$ et 2π sont rationnellement indépendants (*i.e.* indépendants sur le corps $\mathbb{Q}$).

Remarque 1.1.38. La définition 1.1.37 ne pose pas de problème d'ambiguïté. En effet, le spectre de dP_m ne dépend ni du choix de m ni du choix d'une section de Poincaré comme on l'a remarqué au début de la section 1.1.4.a. Par ailleurs, les angles de Poincaré sont définis modulo 2π mais la condition d'indépendance rationnelle ne dépend pas du choix d'un représentant modulo 2π.

Remarque 1.1.39. Si γ est trajectoire périodique elliptique non-dégénérée, alors γ est en particulier non-dégénérée (au sens de la définition 1.1.28), ainsi que toutes ses itérées (la N-ième itérée de γ étant non-dégénérée si dP_γ^N n'admet pas 1 pour valeur propre).

On déduit de la Proposition 1.1.36 le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 1.1.40. *Soit γ une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée d'angles de Poincaré $\theta_1,\dots,\theta_n$. Alors il existe une base symplectique dans laquelle la matrice (dP_γ) est diagonale par blocs de taille 2, et plus précisément ces blocs sont les rotations d'angles $\theta_1,\dots,\theta_n$.*

On a également la proposition suivante, qui nous sera très utile dans l'étude des problèmes inverses faisant intervenir la formule des traces :

Proposition 1.1.41. *Soit γ une trajectoire périodique non-dégénérée de période T (non nécessairement primitive). Il existe un voisinage $V_\gamma \subset \Sigma_E$ de γ et un voisinage $V_T \subset \mathbb{R}$ de T tels qu'aucune trajectoire entrant dans V_γ n'est périodique de période dans V_T.*

En d'autres termes, γ est ***isolée*** *dans l'ensemble des trajectoires périodiques d'énergie E et de période proche de T : $\gamma \times \{T\}$ est un ouvert de $\mathcal{P} = \{(z,T) \in \Sigma_E \times \mathbb{R} \mid \Phi^T(z) = z\}$.*

Démonstration. Soit T_0 la période primitive de γ. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $T = NT_0$ et dP_γ^N n'admet pas 1 comme valeur propre. Soit $m \in \gamma$. D'après le Théorème 1.1.26, il existe un système de coordonnées de Darboux centré en m et défini sur un ouvert [4] $\mathcal{V} \simeq]-\epsilon,\epsilon[^{2n}$ (avec $0 < \epsilon < \frac{T_0}{2}$) tel que pour tout $(x,\xi) \in \mathcal{V}$, $H(x,\xi) = E + \xi_1$.

4. On fait toujours la même identification que celle mentionnée dans la note 2 : $\mathcal{V}$ est identifié à un voisinage de 0 dans $T^*(\mathbb{R}^n)$ via le symplectomorphisme définissant les coordonnées de Darboux, ici noté $\simeq$.

Soient Σ la section de Poincaré contenant m définie sur $\mathcal{V}$ par $\{x_1 = \xi_1 = 0\}$ et $P_m : \mathcal{U} \subset \Sigma \to \Sigma$ une application de premier retour . D'après le Corollaire 1.1.25, il existe un ouvert $\mathcal{U}_{N,\epsilon} \subset \Sigma$ tel que P_m^N est bien défini sur $\mathcal{U}_{N,\epsilon}$ et $z \in \mathcal{U}_{N,\epsilon}$ est périodique de période dans $]T-\epsilon, T+\epsilon[$ si et seulement si c'est un point fixe de P_m^N. Or dP_m^N n'admet pas 1 comme valeur propre, donc il existe $\mathcal{U}'_{N,\epsilon}$ tel que P_m^N n'admet pas de point fixe dans $\mathcal{U}'_{N,\epsilon}$.

Il ne reste plus qu'à construire un voisinage V_γ de γ tel que toute trajectoire entrant dans V_γ intersecte $\mathcal{U}'_{N,\epsilon}$. On aura prouvé la Proposition 1.1.41 en choisissant $V_T =]T-\epsilon, T+\epsilon[$. On aura alors $\gamma \times \{T\} = \mathcal{P} \cap (V_\gamma \times V_T)$ et $\gamma \times \{T\}$ sera bien un ouvert de $\mathcal{P}$.

Par construction de $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}_\epsilon = \bigcup_{|t|<\epsilon} \Phi^t(\mathcal{U}'_{N,\epsilon}) \simeq]-\epsilon, \epsilon[\times \mathcal{U}'_{N,\epsilon}$ est un ouvert de Σ_E contenant m. On définit alors $V_\gamma = \bigcup_{-\epsilon<t<T+\epsilon} \Phi^t(\mathcal{U}'_{N,\epsilon})$. Soit maintenant $m' \in \gamma$. Il existe $t \in [0, T[$ tel que $m' = \Phi^t(m)$. Or, la restriction de Φ^t à Σ_E est un homéomorphisme sur Σ_E, donc $\Phi^t(\mathcal{W}_\epsilon) \subset V_\gamma$ est un ouvert de Σ_E contenant m'. Finalement, V_γ est bien un voisinage de γ et, clairement, toute trajectoire entrant dans V_γ intersecte $\mathcal{U}'_{N,\epsilon}$ □

1.2 Analyse semiclassique

1.2.1 Mécanique quantique

La mécanique quantique apparaît en 1925-26 sous deux formes équivalentes : la formulation de M. Born, W. Heisenberg et P. Jordan [Hei25, BJ25, BHJ26] ("matrix mechanics", où les observables évoluent) et celle de Schrödinger [Sch28] ("wave mechanics", où ce sont les fonctions d'onde qui évoluent). En 1932, J. von Neumann [vN55] donne la définition abstraite des espaces de Hilbert et montre que les deux formulations sont équivalentes.

Un système physique est décrit par un vecteur (état) appartenant à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Plus précisément, les états sont plutôt les vecteurs de $\mathcal{H}$ de norme 1, avec la convention que deux vecteurs définissent le même état s'ils sont proportionnels.

Exemple 1.2.1. $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3)$ décrit une particule dans l'espace à trois dimensions. Pour un état ψ de $\mathcal{H}$ normalisé, $|\psi|^2$ est la densité de probabilité de présence de la particule dans l'espace.

A chaque grandeur physiquement mesurable, on associe un opérateur auto-adjoint A sur $\mathcal{H}$ (une *observable*). Par le théorème spectral (voir par exemple [Fol89]), on associe à A une mesure borélienne de probabilité à valeurs projections : $\Pi(E) := \chi_E(A)$ pour E un borélien, et $A = \int \lambda d\Pi(\lambda)$. Effectuée sur un système dans l'état ψ, le résultat est aléatoire et prend une valeur $\lambda \in E$ avec la probabilité $||\Pi(E)\psi||^2$. De plus, l'état ψ est aussitôt projeté sur l'espace propre correspondant. Une mesure implique donc une perte d'information, irréversible.

Exemple 1.2.2. La *valeur moyenne* d'une mesure d'un système dans l'état ψ est donc le réel : $\langle \psi, A\psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ en adoptant la notation *bracket*, où pour un vecteur ψ de norme 1, $|\psi\rangle$ est le vecteur ψ et $\langle \psi|$ la projection sur l'espace engendré par ψ. En reprenant les notations de l'exemple 1.2.1, et en associant à la première projection de la position $x \in \mathbb{R}^3$ l'opérateur de multiplication par x_1, on obtient, pour un vecteur $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact et de norme 1 la valeur moyenne :

$$\int_{\mathbb{R}^3} x_1 |\psi|^2(x) dx \tag{1.2.1}$$

ce qui correspond bien à l'interprétation de $|\psi|^2$ comme densité de probabilité de présence de la particule dans l'espace.

Enfin, l'évolution temporelle d'un système physique autonome (hors mesure, donc sans projection brutale) est donnée par un groupe unitaire à un paramètre qui satisfait généralement l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \partial_t U(t) = HU(t)$$

où H est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$.

1.2.2 Principe de correspondance

En mécanique classique, si l'espace des états est T^*X, où X est une variété, une observable est une fonction lisse $a \in \mathcal{C}^\infty(T^*X, \mathbb{R})$. Et le résultat d'une mesure dans l'état $(x, \xi) \in T^*X$ est tout simplement la valeur $a(x, \xi)$. Le principe de correspondance énoncé par Bohr en 1923 affirme que la mécanique classique doit se retrouver comme limite de la mécanique classique quand $\hbar$ tend vers 0.

Pour une particule dans une variété X, on a le tableau de correspondance :

CLASSIQUE	QUANTIQUE
$(p, q) \in T^*X$ (variété symplectique)	$\psi \in L^2(X)$ (Hilbert)
$F \in \mathcal{C}^\infty(T^*X, \mathbb{R})$	Opérateurs auto-adjoints sur $L^2(X)$
Crochet de Poisson $\{.,.\}$	Commutateur $\frac{1}{i\hbar}[.,.]$
Équation de Hamilton	Équation de Schrödinger
Déterminisme/Chaos	Aléatoire intrinsèque

Il s'agit donc d'associer à tous les objets classiques ci-dessus un analogue quantique tel que le principe de correspondance de Bohr soit vérifié en un sens à définir. On appelle *quantification* ce procédé, et l'analyse semiclassique est l'étude de ces objets quantiques quand $\hbar$ tend vers 0.

1.2.3 Quantification de Weyl

On se place dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$. La quantification de Weyl permet (formellement, dans un premier temps) d'associer à une observable classique a une observable quantique $\mathrm{Op}^W(a)$ par la formule :

$$\left(\mathrm{Op}^W(a)u\right)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{\frac{i(x-y).\xi}{\hbar}} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)dyd\xi \tag{1.2.2}$$

Il existe de nombreuses manières (voir par exemple [Mar01]) de donner un sens à cette formule : il s'agit de définir une classe de symboles pour a et un espace sur lequel $\mathrm{Op}^W(a)$ est défini. On choisit ci-dessous une classe de symboles incluant les fonctions polynomiales afin de pouvoir donner une interprétation physique du quantifié des observables classiques correspondant à une mesure de la position et de l'impulsion.

Définition 1.2.3. Soit $a(\cdot,\hbar)$ une famille d'élements de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{C})$ paramétrée par $h \in [0,1)$. On dit que a est un symbole d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ si :

$$\begin{aligned}&\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n,\ \exists\hbar_{\alpha,\beta}>0,\ \exists C_{\alpha,\beta}>0,\\ &\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n},\ \forall\hbar\in[0,\hbar_{\alpha,\beta}),\ \left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}a}{\partial x^\alpha\partial\xi^\beta}(x,\xi,\hbar)\right|\le C_{\alpha,\beta}\langle x,\xi\rangle^m\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

où $\langle x,\xi\rangle = \left(1+||(x,\xi)||^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On note S^m l'espace des symboles d'ordre m.

Proposition 1.2.4. *On a l'inclusion :*

$$S^m \subset S^{m'} si\ m \le m' \tag{1.2.4}$$

De plus,

$$\forall(m,m')\in\mathbb{Z}^2,\ S^mS^{m'}\subset S^{m+m'} \tag{1.2.5}$$

Ainsi, l'ensemble des symboles $S^\infty = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} S^m$ est une algèbre graduée.

Définition 1.2.5. On note S_0 l'ensemble des symboles à support compact fixe :

$$S_0 = \{\hbar \mapsto a(\cdot,\hbar)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{C}) \mid \mathrm{Supp}(a(\cdot,\hbar)\subset K\} \tag{1.2.6}$$

et $S_0 \subset S^{-\infty} = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} S^m$.

On a le théorème suivant (voir par exemple [DS99, Mar01]) :

Théorème 1.2.6. *Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $a \in S^m$. $\mathrm{Op}^W(a)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz.*

Un simple calcul donne alors :

Exemple 1.2.7. Le quantifié de Weyl de la fonction constante égale à 1 est l'identité. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, ceux de $(x,\xi)\mapsto x_j$ et $(x,\xi)\mapsto\xi_j$ sont, respectivement, l'opérateur de multiplication par x_j et l'opérateur $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi_j}$

Ces exemples correspondent bien à l'interprétation physique donnée précédemment. Conformément au principe de correspondance, on cherche à réaliser le quantifié de Weyl non plus comme un opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ muni de sa topologie usuelle, mais comme sous-espace dense de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.2.8. *Soit $a \in S^\infty$. On a :*

$$\forall (u,v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle u, \mathrm{Op}^W(a)v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathrm{Op}^W(\bar{a})u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.7}$$

Ainsi, si a est à valeurs réelles, $\mathrm{Op}^W(a)$ est formellement autoadjoint (ou symétrique).

Théorème 1.2.9 (Calderón-Vaillancourt,[CV71])**.** *Soit $a \in S^0$. Alors $\mathrm{Op}^W(a)$ peut être prolongé en une unique application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, encore notée $\mathrm{Op}^W(a)$. De plus, il existe deux réels positifs (C, M)*

$$\left|\left|\mathrm{Op}^W(a)\right|\right|_{\mathcal{L}_c(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq M} \left|\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta} a}{\partial x^\alpha \partial \xi^\beta}\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\hbar_0))} \tag{1.2.8}$$

Par la suite, tous les symboles que nous utiliserons seront semiclassiques : le lemme de Borel (Théorème 2.3.32, reformulé dans le cadre des symboles) permet de donner du sens au symbole formel $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \hbar^k a_k$:

Proposition 1.2.10. *Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ et indépendants de $\hbar$. Alors, il existe $a \in S^m$ tel que :*

$$a(\cdot, \hbar) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \hbar^k a_k \tag{1.2.9}$$

au sens où :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left((x, \xi, \hbar) \mapsto a(x, \xi, \hbar) - \sum_{k=0}^{N} \hbar^k a_k(x, \xi)\right) \in \hbar^{N+1} S^m \tag{1.2.10}$$

De plus, a est unique modulo $O(\hbar^\infty)$, i.e. *modulo un symbole dans $\bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} \hbar^N S^m$.*

Remarque 1.2.11. La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \hbar^k a_k$ n'est a priori pas convergente (au sens de la convergence simple).

Définition 1.2.12. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $a \in S^m$. On dit que a est un symbole semiclassique d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ s'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de symboles d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ et indépendants de $\hbar$ telle que :

$$a(\cdot, \hbar) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \hbar^k a_k \tag{1.2.11}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathrm{Op}^W(a)$ est l'opérateur pseudodifférentiel semiclassique de symbole de Weyl a. On dit également que a_0 est le symbole principal de $\mathrm{Op}^W(a)$, et a_1 son symbole sous-principal. On note $a_0 = \sigma_p(\mathrm{Op}^W(a))$.

Proposition 1.2.13. *L'application :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \hbar^k a_k \mapsto \mathrm{Op}^W(a) \text{ où } a(\cdot,\hbar) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \hbar^k a_k \tag{1.2.12}$$

est injective. En d'autres termes, Le symbole de Weyl d'un opérateur pseudodifférentiel semiclassique est bien défini modulo $O(\hbar^\infty)$.

Remarque 1.2.14. Dans l'équation (1.2.10), le réel $\hbar_{\alpha,\beta}$ de la Définition 1.2.3 est autorisé à dépendre de N.

Le produit de deux opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques est encore un opérateur pseudodifférentiel semiclassique. Plus précisément :

Théorème 1.2.15. *Soient a et b deux symboles semiclassiques d'ordre m et m' respectivement. Alors $Op^W(a)Op^W(b)$ est un opérateur pseudodifférentiel semiclassique, de symbole de Weyl donné par le produit de Moyal $a \star b \in S^{m+m'}$ de a et b :*

$$a \star b \sim \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{\hbar^{|\alpha+\beta|}(-1)^{|\alpha|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} a}{\partial x^\alpha \partial \xi^\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} b}{\partial x^\beta \partial \xi^\alpha} \tag{1.2.13}$$

En particulier, on retrouve le lien entre crochet de Poisson et commutateur imposé par le tableau de correspondance :

Corollaire 1.2.16. *Soient A et B deux opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques. Avec les notations de la Définition 1.2.3, on a :*

$$\sigma_p(AB) = \sigma_p(A)\sigma_p(B) \tag{1.2.14}$$

et :

$$\sigma_p\left(\frac{[A,B]}{i\hbar}\right) = \{\sigma_p(A);\sigma_p(B)\} \tag{1.2.15}$$

Donnons enfin la définition d'un opérateur pseudodifférentiel semiclassique elliptique :

Définition 1.2.17. Soit a un symbole semiclassique d'ordre $m \in \mathbb{Z}$. On dit que a est elliptique s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n},\ |a_0(x,\xi)| \geq C\langle x,\xi\rangle^m \tag{1.2.16}$$

Dans cas, on dit que $\mathrm{Op}^W(a)$ est un opérateur pseudodifférentiel semiclassique elliptique.

On a alors le théorème suivant (voir par exemple [Shu87]) :

Théorème 1.2.18. *Soit A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique elliptique, dont le symbole est réel. Alors A est un opérateur autoadjoint de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et admet une base hilbertienne dénombrable de vecteurs propres $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, son spectre est une partie discrète de $\mathbb{R}$, qui coïncide avec l'ensemble de des valeurs propres de A.*

1.2.4 Extension aux variétés

On a défini la notion d'opérateur pseudodifférentiel semiclassique sur $\mathbb{R}^n$. On étend ici cette définition dans un premier temps à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avant de l'étendre à une variété lisse via des cartes locales. Cette partie est volontairement *elliptique* car nous n'aurons pas besoin de plus dans cette thèse : pour plus de détails, on pourra consulter [Hör90, Shu87, AG91].

Définition 1.2.19. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a(\cdot, \hbar)$ une famille d'élements de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ paramétrée par $h \in [0,1)$.

On dit que a est un symbole local d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ si pour toute fonction à support compact $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $\phi a \in S^m$.

Remarque 1.2.20. On définit de la même manière un symbole local semiclassique.

On a les propositions suivantes :

Proposition 1.2.21. *Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que $Supp(u) \cap Supp(\phi)$. Alors :*

$$\left|\left|\mathrm{Op}^W(\phi a)u\right|\right|_{L^2} = O(\hbar^\infty) \tag{1.2.17}$$

Proposition 1.2.22. *Soient χ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et $a \in S_0$ un symbole semiclassique à support compact fixe. Alors $u \mapsto \mathrm{Op}^W(a)[u \circ \chi^{-1}]$ est encore un opérateur pseudodifférentiel semiclassique, de symbole principal :*

$$(x, \xi) \mapsto a_0(\chi(x), d\chi_x^{*-1}(\xi)) \tag{1.2.18}$$

Remarque 1.2.23. On voit ici l'intérêt de définir des symboles sur un fibré cotangent. Jusqu'ici, on a pu donner tous énoncés dans $\mathbb{R}^{2n} \simeq T^*(\mathbb{R}^n)$. Un changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ induit un changement de coordonnées symplectiques (voir Proposition 1.1.5) dans l'expression du symbole.

Soit maintenant X une variété $\mathcal{C}^\infty$-différentielle de dimension n.

Définition 1.2.24. Soit $A : \mathcal{C}_0^\infty(X) \to \mathcal{C}^\infty(X)$ un opérateur linéaire continu. On dit que A est un opérateur pseudodifférentiel semiclassique si et seulement si dans toute carte locale $\chi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, l'opérateur transporté :

$$\widetilde{A} : \mathcal{C}_0^\infty(\widetilde{V}) \ni u \mapsto A[u \circ \chi] \circ \chi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{V}) \tag{1.2.19}$$

est un opérateur pseudodifférentiel semiclassique dans $\widetilde{V}$, *i.e.* pour tout couple $(\phi, \psi) \in \mathcal{C}_0^\infty(\widetilde{V}, \mathbb{R})^2$, $\phi\widetilde{A}\psi$ est un opérateur pseudodifférentiel semiclassique sur $\mathbb{R}^n$.

D'après les Propositions 1.2.21 et 1.2.22, le symbole principal d'un opérateur pseudodifférentiel semiclassique est bien défini en tant que fonction sur $T^*(X)$, indépendamment du choix d'une carte locale et du choix de fonctions plateaux dans la Définition 1.2.24, et le Corollaire 1.2.16 reste vrai. On peut donc également définir la notion d'opérateur elliptique sur la variété X comme précédemment, et le Théorème 1.2.18 reste vrai en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par X.

En revanche, le symbole total d'un opérateur pseudodifférentiel sur une variété ne peut pas être défini de manière intrinsèque : on parle donc de symbole total *dans un système de coordonnées locales.*

Chapitre 2

Forme normale de Birkhoff

Dans tout ce chapitre, on fixe $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

2.1 Introduction

En mécanique classique, un changement de variable symplectique ψ envoie le flot associé à un hamiltonien H sur celui associé au hamiltonien $H \circ \psi$. Une forme normale est le choix d'un représentant de la classe de conjugaison par un symplectomorphisme local d'un hamiltonien, dont on connait mieux la dynamique. La forme normale de Birkhoff classique, introduite par Birkhoff [Bir27] et étendue au cas résonant par Gustavson [Gus66], permet de ramener l'étude d'un système dynamique à celle d'un système *formellement* intégrable au voisinage d'un ensemble invariant de la dynamique (point fixe, trajectoire périodique, tore invariant) : la forme normale de Birkhoff n'est pas convergente en général, cependant sa troncature à l'ordre N donne la dynamique (à symplectomorphisme local près) du système hamiltonien avec une bonne précision sur des échelles de temps inversement proportionnelles à la puissance N-ième de la distance à l'ensemble invariant. Elle a de nombreuses applications, notamment dans l'étude de la stabilité de tores invariants lors de la perturbation d'un système intégrable avec le théorème KAM [Kol54, Arn63, Mos62].

En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger conduit à l'étude spectrale d'hamiltoniens quantiques : microlocalement au voisinage d'ensembles invariants de la dynamique classique, ils sont conjugués unitairement à la forme normale de Birkhoff quantique. Celle-ci, apparue dans [Ali85, Eck86], permet notamment la construction de quasi-modes associés à des trajectoires périodiques au voisinage d'un fonds de puits, ramenant la description du bas du spectre à celle d'un système intégrable (voir par exemple [Sjö92]), avec un précision en $\hbar^N$ où N est l'ordre auquel on tronque la forme normale de Birkhoff quantique. Elle permet également un calcul explicite des coefficients de la formule des traces semiclassique, comme on le verra au Chapitre 3.

2.2 Construction de coordonnées de Fermi

Dans cette partie, on construit un système de coordonnées de Fermi, c'est-à-dire un système de coordonnées symplectiques locales autour d'un ensemble invariant de la dynamique (fond de puits dans les parties 2.2.1 et 2.2.2, trajectoire périodique elliptique non-dégénérée dans la partie 2.2.3) dans lequel le hamiltonien s'écrit comme une somme d'oscillateurs harmoniques (plus une partie linéaire en la variable transverse à la surface d'énergie dans le cas d'une trajectoire périodique) : c'est la première étape de la réduction à la forme normale de Birkhoff. Dans la partie 2.2.1, on traite le cas d'un fond de puits. On considère ensuite le cas particulier du symbole d'un opérateur de Schrödinger dans la partie 2.2.2, où le changement de coordonnées est entièrement déterminé par son action sur la section nulle. La partie 2.2.3 est enfin une extension naturelle de l'étude faite en 2.2.1 dans le cas d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée.

2.2.1 Fond de puits

Soit $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. On suppose ici que H admet un minimum local non-dégénéré E en $(0,0)$. On a la propriété suivante :

Proposition 2.2.1. *Il existe un symplectomorphisme ϕ de $T^*(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même tel que $\phi(0,0) = (0,0)$ et des réels $\theta_1, \dots, \theta_n$ strictement positifs tels que l'on ait au voisinage de 0 :*

$$H \circ \phi(x,\xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x,\xi)||^3\right) \tag{2.2.1}$$

De plus, les réels $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont uniques à permutation près : si des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et un symplectomorphisme ϕ' envoyant $(0,0)$ sur $(0,0)$ sont tels que :

$$H \circ \phi'(x,\xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x,\xi)||^3\right) \tag{2.2.2}$$

alors il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \theta_{\sigma(i)}$.

Définition 2.2.2. Le système de coordonnées locales autour de $(0,0)$ obtenues en transportant le système canonique de coordonnées symplectiques de $T^*(\mathbb{R}^n)$ par le symplectomorphisme ϕ de la Proposition 2.2.1 est appelé système de *coordonnées de Fermi*.

Remarque 2.2.3. Cet énoncé est local et reste donc valable en remplaçant $T^*(\mathbb{R}^n)$ par une variété symplectique $\mathcal{M}$ de dimension $2n$: le symplectomorphisme est alors défini localement dans des coordonnées de Darboux au voisinage du point en lequel H admet un minimum local.

Remarque 2.2.4. On retrouvera le résultat d'unicité de la Proposition 2.2.1 lors de l'étude de problèmes inverses (Proposition B.2) : les réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont déterminés à permutation près par le bas du spectre de l'opérateur $H(x, \hbar D_x)$.

Démonstration de la Proposition 2.2.1. Commençons par énoncer le lemme suivant, dont la preuve sera donnée après la démonstration de la Proposition 2.2.1 :

Lemme 2.2.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice définie positive. Alors il existe une matrice $S \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale D définie positive de taille n telles que :*

$$ {}^tSAS = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \tag{2.2.3}$$

De plus, si (S', D') est un couple de matrices tel que $S' \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ et D' est une matrice diagonale de taille n vérifiant :

$$ {}^tS'AS' = \left(\begin{array}{c|c} D' & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array}\right) \tag{2.2.4}$$

alors D et D' ont les mêmes coefficients diagonaux à permutation près.

Puisque H admet un minimum local non-dégénéré en $(0,0)$, $d^2H(0,0)$ est une forme quadratique définie positive sur $T_{(0,0)}\left(T^*(\mathbb{R}^n)\right) \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Elle peut donc être représentée par une matrice définie positive et le Lemme 2.2.5 s'applique. Soit S la matrice symplectique donnée par ce lemme : elle définit un symplectomorphisme ϕ via l'identification $T^*(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et si $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont les éléments diagonaux de la matrice D donnée par le lemme, on a par la formule de Taylor :

$$H \circ \phi(x, \xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x, \xi)||^3\right) \tag{2.2.5}$$

La première partie de la Proposition 2.2.1 est donc montrée. Soient maintenant un symplectomorphisme ϕ' envoyant $(0,0)$ sur $(0,0)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$H \circ \phi'(x, \xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x, \xi)||^3\right) \tag{2.2.6}$$

Soient S' la matrice de la différentielle de ϕ' en $(0,0)$ et D' la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Le couple (S', D') vérifie les conditions du Lemme 2.2.5, donc les n-uplets de réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ sont bien égaux à permutation près. □

Démonstration du lemme 2.2.5. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ muni du produit scalaire canoniquement associé à la matrice A, et l'espace $\mathbb{C}^{2n}$ muni du produit hermitien associé à cette même matrice A (si A est symétrique réelle définie positive, elle est aussitôt hermitienne définie positive).

Dans l'espace $\mathbb{C}^{2n}$ muni de cette structure hermitienne, l'adjoint d'un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ est B a pour matrice dans la base canonique $B^* = A^{-1}\ {}^t\overline{B}A$. En effet, pour tous $X, Y \in \mathbb{C}^{2n}$, on a :

$$ {}^t(\overline{B^* X})AY = {}^t\overline{X}A\overline{B}A^{-1}AY = {}^t\overline{X}A(BY) \tag{2.2.7} $$

La matrice $C = iA^{-1}J_n$ est alors A-hermitienne (*i.e.* au sens du produit hermitien associé à A) : $C^* = C$.

Elle est donc diagonalisable en base A-orthonormée. De plus, toutes ses valeurs propres sont réelles, donc celles de iC sont toutes imaginaires pures. Or, iC est une matrice réelle, donc si $i\lambda \in i\mathbb{R}$ est une valeur propre de iC, $-i\lambda$ en est une de même multiplicité algébrique. Donc si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de C, alors $-\lambda$ est une valeur propre de même multiplicité.

Remarquons également que, comme C a tous ses coefficients imaginaires purs, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors $\overline{X}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-\lambda$.

Finalement, on peut choisir un n-uplet de réels strictement positifs $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et une famille de vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$ tels que $(X_1, \ldots, X_n, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})$ est une base A-orthonormée de vecteurs propres de C associée au $2n$-uplet de valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n)$.

Posons alors, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$ u_j = \frac{X_j + \overline{X_j}}{\sqrt{2}} \text{ et } v_i = \frac{X_j - \overline{X_j}}{i\sqrt{2}} \tag{2.2.8} $$

On a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$ -iCu_j = \lambda_j v_j \text{ et } -iCv_j = -\lambda_j u_j \tag{2.2.9} $$

On vérifie aisément que $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ est une base A-orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$. Posons enfin pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$ \tilde{u}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} u_j \text{ et } \tilde{v}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} v_j \tag{2.2.10} $$

D'après (2.2.9), on a pour tout $(j_1, j_2) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$ \begin{cases} {}^t\tilde{v}_{j_1} J_n \tilde{u}_{j_2} = {}^t v_{j_1} A v_{j_2} = \delta_{j_1 j_2}, \\ {}^t\tilde{u}_{j_1} J_n \tilde{u}_{j_2} = {}^t u_{j_1} A v_{j_2} = 0, \\ {}^t\tilde{v}_{j_1} J_n \tilde{v}_{j_2} = {}^t v_{j_1} A u_{j_2} = 0 \end{cases} \tag{2.2.11} $$

En d'autres termes, la base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ est symplectique, A-orthogonale et, pour $j \in [\![1, n]\!]$, les A-normes de u_j et de v_j sont toutes deux égales à $\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$.

La matrice de passage S de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est donc symplectique et en notant D la matrice diagonale dont la suite ordonnée des termes diagonaux est $(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})$, on a :

$$ {}^tSAS = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \tag{2.2.12}$$

La première partie du lemme est donc montrée.

Soit maintenant (S', D') un couple de matrices tel que $S' \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ et D' est une matrice diagonale de taille n vérifiant :

$$ {}^tS'AS' = \left(\begin{array}{c|c} D' & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array}\right) \tag{2.2.13}$$

Alors $S" = S^{-1}S'$ est symplectique et :

$$ {}^tS" \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) S" = \left(\begin{array}{c|c} D' & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array}\right) \tag{2.2.14}$$

Or ${}^tS" = -J_nS"^{-1}J_n = J_n^{-1}S"^{-1}J_n$, donc un calcul par blocs donne :

$$ S"^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline -D & 0 \end{array}\right) S" = \left(\begin{array}{c|c} 0 & D' \\ \hline -D' & 0 \end{array}\right) \tag{2.2.15}$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation, on en déduit que les matrices $\left(\begin{array}{c|c} D^2 & 0 \\ \hline 0 & D^2 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} D'^2 & 0 \\ \hline 0 & D'^2 \end{array}\right)$ sont semblables. Or, d'après (2.2.13), D' est définie positive. Finalement, les matrices D et D' ont bien les mêmes éléments diagonaux à réarrangement près. □

2.2.2 Le cas « Schrödinger »

On considère ici le symbole de l'opérateur de Schrödinger semiclassique :

$$ H(x, \hbar D_x) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x) \tag{2.2.16}$$

à domaine dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, *i.e.* le hamiltonien classique défini sur $T^*(\mathbb{R}^n)$ par :

$$ \forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ H(x,\xi) = \frac{1}{2}\left|\left|\xi\right|\right|^2 + V(x) \tag{2.2.17}$$

où le potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ admet un minimum local non-dégénéré E en $x = 0$.

Remarque 2.2.6. Dans (2.2.17), comme dans toute la suite et en l'absence d'ambiguïté, $||\cdot||$ est la norme dérivant du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{2n}$, ou d'autres espaces qui s'y identifient naturellement.

H admet un minimum local non-dégénéré en $(0,0)$, donc d'après la Proposition 2.2.1, il existe un système de coordonnées de Fermi autour de $(0,0)$. Mais, dans ce cas particulier, on peut définir le changement de variable symplectique donné par la Proposition 2.2.1 à partir de son action sur la section nulle uniquement, ce qui nous sera utile dans l'étude de problèmes inverses : on aura besoin de moins de données spectrales que dans le cas général afin de construire explicitement un système de coordonnées de Fermi (Théorème 5.1.10).

Plus précisément, on a la proposition :

Proposition 2.2.7. *Il existe un isomorphisme linéaire u de $\mathbb{R}^n$, et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ strictement positifs tels que l'on ait :*

$$H \circ \phi_u(x,\xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||x||^3\right) \tag{2.2.18}$$

où ϕ_u est le symplectomorphisme associé à u, i.e. *défini sur $T^*(\mathbb{R}^n)$ par : $\phi_u(x,\xi) = (u(x), u^{*-1}(\xi))$.*

Remarque 2.2.8. Comme celui de la Proposition 2.2.1, cet énoncé est local : il reste donc vrai en remplaçant $T^*(\mathbb{R}^n)$ par le fibré cotangent d'une variété lisse quelconque $\mathcal{M}$. Il suffit de définir u dans une carte locale $\mathcal{U}$ autour du point en lequel V atteint son minimum : quitte à restreindre $\mathcal{U}$, u est un difféomorphisme sur son image et le symplectomorphisme ϕ_u associé à u est défini sur $T^*(\mathcal{U})$ par $\phi_u(x,\xi) = (u(x), du_x^{*-1}(\xi))$.

Remarque 2.2.9. Les applications ϕ_u définies dans la Remarque 2.2.8 et dans l'énoncé de la Proposition 2.2.7 (les deux définitions coïncident bien dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ et u est linéaire) sont bien des symplectomorphismes, comme on l'a prouvé dans la Proposition 1.1.5.

Démonstration de la Proposition 2.2.7. Soit $d^2V(0)$ la matrice hessienne de V en 0. C'est une matrice définie positive : elle est donc diagonalisable en base orthonormée. Soit alors $(\theta_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ le n-uplet de réels strictement positifs tel que $(\theta_i^2)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est le n-uplet des valeurs propres de $d^2V(0)$ (comptées avec ordre de multiplicité). Soit D la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux $\theta_1^2, \ldots, \theta_n^2$. On peut choisir une matrice orthogonale Q telle que :

$$d^2V(0) = QDQ^{-1} = QD\,{}^tQ \tag{2.2.19}$$

La formule de Taylor au voisinage de 0 nous donne :

$$V(Qx) = E + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2 + O(||x||^3) \tag{2.2.20}$$

Soit Δ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\frac{1}{\sqrt{\theta_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\theta_n}}$.

D'après la Proposition 1.1.5, $\phi_{Q\Delta}$ est un symplectomorphisme et $(Q\Delta)^{*-1} = Q\Delta^{-1}$. On a donc :

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ H \circ \phi_{Q\Delta}(x,\xi) = \frac{1}{2}\left|\left|\Delta^{-1}\xi\right|\right|^2 + V(Q\Delta x) \tag{2.2.21}$$

Finalement, on a au voisinage de $(0,0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$:

$$H \circ \phi_{Q\Delta}(x,\xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi^2}{2} + O\left(||x||^3\right) \tag{2.2.22}$$

□

2.2.3 Au voisinage d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée

On reprend ici les notations de la partie 1.1.4 : on considère un hamiltonien H sur un variété symplectique $(\mathcal{M},\omega)$ de dimension $2n+2$, E une valeur régulière de H. On suppose qu'il existe $\delta E > 0$ tel que $H^{-1}\left([E-\delta E, E+\delta E]\right)$ est compacte si bien que le flot hamiltonien Φ^t associé à H est défini pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ sur un voisinage de Σ_E. Soit enfin γ une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée du flot hamiltonien engendré par H de plus petite période $T > 0$ et d'énergie E.

Remarque 2.2.10. (Convention) Dans toute cette partie, on fait l'identification $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. Les fonctions définies sur $\mathbb{S}^1$ sont confondues avec les fonctions T-périodiques de la variable réelle.

La proposition suivante donne l'existence de coordonnées de Fermi autour de γ. L'idée de la preuve suivante est due à [Zel97] :

Proposition 2.2.11. *Soit $\theta_1,\ldots,\theta_n$ une réalisation (quelconque) des angles de Poincaré associés à γ. Alors il existe un symplectomorphisme φ d'un voisinage $\mathcal{U} \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ de $\mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\}$ dans un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de γ tel que pour $t \in \mathbb{S}^1$, $\varphi(0,t,0,0) = \gamma(t)$ et :*

$$H \circ \varphi(x,t,\xi,\tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2T} + O(||(x,\xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.2.23}$$

De plus, si ψ est un symplectomorphisme d'un voisinage $\mathcal{U}'$ de $\mathbb{S}^1 \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ dans un voisinage $\mathcal{V}' \subset \mathcal{M}$ de γ, et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des réels tels que $\psi(0,t,0,0) = \gamma(t)$ et :

$$H \circ \psi(x,t,\xi,\tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2T} + O(||(x,\xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.2.24}$$

alors il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \equiv \theta_{\sigma(i)}[2\pi]$.

Remarque 2.2.12. Comme dans le cas du fond du puits, les angles de Poincaré sont déterminés par des données spectrales de l'opérateur $H(x, \hbar D_x)$, ici des coefficients de la formule des traces. C'est un résultat dû à [Fri88], sur lequel nous reviendrons en détail dans le Chapitre 4.

Remarque 2.2.13. On confond régulièrement, quand cela ne prête pas à confusion, $\mathbb{S}^1$ et $\{0\} \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$, où $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ est la section nulle de $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$.

Démonstration de la Proposition 2.2.11. D'après le théorème du voisinage tubulaire de Weinstein ([Wei71, Wei77, Wei81], voir également la Remarque 1.1.32), il existe un symplectomorphisme φ_1 d'un voisinage $\mathcal{U}_1 \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ de $\mathbb{S}^1$ dans un voisinage $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{M}$ de γ tel que $\varphi_1(0, t, 0, 0) = \gamma(t)$, et $\varphi_1^{-1}(\mathcal{S} \cap \mathcal{U}_2) = \{x = \xi = 0\} \cap \mathcal{U}_1$:

$$H \circ \varphi_1(x, t, \xi, \tau) = E + \tau + O(||(x, \xi, \tau)||^2) \tag{2.2.25}$$

De plus, $\mathbb{S}^1$ est une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée du flot hamiltonien engendré par $H \circ \varphi_1$, donc d'après la partie 1.1.4, on peut trouver un symplectomorphisme φ_2 défini sur un voisinage $\mathcal{U}_2$ de $\mathbb{S}^1$ égal à l'identité sur $\mathbb{S}^1$ avec $\varphi_2(\mathcal{U}_2) \subset \mathcal{U}_1$, tel que l'on ait toujours :

$$H \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(x, t, \xi, \tau) = E + \tau + O(||(x, \xi, \tau)||^2) \tag{2.2.26}$$

et tel que l'application de Poincaré associée à $H \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ en $O = (0, 0, 0, 0)$ s'écrive dans la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n})$:

$$dP_O = \begin{pmatrix} \cos(D_\theta) & -\sin(D_\theta) \\ \sin(D_\theta) & \cos(D_\theta) \end{pmatrix} \tag{2.2.27}$$

où D_θ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

Pour $t \in \mathbb{S}^1$, on note $K(t)$ la matrice hessienne de $H \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ en $(0, t, 0, 0)$ relativement aux coordonnées x, ξ uniquement. C'est une matrice symétrique de taille $2n$, et :

$$H \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(x, t, \xi, \tau) = E + \tau + (x, \xi)K(t)\ {}^t(x, \xi) + O(||(x, \xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.2.28}$$

Soient $\mathbb{S}^1 \ni t \mapsto S(t) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}^1 \ni t \mapsto M(t) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ des fonctions dérivables telles que pour tout $t \in \mathbb{S}^1$, $M(t)$ est symétrique.

On définit par $\varphi_{S,M}$ sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathbb{S}^1$ choisi que $\varphi_{S,M}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_2$ (c'est toujours possible car $\varphi_{S,M}$ est continu) par la formule (en réarrangeant ici les variables pour une commodité de notations) :

$$\forall (x, t, \xi, \tau) \in \mathcal{U},\ \varphi_{S,M}(x, \xi, t, \tau) = (S(t)(x, \xi), t, \tau + q_M(t, x, \xi)) \tag{2.2.29}$$

où $q_M(t, \cdot, \cdot)$ est la forme quadratique de matrice $M(t)$.

On cherche alors (S, M) tel que $\varphi_{S,M}$ est un symplectomorphisme et tel que l'on ait au voisinage de $\mathbb{S}^1$:

$$H \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_{S,M}(x, t, \xi, \tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2T} + O(||(x, \xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.2.30}$$

On aura alors prouvé la première partie de la proposition 2.2.11 en posant $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_{S,M}$.

On a (2.2.30) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{S}^1$,

$$ {}^tS(t)K(t)S(t) + M(t) = \frac{1}{T}\left(\begin{array}{c|c} D_\theta & 0 \\ \hline 0 & D_\theta \end{array}\right) \tag{2.2.31} $$

La différentielle de $\varphi_{S,M}$ en un point $(x,t,\xi,\tau) \in \mathcal{U}$ exprimée dans la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \tau})$ est la matrice par blocs de tailles $2n \times 2n$, $2n \times 2$, $2 \times 2n$ et 2×2 :

$$ D(t,x,\xi) = \left(\begin{array}{c|cc} S(t) & S'(t)\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ (x,\xi)M(t) & q'_M(t,x,\xi) & 1 \end{array}\right) \tag{2.2.32} $$

où _$'$ désigne la dérivation (partielle ou non) par rapport à t.

$\varphi_{S,M}$ est donc symplectique si et seulement si pour tout $(x,t,\xi,\tau) \in \mathcal{U}$:

$$ {}^tD(t,x,\xi)\left(\begin{array}{c|c} J_n & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right)D(t,x,\xi) = \left(\begin{array}{c|c} J_n & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right) \tag{2.2.33} $$

Or, pour tout $(x,t,\xi,\tau) \in \mathcal{U}$, le membre de gauche est égal à :

$$ \left(\begin{array}{c|cc} {}^tS(t)J_nS(t) & (-\,{}^tS(t)J_nS'(t) + M(t))\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline (x,\xi)\left(M(t) + {}^tS'(t)J_nS(t)\right) & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \tag{2.2.34} $$

Donc finalement, $\varphi_{S,M}$ est donc symplectique si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{S}^1$:

$$ S(t) \in Sp_{2n}(\mathbb{R}), \quad \text{et } M(t) = {}^tS(t)J_nS'(t) \tag{2.2.35} $$

En effet, si pour tout $t \in \mathbb{S}^1$, ${}^tS(t)J_nS(t) = J_n$, alors en dérivant la relation, on obtient bien que ${}^tS(t)J_nS'(t)$ est symétrique pour tout $t \in \mathbb{S}^1$. Finalement, d'après (2.2.31) et (2.2.35), il suffit de chercher une solution S de l'équation différentielle sous contrainte suivante :

$$ \forall t \in \mathbb{S}^1, \quad \begin{cases} {}^tS(t)K(t)S(t) + {}^tS(t)J_nS'(t) = \frac{1}{T}\left(\begin{array}{c|c} D_\theta & 0 \\ \hline 0 & D_\theta \end{array}\right) \\ S(t) \in Sp_{2n}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.2.36} $$

(2.2.36) est équivalent à :

$$\forall t \in \mathbb{S}^1, \begin{cases} S'(t) = J_n K(t) S(t) - \frac{1}{T} S(t) \left(\begin{array}{c|c} 0 & D_\theta \\ \hline -D_\theta & 0 \end{array} \right) \\ S(t) \in Sp_{2n}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.2.37}$$

Soit alors $S_1 : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la solution globale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ S_1'(t) = J_n K(t) S_1(t) \\ S_1(0) = I_{2n} \end{cases} \tag{2.2.38}$$

où K est vue comme une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Le flot hamiltonien linéarisé $d\Phi_O^t$ (où, rappelons-le, $O = (0,0,0,0)$ associé à hamiltonien $H \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$, restreint au sous-espace de $T_O T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ engendré par $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n})$ et corestreint au sous-espace de $T_{\Phi^t(O)} T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ engendré $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n})$ a pour matrice dans ces deux bases $S_1(t)$.

Ainsi, d'après (2.2.27) et (1.1.32), on a :

$$S_1(T) = \begin{pmatrix} \cos(D_\theta) & -\sin(D_\theta) \\ \sin(D_\theta) & \cos(D_\theta) \end{pmatrix} \tag{2.2.39}$$

et de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_1(t)$ est symplectique. Posons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$S(t) = S_1(t) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{T} D_\theta\right) & \sin\left(\frac{t}{T} D_\theta\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{T} D_\theta\right) & \cos\left(\frac{t}{T} D_\theta\right) \end{pmatrix} \tag{2.2.40}$$

Alors la fonction S est dérivable et est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ S'(t) = J_n K(t) S(t) - \frac{1}{T} S(t) \left(\begin{array}{c|c} 0 & D_\theta \\ \hline -D_\theta & 0 \end{array} \right) \\ S(0) = I_{2n} \end{cases} \tag{2.2.41}$$

$S(\cdot + T)$ est solution du même problème de Cauchy, donc par unicité de la solution globale de ce problème S est T-périodique. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ est symplectique. On peut donc identifier S à une fonction définie sur $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ par la Remarque 2.2.10, et celle-ci vérifie aussitôt (2.2.37). On choisit alors $M = {}^t S J_n S'$, et la première partie de la proposition 2.2.11 est montrée comme annoncé ci-dessus.

Pour montrer la seconde partie de la proposition 2.2.11, supposons qu'il existe un symplectomorphisme ψ défini localement autour de $\mathbb{S}^1 \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$, égal à l'identité sur $\mathbb{S}^1$, et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$H_0 \circ \psi(x,t,\xi,\tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2T} + O(||(x,\xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.2.42}$$

où H_0 est défini en $(x,t,\xi,\tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ par : $H_0(x,t,\xi,\tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^n \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2T}$. Soient alors Φ^t et Ψ^t les flots hamiltoniens associés à H_0 et $H_0 \circ \psi$ respectivement.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi^t = \psi \circ \Psi^t \circ \psi^{-1}$ car ψ est un symplectomorphisme (voir partie 1.1.3). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $d\Phi^t_O = d\psi_{\Psi^t(O)} d\Psi^t_O d(\psi^{-1})_O$ et en particulier : $d\Phi^T_O = d\psi_O d\Psi^T_O d\psi_O^{-1}$. Ainsi, les applications linéarisées de Poincaré associées à H_0 et $H_0 \circ \psi$ sont conjuguées par $d\psi_O$ et ont donc même spectre. Or, la matrice hessienne de H_0 (resp. $H_0 \circ \psi$) relativement aux coordonnées x, ξ est en tout point de $\mathbb{S}^1$ égale à : $\frac{1}{T}\left(\begin{array}{c|c} D_\theta & 0 \\ \hline 0 & D_\theta \end{array}\right)$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{T}\left(\begin{array}{c|c} D_\lambda & 0 \\ \hline 0 & D_\lambda \end{array}\right)\right)$. On en déduit l'expression des applications linéarisées de Poincaré sous la forme (2.2.27), et leurs valeurs propres $e^{i\theta_1}, \dots e^{i\theta_n}$ et $e^{i\lambda_1}, \dots e^{i\lambda_n}$ respectivement : ainsi, il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $e^{i\lambda_j} = e^{i\theta_{\sigma(j)}}$, ce qui achève la preuve de la seconde partie de la proposition. $\square$

2.3 Forme normale de Birkhoff quantique

Dans cette partie, on commence par introduire quelques notations et objets qui nous seront utiles tout au long de cette thèse (partie 2.3.1). On présente alors une construction de la forme normale de Birkoff quantique au voisinage d'une trajectoire elliptique non dégénérée, essentiellement reprise de [GP10], en insistant sur les principales modifications apportées et en précisant quelques points (partie 2.3.2). Enfin, on donne dans la partie 2.3.3 les analogues des énoncés de la partie 2.3.2 dans le cas du fond de puits.

2.3.1 Quelques notations et rappels préliminaires

2.3.1.a La variable complexe

Il est très utile dans certains cas (par exemple pour résoudre les équations cohomologiques des Propositions 2.3.30, 2.3.39, 2.4.8, 2.4.19) de voir une fonction de $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ comme une fonction de la variable complexe $z = \frac{x+i\xi}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}^n$. Plus précisément, on associe à $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ la fonction g définie pour $z \in \mathbb{C}^n$ par :

$$g(z) = G\left(\frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}, \frac{z-\bar{z}}{i\sqrt{2}}\right) \tag{2.3.1}$$

si bien que pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, on a :

$$G(x, \xi) = g\left(\frac{x+i\xi}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.3.2}$$

Il est en fait d'usage de voir la fonction g précédemment définie comme une fonction des deux variables $(z, \bar{z})$. Remarquons qu'*il ne s'agit pas d'un prolongement* (régulier) de la fonction G de $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^{2n}$, mais bien uniquement d'une *commodité de notations.*

On confond alors les fonctions de (x,ξ) que sont $z : (x,\xi) \mapsto \frac{x+i\xi}{\sqrt{2}}$ et $\bar{z} : (x,\xi) \mapsto \frac{x-i\xi}{\sqrt{2}}$ avec, respectivement, le premier et deuxième n-uplet de variables de $g(\cdot,\cdot)$, alors définie sur $\Gamma = \{(u,v) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \bar{u} = v\} \simeq \mathbb{C}^n$, si bien que la relation (2.3.2) s'écrit :

$$G = g(z,\bar{z}) \tag{2.3.3}$$

On introduit alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les opérateurs de dérivation $\frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}(z,\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial G}{\partial x_j} + \frac{1}{i\sqrt{2}}\frac{\partial G}{\partial \xi_j} \tag{2.3.4}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{1}{i\sqrt{2}}\frac{\partial G}{\partial \xi_j} \tag{2.3.5}$$

Le crochet de Poisson de fonctions $F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ se réécrit alors, si f et g sont les fonctions associées :

$$\{F,G\} = -i\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial g}{\partial z_j}\right](z,\bar{z}) \tag{2.3.6}$$

Remarque 2.3.1. Si G est polynomiale homogène de degré $k \in \mathbb{N}$ en (x,ξ), alors la fonction associée est aussitôt polynomiale homogène (à coefficients complexes) de degré k en $(z,\bar{z})$. Toutes les précautions précédentes ne sont alors pas nécessaires : la fonction polynomiale G définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ se prolonge en effet en une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}^{2n}$.

Le développement de Taylor à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $(0,0)$ d'une fonction $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ permet d' obtenir celui de la fonction g associée, au voisinage de $(0,0) \in \Gamma$:

$$g(z,\bar{z}) = \sum_{|k|+|m|\le N}\frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{|k|+|m|}g}{\partial z^k\partial\bar{z}^m}(0,0)z^k\bar{z}^m + O(||z||^{N+1}) \tag{2.3.7}$$

où $k!$, $m!$, z^k et $||z||$ sont définis comme suit :

Définition 2.3.2. Si $z = (z_1,\ldots,z_n)$ et $k = (k_1,\ldots,k_n)$ sont respectivement des n-uplets de complexes et d'entiers positifs, alors z^l désigne la quantité $z^l := \prod\limits_{i=1}^{n} z_i^{k_i}$. La même convention vaut pour des n-uplets d'opérateurs (au lieu des complexes), et en particulier $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. De plus on a les notations suivantes :

$$|k| := \sum_{i=1}^{n} k_i \quad \text{et} \quad k! := \prod_{i=1}^{n} k_i! \tag{2.3.8}$$

Enfin, $||z|| = \frac{1}{\sqrt{2}}||(x,\xi)||$.

On définit alors les *termes diagonaux* et *extra-diagonaux* d'une fonction polynomiale de la façon suivante :

Définition 2.3.3. Soient $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ une fonction polynomiale et g la fonction associée (aussitôt polynomiale en $(z, \bar{z})$).

On dit qu'un terme de la fonction polynomiale g est un *terme diagonal* s'il est de la forme $\alpha z^k \bar{z}^k = \alpha |z|^{2k}$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^n$).

On dit que c'est un *terme extra-diagonal* sinon, *i.e.* s'il est de la forme $\alpha z^k \bar{z}^m$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $(k,l) \in \mathbb{N}^{2n}$, $k \neq l$).

Par extension, on appelle terme diagonal (resp. extra-diagonal) de G un terme associé à un terme diagonal (resp. extra-diagonal) de la fonction g.

Remarque 2.3.4. Cette définition ne porte pas à confusion du fait de la correspondance bijective entre les fonctions polynomiales en (x, ξ) et celles en $(z, \bar{z})$ (équations (2.3.1) et (2.3.2)).

Définition 2.3.5. Dans toute la suite, on fixe les notations suivantes :

$$\forall (x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i(x, \xi) = \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} \tag{2.3.9}$$

Comme on l'a fait précédemment pour z et $\bar{z}$, on omet, quand cela ne porte pas à confusion, la dépendance en (x, ξ) en écrivant simplement p_i pour $p_i(x, \xi)$. Aussi, p désignera le n-uplet $(p_1, \ldots, p_n)$.

Concluons cette partie en étendant cette commodité de notations à une fonction G lisse sur $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$: il suffit d'appliquer le changement de variables à $(t, \tau) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ fixé à la fonction $G(\cdot, t, \cdot, \tau)$. Les opérateurs de dérivation $\frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ sont définis comme précédemment, et on a une correspondance bijective entre fonctions polynomiales en x, ξ, τ et fonctions polynomiales en $z, \bar{z}, \tau$. Plus précisément, on définit les fonctions polynomiales homogènes comme suit :

Définition 2.3.6. Soient $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ et $l \in \mathbb{N}$. On dit que F est polynomiale homogène de degré l s'il existe une famille $(\alpha_{jkm})_{(j,k,m) \in \mathbb{N}^{2n+1}, |j|+|k|+2m=l}$ d'élements de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tels que dans les coordonnées canoniques (x, t, ξ, τ) de $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$:

$$F(x, t, \xi, \tau) = \sum_{|j|+|k|+2m=l} \alpha_{jkm}(t) x^j \xi^k \tau^m \tag{2.3.10}$$

On dit que F est polynomiale de degré l si elle est somme de fonctions polynomiales homogènes de degré au plus l.

Remarque 2.3.7. Avec nos notations, la fonction nulle est polynomiale homogène de degré quelconque. Cela nous sera utile pour alléger certains énoncés (voir par exemple les Lemmes 2.4.4 et 2.4.14 et les remarques attenantes).

Comme précédemment, une fonction polynomiale homogène est aussitôt polynomiale homogène en $z, \bar{z}, \tau$ de même degré, et le développement de Taylor en x, ξ, τ au voisinage de $x = \xi = \tau = 0$ permet d'en obtenir un en $z, \bar{z}, \tau$ au même ordre. On définit enfin les *termes diagonaux* et *extra-diagonaux* d'une fonction polynomiale :

Définition 2.3.8. On dit qu'un terme d'une fonction polynomiale est un *terme diagonal* s'il est de la forme $\alpha z^k \bar{z}^k = \alpha |z|^{2k}$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^n$).

On dit que c'est un *terme extra-diagonal* sinon, *i.e.* s'il est de la forme $\alpha z^k \bar{z}^m$ (avec $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $(k, l) \in \mathbb{N}^{2n}$, satisfaisant $\int_{\mathbb{S}^1} \alpha(t) dt = 0$ ou $k \neq l$).

Remarque 2.3.9. Conformément à la convention de la Remarque 2.2.10, on identifie les fonctions définies sur $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ aux fonctions T-périodiques de la variable réelles. $\int_{\mathbb{S}^1} \alpha(t) dt$ est donc égal au coefficient de Fourier d'ordre 0 de la fonction α : $\int_0^T \alpha(t) \frac{dt}{T}$.

2.3.1.b Quelques opérateurs particuliers sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

Enfin, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère les opérateurs suivants, à domaine dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

- $a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + \hbar \partial_{x_i})$ (opérateur d'annihilation)
- $a_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - \hbar \partial_{x_i})$ (opérateur de création)
- $P_i := \frac{1}{2}\left(-\hbar \partial_{x_i}^2 + x_i^2\right) = a_i^* a_i + \frac{\hbar}{2}$ (oscillateur harmonique)

On a alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$[a_i, a_j^*] = \delta_{ij} \hbar, \qquad [a_i, a_j] = 0 \tag{2.3.11}$$

On définit également le vecteur $|0\rangle$ (état « vide ») par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |0\rangle(x) := \frac{1}{(\pi \hbar)^{\frac{n}{4}}} e^{\frac{-||x||^2}{2\hbar}} \tag{2.3.12}$$

On définit alors, pour $\mu \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} |\mu\rangle :&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\mu_i!}} a_i^{*\mu_i} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu!}} a^{*\mu} |0\rangle \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

avec les conventions de la définition 2.3.2.

$(|\mu\rangle)_{\mu \in \mathbb{N}^n}$ est une base hilbertienne [1] de vecteurs propres communs à $P_1, \ldots, P_n$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_i |\mu\rangle = (\mu_i + \frac{1}{2}) \hbar |\mu\rangle \tag{2.3.14}$$

1. Pour plus de détails, voir le dernier paragraphe de cette partie.

On déduit alors aisément de (2.3.13) les égalités suivantes, pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $\mu \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{cases} a_i|\mu\rangle = \sqrt{\mu_i\hbar}|\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_i-1,\mu_{i+1},\dots,\mu_n\rangle \\ a_i^*|\mu\rangle = \sqrt{(\mu_i+1)\hbar}|\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_i+1,\mu_{i+1},\dots,\mu_n\rangle \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Enfin, si $\mathrm{Op}^W(a)$ est l'opérateur pseudodifférentiel dont le symbole total est a, alors pour $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{cases} \mathrm{Op}^W(z_i) = a_i \\ \mathrm{Op}^W(\bar{z}_i) = a_i^* \\ \mathrm{Op}^W(z_i\bar{z}_i) = \mathrm{Op}^W(p_i) = P_i \end{cases} \tag{2.3.16}$$

2.3.1.c Extension à $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$

Considérons maintenant l'espace $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$. Commençons d'abord par une remarque importante :

Remarque 2.3.10. Tout au long de cette thèse on confond $L^2(\mathbb{S}^1)$ avec l'espace des fonctions 1-périodiques de $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. On étend alors cette identification à $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ via l'identité : $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1) = L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{S}^1)$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on peut étendre la définition des opérateurs a_i, a_i^*, et P_i à $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$. On définit également l'opérateur $D_t = -i\hbar\partial_t$.

L'état « vide »est alors défini comme précédemment :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1,\ |0,0\rangle(x,t) := \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{4}}} e^{\frac{-||x||^2}{2\hbar}} \tag{2.3.17}$$

et pour $(\mu,\nu) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}$:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1,\ |\mu,\nu\rangle(x,t) := e^{i2\pi\nu t}\frac{1}{\sqrt{\mu!}} a^{*\mu}|0,0\rangle(x,t) \tag{2.3.18}$$

$(|\mu,\nu\rangle)_{(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{Z}}$ est maintenant une base hilbertienne de vecteurs propres communs à $P_1,\dots,P_n$ et D_t :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ P_i|\mu,\nu\rangle = (\mu_i + \frac{1}{2})\hbar|\mu\rangle,\quad D_t|\mu,\nu\rangle = 2\pi\nu|\mu,\nu\rangle \tag{2.3.19}$$

Les propriétés (2.3.11), (2.3.15) et (2.3.16) restent vraies et de plus : $\mathrm{Op}^W(\tau) = D_t$.

2.3.1.d Fonctions de Hermite

On se place dans un premier temps dans le cas où $n = 1$.
Soit $\omega_\hbar : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} e^{-\frac{x^2}{\hbar}}$.
La fonction $\omega_\hbar$ est intégrable, positive, et d'intégrale 1. On définit alors l'espace :

$$L^2_{\omega_\hbar} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable }, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \omega_\hbar(x) dx < +\infty \right\} \tag{2.3.20}$$

muni du produit hermitien $\langle ., . \rangle_\hbar$ défini par :

$$\forall (f, g) \in (L^2_{\omega_\hbar})^2, \ \langle f, g \rangle_\hbar := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \omega_\hbar(x) dx, \tag{2.3.21}$$

C'est un espace de Hilbert contenant $\mathbb{C}[X]$.

On définit également : $\omega : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, qui est une fonction positive, intégrable d'intégrale 1, et l'espace de Hilbert contenant $\mathbb{C}[X]$:

$$L^2_{\omega} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable }, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \omega(x) dx < +\infty \right\} \tag{2.3.22}$$

muni du produit hermitien $\langle ., . \rangle$ défini par :

$$\forall (f, g) \in (L^2_{\omega})^2, \ \langle f, g \rangle_\hbar := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx, \tag{2.3.23}$$

Définition-proposition 2.3.11 (Polynômes de Hermite)**.** On définit la famille $(H_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Hermite comme la famille orthogonalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ dans l'espace de Hilbert L^2_ω. $(H_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ est donc une base algébrique de $\mathbb{C}[X]$, et pour $\mu \in \mathbb{N}$, H_μ est un polynôme unitaire de degré μ. $(H_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$H_0 = 1, \ H_1 = X, \ \text{ et } \forall \mu \in \mathbb{N}, \ H_{\mu+2} = X H_{\mu+1} - (\mu + 1) H_\mu \tag{2.3.24}$$

Et on en déduit que :

$$\forall \mu \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ H_\mu(x) = (-1)^\mu e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^\mu}{dx^\mu} (e^{-\frac{x^2}{2}}) \tag{2.3.25}$$

Proposition 2.3.12. *On a pour tout $\mu \in \mathbb{N}$:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |\mu\rangle(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\mu!}} H_\mu \left(\sqrt{\frac{2}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{x^2}{2\hbar}} \tag{2.3.26}$$

De plus, $(|\mu\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$

Remarque 2.3.13. Dans la démonstration de la Proposition 2.3.12, la preuve de la densité de $\mathbb{C}[X]$ dans $L^2_{\omega_\hbar}$ est tirée de [KF94].

Démonstration de la Proposition 2.3.12. On définit une famille de polynômes $(P_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ par la formule :

$$\forall \mu \in \mathbb{N},\ P_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega_\hbar}}|\mu\rangle \tag{2.3.27}$$

D'après, (2.3.13), ceux-ci vérifient la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}\forall \mu \in \mathbb{N},\ \sqrt{(\mu+1)\hbar}P_{\mu+1} &= \sqrt{2}XP_\mu - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}P'_\mu \\ &= \sqrt{\hbar}\left(\sqrt{\frac{2}{\hbar}}XP_\mu - \sqrt{\frac{\hbar}{2}}P'_\mu\right)\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Or, on déduit de (2.3.25) la relation de récurrence :

$$\forall \mu \in \mathbb{N},\ H_{\mu+1} = XH_\mu - H'_\mu \tag{2.3.29}$$

Comme $P_0 = H_0 = 1$, on a donc :

$$\forall \mu \in \mathbb{N},\ P_\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu!}}H_\mu\left(\sqrt{\frac{2}{\hbar}}X\right) \tag{2.3.30}$$

On en déduit que pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, P_μ est un polynôme de degré μ et que :

$$\forall (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{N}^2,\ \langle P_{\mu_1}, P_{\mu_2}\rangle_\hbar = \frac{1}{\sqrt{\mu_1!\mu_2!}}\langle H_{\mu_1}, H_{\mu_2}\rangle = \delta_{\mu_1\mu_2} \tag{2.3.31}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Il suffit donc de montrer que $\mathbb{C}[X]$ est dense dans $L^2_{\omega_\hbar}$, $(P_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ sera aussitôt une base hilbertienne de $L^2_{\omega_\hbar}$, et donc $(|\mu\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Il suffit donc de montrer que l'orthogonal de $\mathbb{C}[X]$ dans $L^2_{\omega_\hbar}$ est réduit à $\{0\}$. Soit donc $f \in \mathbb{C}[X]^\perp$. On définit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = \int_\mathbb{R} f(x)\omega_\hbar(x)e^{-zx}dx \tag{2.3.32}$$

F est bien définie et même holomorphe sur $\mathbb{C}$ car pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} |f(x)\omega_\hbar(x)e^{-zx}|dx &= \int_\mathbb{R} |f(x)|\omega_\hbar(x)e^{-\mathcal{R}e(z)x}dx \\ &\leq \int_\mathbb{R} |f(x)|^2\omega_\hbar(x)dx \int_\mathbb{R} \omega_\hbar(x)e^{-2\mathcal{R}e(z)x}dx \\ &< +\infty\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

De plus,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ F^{(m)}(0) = \int_\mathbb{R} f(x)x^m\omega_\hbar(x)dx = 0 \tag{2.3.34}$$

car $f \in \mathbb{C}[X]^\perp$. Donc $F = 0$. Or, en reprenant l'inégalité (2.3.33) pour $z = 0$, on voit que $f\omega_\hbar \in L^1(\mathbb{R})$, et $F(i\mathbb{R}) = \{0\}$ donne $\widehat{f\omega_\hbar} = 0$, donc $f\omega_\hbar = 0$ et finalement $f = 0$.

□

On en déduit alors les deux propriétés suivantes dans le cas général ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) car $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^{n} L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1) = L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{S}^1)$.

Proposition 2.3.14. *On a pour tout $\mu \in \mathbb{N}^n$:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\mu\rangle(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\mu!}} \prod_{i=1}^{n} H_{\mu_i}\left(\sqrt{\frac{2}{\hbar}} x_i\right) e^{-\frac{||x||^2}{2}} \tag{2.3.35}$$

De plus, $(|\mu\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}^n}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$

et puisque $(|\nu\rangle : t \mapsto e^{i2\pi\nu t})_{\nu\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^1)$:

Proposition 2.3.15. *On a pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}$:*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1,\ |\mu,\nu\rangle(x,t) = e^{i2\pi\nu t} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\mu!}} \prod_{i=1}^{n} H_{\mu_i}\left(\sqrt{\frac{2}{\hbar}} x_i\right) e^{-\frac{||x||^2}{2}} \tag{2.3.36}$$

De plus, $(|\mu,\nu\rangle)_{(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$

Remarque 2.3.16. On pourrait retrouver le fait que $(|\mu\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}^n}$ et $(|\mu,\nu\rangle)_{(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{Z}}$ sont des bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ respectivement à l'aide de la théorie spectrale des opérateurs compacts. En effet, dans le cas où $n = 1$, l'opérateur $P = \frac{1}{2}\left(-\hbar\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$ est borné inférieurement et à résolvante compacte, donc il admet une base hilbertienne dénombrable de vecteurs propres, et l'ensemble de ses valeurs propres est une suite tendant vers $+\infty$. Le cas général ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) se déduit du cas $n = 1$ comme précédemment. Pour plus de détails, on pourra par exemple consulter [RS75], partie VIII.14, ou [VuN06], Chapitre 3.

2.3.2 Construction au voisinage d'une trajectoire périodique elliptique non dégénérée

Dans cette partie, on présente la construction de la forme normale de Birkhoff quantique au voisinage d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée faite dans la partie 5.2.1. Celle-ci reprend les grandes lignes de la construction faite dans [GP10], mais présente essentiellement deux différences sur lesquelles nous reviendrons dans la suite : premièrement la définition des opérateurs polynomiaux (PO) prend ici en compte l'ordre en $\hbar$ et surtout impose aux produits d'opérateurs d'être ordonnés de manière à pouvoir faire correspondre de manière bijective nos opérateurs polynomiaux à un ensemble indicé fini de complexes, et ainsi à ramener la détermination d'un opérateur polynomial (et donc de tout opérateur microlocalement autour de la trajectoire comme nous allons le voir) à la détermination de ces nombres complexes. Deuxièmement, l'opérateur qui conjugue le hamiltonien original à sa forme normale de Birkhoff jusqu'à un certain ordre n'est plus un opérateur intégral de Fourier quelconque, mais l'exponentielle d'un opérateur polynomial, que l'on pourra alors déterminer comme expliqué ci-dessus lors de l'étude de problèmes inverses (Chapitres 4 et 5).

On considère un opérateur pseudodifférentiel semiclassique autoadjoint elliptique $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ sur un variété X de dimension $n+1$, E une valeur régulière de son symbole principal H. On suppose qu'il existe $\delta E > 0$ tel que $H^{-1}([E-\delta E, E+\delta E])$ est compacte. Soit enfin γ une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée du flot hamiltonien engendré par H et d'énergie E.

Pour alléger les notations, on suppose que la plus petite période de γ est 1, et on identifie $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ conformément à la Remarque 2.2.10. D'après la Proposition 2.2.11, si $\theta_1, \dots, \theta_n$ est une réalisation des angles de Poincaré, il existe un symplectomorphisme φ d'un voisinage $\mathcal{U} \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ de $\mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\}$ dans un voisinage $\mathcal{V} \subset T^*(X)$ de γ tel que pour $t \in \mathbb{S}^1$, $\varphi(0, t, 0, 0) = \gamma(t)$ et :

$$H \circ \varphi(x, t, \xi, \tau) = H_0(x, t, \xi, \tau) + O(||(x, \xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.3.37}$$

où $H_0(x, t, \xi, \tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2}$

Puisque la forme normale de Birkhoff est une réduction du hamiltonien au voisinage de γ, on suppose dans la suite que $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ et que :

$$H(x, t, \xi, \tau) = H_0(x, t, \xi, \tau) + O(||(x, \xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.3.38}$$

Commençons par introduire quelques notations :

Définition 2.3.17. Soient A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors on écrit :

$$||A|\mu, \nu\rangle|| = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^N\right) \tag{2.3.39}$$

si :

$$\begin{gathered} \forall M > 0,\ \exists C > 0,\ \forall(\mu, \nu, \hbar) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z} \times [0, 1[, \\ \Big(|\mu\hbar| + |\nu\hbar| < M \Rightarrow ||A|\mu, \nu\rangle||_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)} \leq C(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^N\Big) \end{gathered} \tag{2.3.40}$$

Remarque 2.3.18. Remarquons que les estimations ne dépendent que de A microlocalement dans un voisinage formel de la trajectoire $\mathbb{S}^1 = \{0\} \times \mathbb{S}^1 \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$. Plus précisément, choisissons χ une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact. On suppose de plus qu'il existe $\epsilon > 0$ et $M > 0$ tel que : $\chi = 1$ sur $[-\epsilon, \epsilon]$ et le support de χ est inclus dans $[-M, M]$.

On note $\chi_0 = \chi(P_1 + \cdots + P_n + |D_t|)$ l'opérateur de symbole total de Weyl (à support compact contenant γ) $\sigma^W(\chi_0) : (x, t, \xi, \tau) \mapsto \chi\left(\frac{||(x,\xi)||^2}{2} + |\tau|\right)$.

Alors pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}$, on a :

$$\chi_0|\mu, \nu\rangle = \chi\left(|\mu\hbar| + |\nu\hbar| + \frac{n\hbar}{2}\right)|\mu, \nu\rangle \tag{2.3.41}$$

En particulier, pour $(\mu, \nu, \hbar) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z} \times [0, \frac{\epsilon}{n}[$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \chi_0|\mu,\nu\rangle = |\mu,\nu\rangle & \text{si} & |\mu\hbar| + |\nu\hbar| < \frac{\epsilon}{2} \\ \chi_0|\mu,\nu\rangle = 0 & \text{si} & |\mu\hbar| + |\nu\hbar| > M \end{array} \tag{2.3.42}$$

Donc finalement,

$$||A|\mu,\nu\rangle|| = O(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|^N) \ \Leftrightarrow \ ||A\chi_0|\mu,\nu\rangle|| = O(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|^N) \tag{2.3.43}$$

Définition 2.3.19. Soient A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique et $r \in \mathbb{N}$. On dit que A est *polynomial d'ordre* r (PO(r)) s'il existe une famille d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, $(\alpha_{pjkm})_{(p,j,k,m)\in\mathbb{N}^{2n+2},\ 2p+|j|+|k|+2m=r}$, telle que :

$$A = \sum_{2p+|j|+|k|+2m=r} \alpha_{pjkm}(t)\hbar^p \mathrm{Op}^W(z^j \bar{z}^k) D_t^m \tag{2.3.44}$$

De plus, on dit que A est *sans terme diagonal* si pour tout $(p, j, m) \in \mathbb{N}^{n+2}$, tel que $2(p + |j| + m) = r$, on a : $\int_{\mathbb{S}^1} \alpha_{pjjm}(t)dt = 0$.

Remarque 2.3.20. Comme dans la Remarque 2.3.9, $\int_{\mathbb{S}^1} \alpha_{pjjm}(t)dt$ est, avec l'identification $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier d'ordre 0 de la fonction 1-périodique α_{pjjm}.

Remarque 2.3.21. Une telle écriture est aussitôt unique. La famille (α_{0jkm}) est la famille des coefficients du symbole principal de A, et la famille (α_{pjkm}) se reconstruit ainsi à partir de A par récurrence sur p. On peut également retrouver l'unicité de cette écriture à partir du Lemme 2.3.33.

Remarque 2.3.22. On aurait pu définir de manière équivalente les opérateurs polynomiaux d'ordre r comme les opérateurs dont le symbole total est polynomial de degré r (en $z, \bar{z}, \tau$ et $\hbar$ avec des poids respectifs 1,1,2 et 2). L'intérêt de cette définition réside dans l'unicité de l'écriture (2.3.44), qui facilite ainsi grandement la détermination d'opérateurs polynomiaux lors des problèmes inverses considérés dans cette thèse. Le prix à payer est qu'il est nécessaire de montrer que le produit ou le crochet d'opérateurs polynomiaux peut encore s'écrire sous la forme (2.3.44), comme par exemple dans la preuve [2] du Lemme 2.3.29. Une définition qui permettrait aux produits d'opérateurs a_i, a_i^*, $i \in [\![1, n]\!]$ d'être ordonnés de manière quelconque (comme dans [GP10]) permettrait, elle, d'obtenir immédiatement ces derniers résultats.

On a donc choisi ici le point de vue des opérateurs, mais on aurait également pu travailler uniquement sur les symboles totaux en définissant le produit de symboles comme un produit déformé (comme le produit de Moyal, voir Théorème 1.2.15).

La proposition suivante est essentielle à notre construction de la forme normale de Birkhoff : elle permet de se ramener, dans tous nos calculs, au cas des opérateurs polynomiaux.

2. Celle-ci figure dans le Chapitre 5. Le Lemme 2.3.29 y est renuméroté 5.2.6

Proposition 2.3.23. *Soit A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique. Il existe une unique famille $(\lfloor A \rfloor_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\lfloor A \rfloor_r$ est polynomial d'ordre r et :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\| \left(A - \sum_{r=0}^{N} \lfloor A \rfloor_r \right) |\mu, \nu\rangle \right\| = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \tag{2.3.45}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\lfloor A \rfloor_{\leq N} = \sum_{r=0}^{N} \lfloor A \rfloor_r$.

On peut alors définir une notion d'équivalence asymptotique :

Définition 2.3.24. Soient A et B deux opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques. On définit la relation $\sim$ par :

$$A \sim B \ \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{N}, \ \lfloor A \rfloor_r = \lfloor B \rfloor_r. \tag{2.3.46}$$

Soit $(A_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_N = \{l \in \mathbb{N} \mid \lfloor A_l \rfloor_{\leq N} \neq 0\}$ est fini.

Alors $\sim$ prend le sens suivant :

$$A \sim \sum_{l=0}^{+\infty} A_l \ \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \ \sum_{l \in I_N} \lfloor A_l \rfloor_{\leq N} = \lfloor A \rfloor_{\leq N} \tag{2.3.47}$$

On appelle *développement en PO* la relation :

$$A \sim \sum_{r=0}^{+\infty} \lfloor A \rfloor_r \tag{2.3.48}$$

Esquisse de la démonstration de la Proposition 2.3.23. L'unicité du développement en PO, implicite dans le Chapitre 5, est équivalente au lemme suivant, dont on donne la démonstration à la fin de cette partie :

Lemme 2.3.25. *Soit $(B_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une famille telle que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, B_r est PO(r) et :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{r=0}^{N} B_r |\mu, \nu\rangle \right\|_2 = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \tag{2.3.49}$$

Alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, $B_r = 0$.

En effet, si $(A_r)_{r\in\mathbb{N}}$ et $(A'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ sont deux familles vérifiant les hypothèses de la Proposition 2.3.23, alors $(B_r = A_r - A'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ vérifie celles du Lemme 2.3.25.

Quant à l'existence, on la montre en choisissant pour $\lfloor A \rfloor_r$ l'opérateur ayant pour symbole total les termes d'ordre r dans le symbole total de A. Le lemme clé pour démontrer que cette famille convient est donc le suivant :

Lemme 2.3.26. *Soient A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique et $N \in \mathbb{N}$ tel que le symbole total a de l'opérateur A vérifie au voisinage de $\gamma \times \{0\} = \{x = \xi = \tau = 0\} \times \{\hbar = 0\}$:*

$$a(x,t,\xi,\tau,\hbar) = \sum_{p=0}^{N} O\left(\hbar^p(|z|^2 + |\tau|)^{N-p}\right) \tag{2.3.50}$$

Alors, on a :

$$||A|\mu,\nu\rangle|| = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^N\right). \tag{2.3.51}$$

□

Remarque 2.3.27. Dans le Chapitre 5, on renvoie à [GP10] pour une démonstration du Lemme 2.3.26 à l'aide des états cohérents. Remarquons qu'en utilisant la forme explicite des vecteurs $|\mu,\nu\rangle$ donnée dans la Proposition 2.3.15, on pourrait également déduire du théorème de la phase stationnaire (dont l'énoncé est donné dans [Mar01]) une autre démonstration de ce lemme.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant, donnant notre construction de la forme normale de Birkhoff :

Théorème 2.3.28. *Il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels autoadjoints elliptiques $(\widetilde{W}_{\leq N})_{N\geq 3}$ et une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+2},\mathbb{R})$ telles que :*

$$\left|\left|\left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - h(P_1,\ldots,P_n,D_t,\hbar)\right)|\mu,\nu\rangle\right|\right| = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}}\right) \tag{2.3.52}$$

On appelle alors forme normale de Birkhoff quantique *l'opérateur $h(P_1,\ldots,P_n,D_t,\hbar)$.*

Mieux, on peut construire la famille $\widetilde{W}_{\leq N}$ récursivement de la manière suivante : il existe une famille d'opérateurs $(W_q)_{q\geq 3}$ telle que pour tout $q \geq 3$, W_q est polynomial d'ordre q, sans terme diagonal et symétrique, et telle que :

$$\widetilde{W}_{\leq N} = W_{\leq N} + (D_t^2 + \sum_{i=1}^{n} P_i)^{N+1} \tag{2.3.53}$$

où :

$$W_{\leq N} = \sum_{3\leq q\leq N} W_q \tag{2.3.54}$$

La démonstration du Théorème 2.3.28 repose sur les deux résultats suivants, ainsi que sur le lemme de Borel (Théorème 2.3.32). Des démonstrations du Théorème 2.3.28, du Lemme 2.3.29, et de la Proposition 2.3.30 sont données au Chapitre 5. On donne ici l'esquisse d'une démonstration du Théorème 2.3.28.

Lemme 2.3.29. *Soient F et G deux opérateurs polynomiaux d'ordre r et r' respectivement. Alors $\frac{[F,G]}{i\hbar}$ est un opérateur polynomial d'odre $r + r' - 2$.*

Et en notant toujours $H_0(P,\hbar D_t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i + D_t$:

Proposition 2.3.30. *Soit G un opérateur polynomial d'ordre r. Il existe un opérateur polynomial F d'ordre r et une fonction polynomiale G_1 telles que :*

$$\frac{[H_0(P,D_t),F]}{i\hbar} = G + G_1(P,D_t,\hbar) \tag{2.3.55}$$

De plus, F symétrique si G l'est, $G_1 = 0$ si r est impair, et G_1 est une fonction polynomiale homogène de degré $\frac{r}{2}$ si r est pair.

Remarque 2.3.31. L'hypothèse d'indépendance rationnelle de $\theta_1, \ldots, \theta_n$ et 2π intervient de manière cruciale dans la démonstration de la Proposition 2.3.30.

Plus précisément, si la condition d'indépendance n'est pas vérifiée, on peut trouver $(k_1, \ldots, k_n, p) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \theta_i k_i + 2\pi p = 0$, et l'opérateur polynomial $G = e^{2i\pi pt}\mathrm{Op}^W(z^{\max(0,k)}\bar{z}^{\max(0,k)})$ met la Proposition 2.3.30 en défaut.

Théorème 2.3.32 (Lemme de Borel,[AG91])**.** *Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, a_j est polynomial de valuation $\nu(a_j)$. On suppose de plus que pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_N = \{j \in \mathbb{N} \mid \nu(a_j) \leq N\}$ est fini. Alors il existe une fonction $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ à support compact telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a au voisinage de $x = 0 \in \mathbb{R}^n$:*

$$a(x) = \sum_{j\in I_N} a_j(x) + O(||x||^{N+1}) \tag{2.3.56}$$

On écrit alors :

$$a \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \tag{2.3.57}$$

Esquisse de la démonstration du Théorème 2.3.28. On se donne le développement en PO de $H(x,\hbar D_x,\hbar)$:

$$H = H(x,\hbar D_x,\hbar) \sim H_0(P,D_t) + \sum_{q=3}^{+\infty} H_q \tag{2.3.58}$$

où pour $q \geq 3$, $H_q := \lfloor H(x,\hbar D_x,\hbar)\rfloor_q$

Soit $N \geq 3$. Supposons l'opérateur polynomial $\widetilde{W}_{\leq N}$ construit. En notant $\mathrm{ad}_{\frac{i}{\hbar}\widetilde{W}_{\leq N}} = \frac{i}{\hbar}[\widetilde{W}_{\leq N}, \cdot]$, on a une action sur le développement en PO de H donnée par :

$$e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \sim \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!}\mathrm{ad}^q_{\frac{i}{\hbar}\widetilde{W}_{\leq N}}(H) \tag{2.3.59}$$

Cette dernière relation est bien définie au sens de la Définition 2.3.24 puisque la décomposition en PO de l'opérateur $\mathrm{ad}^q_{\frac{i}{\hbar}\widetilde{W}_{\leq N}}(H)$ ne contient aucun PO(i) avec $i \leq 2+q$ d'après le Lemme 2.3.29.

L'idée de la démonstration est alors de construire la suite $(W_q)_{q\geq 3}$ par récurrence. Pour alléger les notations, notons : $A = B + PO(N)$ si les décompositions en PO de A et B coïncident jusqu'à l'ordre $N-1$ inclus.

Posons $W_{\leq 2} = 0$. On a alors : $e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq 2}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq 2}}{\hbar}} = H_0(P, D_t) + PO(3)$.

Soit $N \geq 3$. Supposons construits $(W_q)_{3\leq q\leq N}$ des opérateurs polynomiaux et $(H^q)_{3\leq q\leq N}$ des fonctions polynomiales tels :

(i) pour tout $q \in [\![3, N]\!]$, W_q est polynomial d'ordre q, sans terme diagonal et symétrique.

(ii) pour tout $q \in [\![3, N]\!]$, H^q est polynomiale homogène de degré $\frac{q}{2}$ si q est pair, nulle si q est impair.

(iii) $e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} = H_0(P, D_t) + \sum\limits_{q=3}^{N} H^q(P, D_t, \hbar) + PO(N+1)$, où $\widetilde{W}_{\leq N}$ est défini en (2.4.40),(2.4.41).

Soit G_{N+1} l'unique opérateur polynomial d'ordre $N+1$ tel que :

$$G_{N+1} = e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - H_0(P, D_t) - \sum_{q=3}^{N} H^q(P, D_t, \hbar) + PO(N+2) \qquad (2.3.60)$$

G_{N+1} est symétrique, et la Proposition 2.3.30 donne l'existence d'un opérateur polynomial d'ordre W_{N+1}, symétrique et sans terme diagonal, et d'une fonction polynomiale H^{N+1}, homogène de degré $\frac{N+1}{2}$ si N est impair, nulle si N est pair, tels que :

$$\frac{[H_0(P, D_t), W_{N+1}]}{i\hbar} = G_{N+1} + H^{N+1}(P, D_t, \hbar) \qquad (2.3.61)$$

On vérifie alors par utilisations successives du Lemme 2.3.29 que si $\widetilde{W}_{\leq N}$ est défini comme en (2.4.40),(2.4.41) :

$$e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N+1}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N+1}}{\hbar}} = H_0(P, D_t) + \sum_{q=3}^{N+1} H^q(P, D_t, \hbar) + PO(N+2) \qquad (2.3.62)$$

La construction par récurrence est achevée, et il ne reste plus qu'à construire la fonction h au voisinage de $p = \tau = \hbar = 0$ grâce au lemme de Borel (Théorème 2.3.32), dont les fonctions H^q vérifient bien les hypothèses :

$$h \sim H_0 + \sum_{q=3} H^q \qquad (2.3.63)$$

$\square$

Démonstration du Lemme 2.3.25. Avant de démontrer le Lemme 2.3.25, énonçons le lemme suivant, dont la preuve est donnée ci-après.

Lemme 2.3.33. *Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, et $(j_1, k_1, m_1), (j_2, k_2, m_2) \in (\mathbb{N}^n)^2 \times \mathbb{N}$. On suppose que $j_1 + k_2 \neq j_2 + k_1$. Alors pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}$, les vecteurs de $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$:*

$$\alpha(t)\mathrm{Op}^W(z^{j_1}\bar{z}^{k_1})D_t^{m_1}|\mu,\nu\rangle \quad et \quad \beta(t)\mathrm{Op}^W(z^{j_2}\bar{z}^{k_2})D_t^{m_2}|\mu,\nu\rangle$$

sont orthogonaux.

De plus, on a :

$$\left\|\alpha(t)\mathrm{Op}^W(z^{j_1}\bar{z}^{k_1})D_t^{m_1}|\mu,\nu\rangle\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1)} \sim ||\alpha||_{L^2(\mathbb{S}^1)}\, \mu^{\frac{j_1+k_1}{2}}|\nu|^{m_1}\hbar^{\frac{|j_1|+|k_1|}{2}+m_1} \tag{2.3.64}$$

où l'équivalent $\sim$ est pris dans la limite $\mu_i \to +\infty$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Remarque 2.3.34. On a étendu ici la Définition 2.3.2 aux n-uplets de demi-entiers : $\mu^{\frac{j+k}{2}}$ désigne le produit $\prod_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}^{j_i+k_i}$.

Soit $(\beta_{pjkm})_{(p,j,k,m)\in\mathbb{N}\times(\mathbb{N}^n)^2\times\mathbb{N}}$ la famille d'élements de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ telle que :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ B_r = \sum_{2p+|j|+|k|+2m=r} \beta_{pjkm}(t)\hbar^p\mathrm{Op}^W(z^j\bar{z}^k)D_t^m \tag{2.3.65}$$

Supposons que $(B_r)_{r\in\mathbb{N}}$ n'est pas la famille nulle, et notons r_0 le plus petit entier r tel que $B_r \neq 0$. On a alors :

$$\mathcal{E} = \{(p, j, k, m) \in \mathbb{N}\times(\mathbb{N}^n)^2\times\mathbb{N} \mid 2p+|j|+|k|+2m = r_0, \beta_{pjkm} \neq 0\} \neq \emptyset \tag{2.3.66}$$

Soit (p_0, s_0, m_0) comme le plus petit élément au sens de l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^{n+2}$ de l'ensemble $\{(p, j + k, m) \mid (p, j, k, m) \in \mathcal{E}\}$.

L'ensemble $\mathcal{E}' = \{(p, j, k, m) \in \mathcal{E} \mid (p, j + k, m) = (p_0, s_0, m_0)\}$ est non vide, et deux éléments distincts (p_0, j_1, k_1, m_0) et (p_0, j_2, k_2, m_0) de $\mathcal{E}'$ vérifient nécessairement $j_1 + k_2 \neq j_2 + k_1$ (car $j_1 + k_1 = j_2 + k_2 = s_0$). Choisissons μ, ν des fonctions de $\hbar \in [0, 1[$ dans $\mathbb{N}^n$ et $\mathbb{Z}$ respectivement, tendant toutes vers $+\infty$ quand $\hbar$ tend vers 0 et telles que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \frac{\mu_i}{\nu} \underset{\hbar\to 0}{=} o\left(\left(\frac{\mu_{i+1}}{\nu}\right)^{r_0}\right) \text{(en posant } \mu_0 = 1,\ \mu_{n+1} = \nu). \tag{2.3.67}$$

Supposons avoir montré que pour tout $(p, j, k, m) \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$

$$\mu^{\frac{j+k}{2}}\nu^m \underset{\hbar\to 0}{=} o\left(\mu^{\frac{s_0}{2}}\nu^{m_0}\right) \tag{2.3.68}$$

On aura d'après le Lemme 2.3.33 :

$$\|B_{r_0}|\mu,\nu\rangle\|_2 \underset{\hbar\to 0}{\sim} \sqrt{\sum_{(p,j,k,m)\in\mathcal{E}'} ||\beta_{pjkm}||^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}\mu^{\frac{s_0}{2}}|\nu|^{m_0}\hbar^{\frac{r_0}{2}}} \tag{2.3.69}$$

et (2.3.69) est bien incompatible avec les hypothèses du Lemme 2.3.25 (en choisissant $N = r_0$ dans (2.3.49)).

Montrons donc que l'équation (2.3.68) est bien vérifiée sous la condition (2.3.67). Deux cas se présentent alors :

1. $p > p_0$. Dans ce cas, on a d'après (2.3.67) :
$$\mu^{\frac{j+k}{2}}|\nu|^m \underset{\hbar\to 0}{=} O\left(|\nu|^{\frac{r_0-2p}{2}}\right) \underset{\hbar\to 0}{=} o\left(\mu_1^{\frac{r_0-2p_0}{2}}\right), \text{ et } \mu_1^{\frac{r_0-2p_0}{2}} \underset{\hbar\to 0}{=} O\left(\mu^{\frac{s_0}{2}}|\nu|^{m_0}\right) \tag{2.3.70}$$
2. $p = p_0$. Dans ce cas, $j+k \neq s_0$ (car sinon $m = m_0$ et $(p,j,k,m) \in \mathcal{E}'$). Soit alors $i \in [\![1,n]\!]$ le plus petit indice tel que $j_i + k_i > s_{0,i}$ (on a alors $j_l + k_l = s_{0,l}$ pour $l < i$). D'après (2.3.67) :
$$\begin{aligned} \mu^{j+k}|\nu|^{2m} &\underset{\hbar\to 0}{=} O\left(\prod_{l=1}^{i}\mu_l^{s_{0,l}}.\mu_i\nu^{r_0-\sum_{l=1}^{i}s_{0,l}-2p_0-1}\right) \\ &\underset{\hbar\to 0}{=} o\left(\prod_{l=1}^{i}\mu_l^{\frac{s_{0,l}}{2}}\mu_{i+1}^{\frac{r_0-2p_0-\sum_{l=1}^{i}s_{0,l}}{2}}\right) \end{aligned} \tag{2.3.71}$$
et
$$\prod_{l=1}^{i}\mu_l^{\frac{s_{0,l}}{2}}\mu_{i+1}^{\frac{r_0-2p_0-\sum_{l=1}^{i}s_{0,l}}{2}} \underset{\hbar\to 0}{=} O\left(\mu^{\frac{s_0}{2}}|\nu|^{m_0}\right) \tag{2.3.72}$$

Dans les deux cas, on a bien (2.3.68).

□

Démonstration du lemme 2.3.33. Remarquons d'abord que par (2.3.15), il existe une fonction f_{jk} définie sur $\mathbb{R}_+^n$, telle que :

(i) pour tout $(\mu,\nu) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}$:
$$\mathrm{Op}^W(z^j\bar{z}^k)D_t^m|\mu,\nu\rangle = f_{jk}(\mu)\nu^m\,\hbar^{\frac{|j|+|k|}{2}+m}|\mu+k-j,\nu\rangle \tag{2.3.73}$$

(ii)
$$f_{jk}(\mu) \sim \mu^{\frac{j+k}{2}} \text{ lorsque } \mu_i \to +\infty(\forall i \in [\![1,n]\!]) \tag{2.3.74}$$

Alors, en notant pour $p \in \mathbb{Z}$, α_p le p-ième coefficient de Fourier de la fonction α, vue comme 1-périodique :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\alpha_p e^{2i\pi pt}, \tag{2.3.75}$$
on a la somme hilbertienne :
$$\alpha(t)\mathrm{Op}^W(z^j\bar{z}^k)D_t^m|\mu,\nu\rangle = f_{jk}(\mu)\nu^m\,\hbar^{\frac{|j|+|k|}{2}+m}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\alpha_p\,|\mu+k-j,\nu+p\rangle \tag{2.3.76}$$

Or, pour tout $s \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$ les vecteurs $|\mu,\nu\rangle$ et $|\mu+s,\nu+p\rangle$ sont orthogonaux, ce qui suffit à prouver le premier point du lemme.

Le deuxième est prouvé par l'égalité :
$$\begin{aligned} \left|\left|\alpha(t)\mathrm{Op}^W(z^j\bar{z}^k)D_t^m|\mu,\nu\rangle\right|\right|_2^2 &= f_{jkm}^2(\mu)\nu^{2m}\,\hbar^{|j|+|k|+2m}\sum_{p\in\mathbb{Z}}|\alpha_p|^2 \\ &= f_{jkm}^2(\mu)\nu^{2m}\,\hbar^{|j|+|k|+2m}\,||\alpha||_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 \end{aligned} \tag{2.3.77}$$

□

2.3.3 Construction au voisinage d'un fond de puits

Dans cette partie, on donne les énoncés des définitions et propositions analogues à celle de la partie suivante dans le cas du fond du puits. Plus précisément, on considère un opérateur semiclassique autoadjoint elliptique $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ sur une variété X de dimension n, et m un point en lequel H admet un minimum non-dégénéré E.

D'après la Proposition 2.2.1 et la Remarque 2.2.3, on peut trouver un symplectormorphisme φ d'un voisinage de $(0,0)$ dans $T^*(\mathbb{R}^n)$ dans un voisinage de m dans $T^*(X)$, et des réels strictement positifs $\theta_1, \ldots, \theta_n$, uniques à permutation près, tels que :

$$H \circ \phi(x,\xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x,\xi)||^3\right) \tag{2.3.78}$$

Comme dans la partie 2.3.2, on suppose dans la suite que $X = \mathbb{R}^n$ et que :

$$H(x,\xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x,\xi)||^3\right) \tag{2.3.79}$$

On a alors les analogues des Définitions 2.3.17 et 2.3.19 :

Définition 2.3.35. Soient A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique et $N \in \mathbb{N}$. Alors on écrit :

$$||A|\mu\rangle|| = O(|\mu\hbar|^N) \tag{2.3.80}$$

si :

$$\begin{gathered}\forall M > 0,\ \exists C > 0,\ \forall (\mu,\hbar) \in \mathbb{N}^n \times [0,1[,\\ \left(|\mu\hbar| < M \Rightarrow ||A|\mu\rangle||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C|\mu\hbar|^N\right)\end{gathered} \tag{2.3.81}$$

Définition 2.3.36. Soient A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique et $r \in \mathbb{N}$. On dit que A est *polynomial d'ordre r* (PO(r)) s'il existe une famille d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, $(\alpha_{pjk})_{(p,j,k) \in \mathbb{N}^{2n+1},\ 2p+|j|+|k|=r}$, telle que :

$$A = \mathrm{Op}^W \left(\sum_{2p+|j|+|k|=r} \alpha_{pjk} \hbar^p z^j \bar{z}^k \right) \tag{2.3.82}$$

De plus, on dit que A est *sans terme diagonal* si pour tout $(p,j) \in \mathbb{N}^{n+1}$, tel que $2(p+|j|) = r$, on a : $\alpha_{pjj} = 0$.

L'existence du développement en PO prend ici la forme suivante (dont la démonstration est tout point analogue à celle de la Proposition 2.3.23 :

Proposition 2.3.37. *Soit A un opérateur pseudodifférentiel semiclassique. Il existe une unique famille $(\lfloor A \rfloor_r)_{r \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\lfloor A \rfloor_r$ est polynomial d'ordre r et :*

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\left| \left(A - \sum_{r=0}^{N} \lfloor A \rfloor_r \right) |\mu\rangle \right|\right| = O\left(|\mu\hbar|^{\frac{N+1}{2}}\right) \tag{2.3.83}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\lfloor A \rfloor_{\leq N} = \sum_{r=0}^{N} \lfloor A \rfloor_r$.

La relation $\sim$ est alors définie exactement comme dans la Définition 2.3.24. Finalement, la construction de la forme normale de Birkhoff est donnée par la proposition suivante :

Théorème 2.3.38. *Supposons que les réels $\theta_1, \dots, \theta_n$ définis par la relation* (2.3.79) *sont rationnellement indépendants. Alors il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels autoadjoints elliptiques $(\widetilde{W}_{\leq N})_{N\geq 3}$ et une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ telles que :*

$$\left\| \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - h(P_1, \dots, P_n, \hbar) \right) |\mu\rangle \right\| = O(|\mu\hbar|^{\frac{N+1}{2}}) \tag{2.3.84}$$

On appelle alors forme normale de Birkhoff quantique *l'opérateur $h(P_1, \dots, P_n, \hbar)$.*

Mieux, on peut construire la famille $\widetilde{W}_{\leq N}$ récursivement de la manière suivante : il existe une famille d'opérateurs $(W_q)_{q\geq 3}$ telle que pour tout $q \geq 3$, W_q est polynomial d'ordre q, sans terme diagonal et symétrique, et telle que :

$$\widetilde{W}_{\leq N} = W_{\leq N} + (\sum_{i=1}^{n} P_i)^{N+1} \tag{2.3.85}$$

où :

$$W_{\leq N} = \sum_{3\leq q\leq N} W_q \tag{2.3.86}$$

La démonstration du Théorème 2.3.38 est une adaptation immédiate de celle du Théorème 2.3.28 et repose donc en particulier sur l'analogue de la Proposition 2.3.30 suivant, où l'on a noté $H_0(P) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i$:

Proposition 2.3.39. *Soit G un opérateur polynomial d'ordre r. Il existe un opérateur polynomial F d'ordre r et une fonction polynomiale G_1 tels que :*

$$\frac{[H_0(P), F]}{i\hbar} = G + G_1(P, \hbar) \tag{2.3.87}$$

De plus, F symétrique si G l'est, $G_1 = 0$ si r est impair, et G_1 est une fonction polynomiale homogène de degré $\frac{r}{2}$ si r est pair.

Remarque 2.3.40. Ici encore, la Proposition 2.3.39 n'est valable que sous la condition nécessaire d'indépendance rationnelle des réels $\theta_1, \dots, \theta_n$. Le même contre-exemple que dans la Remarque 2.3.31 la met en défaut dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite.

2.4 Construction de la forme normale de Birkhoff classique

Dans les parties 2.4.1 et 2.4.2, on présente une construction purement classique de la forme normale de Birkhoff dans les deux cas d'étude de cette thèse : au voisinage d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée et au voisinage d'un fond de puits. On en donne une seconde dans la partie 2.4.3, déduite de la construction quantique présentée dans la partie 2.3 par passage à la limite semiclassique.

2.4.1 Au voisinage d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée

On considère ici un hamiltonien H sur un variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$ de dimension $2n+2$, E une valeur régulière de H. On suppose qu'il existe $\delta E > 0$ tel que $H^{-1}\left([E-\delta E, E+\delta E]\right)$ est compacte. Soit enfin γ une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée du flot hamiltonien engendré par H de plus petite période 1 et d'énergie E.

La construction de la forme normale de Birkhoff classique associée à H est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. *Soit $\theta_1, \ldots, \theta_n$ une réalisation (quelconque) des angles de Poincaré associés à γ. Alors il existe un symplectomorphisme φ d'un voisinage $\mathcal{U} \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ de $\mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\}$ dans un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de γ tel que pour $t \in \mathbb{S}^1$, $\varphi(0, t, 0, 0) = \gamma(t)$ et :*

$$\forall (x, t, \xi, \tau) \in \mathcal{U}, \; H \circ \varphi(x, t, \xi, \tau) = H_1(p, \tau) + H_2(x, t, \xi, \tau) \tag{2.4.1}$$

où $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ vérifie au voisinage de $p = \tau = 0$:

$$H_1(p) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \theta_i p_i + O(||p||^2 + \tau^2) \tag{2.4.2}$$

et H_2 s'annule à tout ordre[3] *en $x = \xi = \tau = 0$.*

On appelle alors forme normale de Birkhoff *du hamiltonien classique H la fonction $(x, t, \xi, \tau) \mapsto H_1\left(p(x, \xi), \tau\right)$.*

Remarque 2.4.2. Conformément à la Définition 2.3.5, rappelons que $H_1(p, \tau)$ est à prendre dans un sens variant selon le contexte. Ainsi, dans (2.4.1), il désigne $H_1(p(x, \xi), \tau)$, alors qu'il est dans (2.4.2) l'image par la fonction H_1 de $(p, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On rappelle également la définition :

Définition 2.4.3. Soient $G \in \mathcal{C}^\infty\left(T^*\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1\right), \mathbb{R}\right)$ et $k \in \mathbb{N}$.

On dit que :

- *G s'annule jusqu'à l'ordre k* en $x = \xi = \tau = 0$ si, au voisinage de $\{0\} \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ et dans les coordonnées canoniques de $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$, on a : $G\left(x, t, \xi, \tau\right) = O\left(\left(||(x, \xi)||^2 + |\tau|\right)^{\frac{k}{2}}\right)$.
- *G s'annule à tout ordre* en $x = \xi = \tau = 0$ si pour tout $l \in \mathbb{N}$, G s'annule jusqu'à l'ordre l en $x = \xi = \tau = 0$. On écrit alors $G\left(x, \xi\right) = O\left(\left(||(x, \xi)||^2 + |\tau|\right)^\infty\right)$.

3. Voir la Définition 2.4.3.

La démonstration du Théorème 2.4.1 repose sur le lemme de Borel (Théorème 2.3.32) et sur les analogues classiques du Lemme 2.3.29 et de la Proposition 2.3.30 : le Lemme 2.4.4 et la Proposition 2.4.8. Même si elle peut se déduire de la construction quantique (ce que l'on montrera dans la partie 2.4.3), la construction classique est beaucoup plus simple : contrairement aux opérateurs polynomiaux de la partie 2.3, la stabilité par produit et crochet des fonctions polynomiales homogènes est immédiate, tandis que les analogues du développement en PO et de la relation $\sim$ (voir Définition 2.3.24) se définissent ici simplement à l'aide de développements de Taylor.

L'analogue classique du Lemme 2.3.29, dont la preuve est donnée à la fin de cette partie, s'énonce comme suit :

Lemme 2.4.4. *Soient F et G deux fonctions polynomiales homogènes*[4] *de degré k et r respectivement. Alors $\{F, G\}$ est polynomiale homogène de degré $k + r - 2$.*

Remarque 2.4.5. Avec nos notations, la fonction nulle est polynomiale homogène de degré quelconque. Par exemple, si $F = G$ dans le Lemme 2.4.4, le crochet $\{F, G\}$ est nul, et la conclusion du lemme tient toujours.

La Définition 2.3.24, quant à elle, devient :

Définition 2.4.6. Soient $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}$. On définit $\lfloor F \rfloor_N$ (resp. $\lfloor F \rfloor_{\leq N}$) comme la somme des termes polynomiaux homogènes de degré N (resp. au plus N) intervenant dans le développement de Taylor de F par rapport à x, ξ, τ au voisinage de $x = \xi = \tau = 0$.

On définit alors la valuation de F, $\nu(F)$, comme le plus petit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor F \rfloor_N \neq 0$ (si l'ensemble des tels N est vide, alors $\nu(F) = +\infty$).

Soient F et G deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$. On définit la relation $\sim$ par :

$$F \sim G \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \lfloor F \rfloor_N = \lfloor G \rfloor_N \tag{2.4.3}$$

Si $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_N = \{j \in \mathbb{N} \mid \nu(F_j) \leq N\}$ est fini, alors $\sim$ prend le sens suivant :

$$F \sim \sum_{j=0}^{+\infty} F_j \ \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{j \in I_N} \lfloor F_j \rfloor_{\leq N} = \lfloor F \rfloor_{\leq N} \tag{2.4.4}$$

Remarque 2.4.7. Avec ces nouvelles notations, l'équation (2.4.1) du Théorème 2.4.1 se réécrit :

$$H \circ \varphi \sim H_1(p, \tau) \tag{2.4.5}$$

où, ici, $H_1(p, \tau)$ désigne la fonction $(x, t, \xi, \tau) \mapsto H_1(p(x, \xi), \tau)$.

Rappelons alors le résultat général suivant : soit $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ de valuation au moins 3. Au sens des séries formelles, on a alors le résultat propre aux groupes et algèbres de Lie suivant (voir par exemple [VuN06]) :

4. La définition des fonctions polynomiales homogènes et de leur degré est donnée dans la Définition 2.3.6. On remarquera que le degré a la particularité ici d'être pondéré.

$$H \circ \varphi \circ \exp \chi_F = \exp(\mathrm{ad}_F)(H \circ \varphi) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}_F^i (H \circ \varphi) \tag{2.4.6}$$

où $\mathrm{ad}_F : \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}) \ni G \mapsto \{F, G\} \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$.

Cette égalité *au sens des séries formelles* est à prendre ici au sens suivant : comme la valuation de F est au moins 3, on déduit du Lemme 2.4.4 que les fonctions $\mathrm{ad}_F^i(H)$ ont une valuation au moins $2 + i$. Donc :

$$H \circ \varphi \circ \exp \chi_F \sim \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}_F^i (H \circ \varphi) \tag{2.4.7}$$

au sens de la Définition 2.4.6.

On donne enfin l'analogue classique de la Proposition 2.3.30 :

Proposition 2.4.8. *Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n$ une réalisation des angles de Poincaré, et H_0 la fonction définie par :*

$$\forall (x, t, \xi, \tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1),\ H_0(x, t, \xi, \tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} \tag{2.4.8}$$

Soit $G \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ une fonction polynomiale homogène de degré $k \geq 3$. Alors, il existe un unique couple de fonctions $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ et $G_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1),\ \{H_0, F\}(x, t, \xi, \tau) = G(x, t, \xi, \tau) - G_1(p, \tau) \tag{2.4.9}$$

et F est polynomiale sans terme diagonal[5].

De plus, on a :

1. *F est polynomiale homogène de degré k et est entièrement déterminée par les termes extra-diagonaux de G.*
2. *G_1 est polynomiale homogène de degré $\frac{k}{2}$ si k est pair, nulle sinon. De plus, $G_1(z\bar{z})$ est exactement égal à la somme des termes diagonaux de G.*

Remarque 2.4.9. La démonstration de la Proposition 2.4.8, donnée ci-dessous, prouve même mieux : si (F, G_1) est solution de l'équation (2.4.9), alors F et G_1 sont nécessairement polynomiales modulo une fonction s'annulant à tout ordre en $x = \xi = \tau = 0$.

Remarque 2.4.10. Dans cette partie, seul le résultat d'existence nous est utile. On se servira de l'unicité dans la partie 2.5.

5. voir la Définition 2.3.8

Démonstration du Théorème 2.4.1. D'après la Proposition 2.2.11, il existe un symplectomorphisme φ d'un voisinage $\mathcal{U} \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ de $\mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\}$ dans un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de γ tel que pour $t \in \mathbb{S}^1$, $\varphi(0, t, 0, 0) = \gamma(t)$ et :

$$H \circ \varphi(x, t, \xi, \tau) = H_0(x, t, \xi, \tau) + O(||(x, \xi)||^3 + \tau^2) \tag{2.4.10}$$

En posant $F_2 = 0$, et $H_2 : \mathbb{R}^{n+1} \ni (p, \tau) \mapsto E + \tau + \sum_{i=1}^n \theta_i p_i$, on a au voisinage de $\mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\}$:

$$H \circ \varphi \circ \exp \chi_{F_2}(x, t, \xi, \tau) = H_2(p, \tau) + O\left((||(x, \xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{3}{2}}\right) \tag{2.4.11}$$

Soit $N \geq 2$. Supposons avoir construit des fonctions $(F_k)_{2 \leq k \leq N}$ et $(H_k)_{2 \leq k \leq N}$ telles que pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, $F_k \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ est polynomiale homogène de degré k et $H_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ est polynomiale homogène de degré $\frac{k}{2}$ si k est pair, nulle sinon, et telles qu'au voisinage de $\mathbb{S}^1$:

$$H \circ \phi \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x, t, \xi, \tau) = \sum_{k=2}^{N} H_k(p, \tau) + O\left((||(x, \xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}}\right) \tag{2.4.12}$$

où $F_{\leq N} = \sum_{i=2}^N F_k$.

Soit G_{N+1} la fonction polynomiale homogène d'ordre $N + 1$ définie à l'aide de la Définition 2.4.6 par :

$$G_{N+1} = \lfloor H \circ \phi \circ \exp \chi_{F_{\leq N}} \rfloor_{N+1} \tag{2.4.13}$$

On a alors au voisinage de $x = \xi = \tau = 0$:

$$\begin{aligned} G_{N+1}(x, t, \xi, \tau) = H \circ \phi \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x, t, \xi, \tau) - \sum_{k=2}^{N} H_k(p, \tau) \\ + O\left((||(x, \xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+2}{2}}\right) \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

La Proposition 2.4.8 nous donne l'existence de fonctions F_{N+1} et H^{N+1} telles que :

1. $F_{N+1} \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ est polynomiale homogène d'ordre $N + 1$.
2. $H_{N+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ est polynomiale homogène de degré $\frac{N+1}{2}$ si N est impair, nulle sinon.

et telles que pour $(x, t, \xi, \tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$:

$$\{H_0, F_{N+1}\}(x, t, \xi, \tau) = G_{N+1}(x, t, \xi, \tau) - H_{N+1}(p, \tau) \tag{2.4.15}$$

On a alors au voisinage de $\mathbb{S}^1$:

$$
\begin{aligned}
& H \circ \varphi \circ \exp \chi_{F_{\leq N+1}}(x,t,\xi,\tau) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}^i_{F_{\leq N+1}}(H \circ \varphi)(x,t,\xi,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+2}{2}} \right) \\
&= \left[H \circ \varphi + \{F_{\leq N}, H \circ \varphi\} + \{F_{N+1}, H_0\} + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}^i_{F_{\leq N+1}}(H \circ \varphi) \right] (x,t,\xi,\tau) \\
&\quad + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+2}{2}} \right) \\
&= \left[\{F_{N+1}, H_0\} + H \circ \varphi + \{F_{\leq N}, H \circ \varphi\} + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}^i_{F_{\leq N}}(H \circ \varphi) \right] (x,t,\xi,\tau) \\
&\quad + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+2}{2}} \right) \\
&= \left[\{F_{N+1}, H_0\} + H \circ \varphi \circ \exp \chi_{F_{\leq N}} \right] (x,t,\xi,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+2}{2}} \right) \\
&= \left[\{F_{N+1}, H_0\} + G_{N+1} \right] (x,t,\xi,\tau) + \sum_{k=2}^{N} H_k(p,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+2}{2}} \right) \\
&= \sum_{k=2}^{N+1} H_k(p,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+2}{2}} \right)
\end{aligned}
$$

où l'on a déduit du Lemme 2.4.4 et utilisé :

1. à la première ligne que : $\mathrm{ad}^i_{F_{\leq N+1}}(H \circ \varphi)$ s'annule jusqu'à l'ordre $2+i$ en $x = \xi = \tau = 0$.
2. à la deuxième que : $\{F_{N+1}, H \circ \varphi - H_0\}$ s'annule jusqu'à l'ordre $N+2$ en $x = \xi = \tau = 0$.
3. à la troisième que pour $i \geq 2$, $\mathrm{ad}^i_{F_{\leq N+1}}(H \circ \varphi) - \mathrm{ad}^i_{F_{\leq N}}(H \circ \varphi)$ s'annule jusqu'à l'ordre $N+i$ en $x = \xi = \tau = 0$.
4. à la quatrième que : $\mathrm{ad}^i_{F_{\leq N}}(H \circ \varphi)$ s'annule également jusqu'à l'ordre $2+i$ en $x = \xi = \tau = 0$.

puis on a utilisé :

1. à la cinquième ligne l'équation (2.4.14)
2. à la dernière ligne l'équation (2.4.15).

On a donc construit par récurrence des fonctions $(F_N)_{N \geq 2}$ et $(H_N)_{N \geq 2}$ telles que pour tout $N \geq 2$, $F_N \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ est polynomiale homogène de degré N et $H_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ est polynomiale homogène de degré $\frac{N}{2}$ si N est pair, nulle sinon, et telles qu'au voisinage de $\mathbb{S}^1$:

$$
H \circ \phi \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,t,\xi,\tau) = \sum_{k=2}^{N} H_k(p,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \tag{2.4.16}
$$

où $F_{\leq N} = \sum_{k=2}^{N} F_k$.

On déduit alors du lemme de Borel (Théorème 2.3.32) l'existence de fonctions $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ et $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ telles que :

$$F \sim \sum_{N=2}^{+\infty} F_N \tag{2.4.17}$$

et :

$$H_1 \sim \sum_{N=2}^{+\infty} H_N \tag{2.4.18}$$

Soit $N \geq 2$. Par la même succesion d'arguments que précédemment, on a au voisinage de $x = \xi = \tau = 0$:

$$\begin{aligned} H \circ \varphi \circ \exp \chi_F(x,t,\xi,\tau) &= H \circ \varphi \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{N} H_k(p,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \\ &= H_1(p,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Or l'équation (2.4.19) est valable pour tout $N \geq 2$, donc :

$$H \circ \varphi \circ \exp \chi_F \sim H_1(p,\tau) \tag{2.4.20}$$

Il suffit maintenant pour conclure la preuve du Théorème 2.4.1 de vérifier que $\psi = \varphi \circ \exp(\chi_F)$ vérifie bien : pour tout $t \in \mathbb{S}^1$, $\psi(0,t,0,0) = \gamma(t)$. Or, F s'annule jusqu'à l'ordre 3 en $x = \xi = \tau$, donc $\exp \chi_F$ laisse invariant tout point $(0,t,0,0)$ (avec $t \in \mathbb{S}^1$) et $\varphi(0,t,0,0) = \gamma(t)$. Finalement, on a bien $\psi(0,t,0,0) = \gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{S}^1$. $\square$

Il nous reste maintenant à prouver le Lemme 2.4.4 et la Proposition 2.4.8. La démonstration du lemme est immédiate :

Démonstration du Lemme 2.4.4. Soient F et G deux fonctions polynomiales homogènes de degrés k et r respectivement. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les fonctions $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial F}{\partial \xi_j}$ (resp. $\frac{\partial G}{\partial \xi_j}$ et $\frac{\partial G}{\partial x_j}$) sont polynomiales homogènes de degré $k-1$ (resp. $r-1$). De plus, $\frac{\partial F}{\partial t}$ et $\frac{\partial G}{\partial t}$ sont polynomiales homogènes de degré k et r respectivement, et les fonctions $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial G}{\partial \tau}$ sont polynomiales homogènes de degré $k-2$ et $r-2$ respectivement. Finalement, $\{F,G\}$ est bien une fonction polynomiale homogènes de degré $k+r-2$. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.4.8. Par linéarité, il suffit de prouver la proposition dans le cas où $G \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{C})$ est un monôme d'ordre $r \geq 3$ en $(z, \bar{z}, \tau)$: $G = \alpha z^j \bar{z}^k \tau^m$, avec $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, $(j,k,m) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ et $|j| + |k| + 2m = r$.

On cherche alors F sous la forme : $F = \beta z^j \bar{z}^k \tau^m$ avec $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, et F extra-diagonal ou nul (au sens de la Définition 2.3.8) *i.e.* $\int_{\mathbb{S}^1} \beta(t)dt = 0$ si $j = k$.

Le crochet de Poisson de H_0 et F est alors donné par l'équation (2.3.6) :

$$\{H_0, F\} = -i\beta \sum_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) z^j \bar{z}^k \tau^m - \beta' z^j \bar{z}^k \tau^m \tag{2.4.21}$$

Donc F est solution de $\{H_0, F\} = G$ et est extra-diagonal si et seulement si β est solution de :

$$\beta \sum_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) - i\beta' = i\alpha \text{ (et } \int_{\mathbb{S}^1} \beta(t)dt = 0 \text{ si } j = k) \tag{2.4.22}$$

En notant pour $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(\alpha)$ et $c_p(\beta)$ les coefficients de Fourier d'ordre p de α et β respectivement, l'équation (2.4.22) est équivalente à :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \ \left(\sum_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) + 2\pi p\right) c_p(\beta) = ic_p(\alpha) \text{ (et } c_0(\beta) = 0 \text{ si } j = k) \tag{2.4.23}$$

Du fait de l'indépendance rationnelle de $\theta_1, \ldots, \theta_n$ et 2π, on a : $\sum\limits_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) + 2\pi p \neq 0$ dès que $p \neq 0$. Donc (2.4.22) est équivalente à :

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*, \ c_p(\beta) = \frac{ic_p(\alpha)}{\sum\limits_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) + 2\pi p} \text{ et } \begin{cases} c_0(\beta) \sum\limits_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) = ic_0(\alpha) \\ c_0(\beta) = 0 \text{ si } j = k \end{cases} \tag{2.4.24}$$

On distingue alors deux cas :

Cas 1. G est extra-diagonal, *i.e.* $\alpha \neq 0$, et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée : $c_0(\alpha) = 0$ ou $j \neq k$. Dans ce cas, les coefficients de Fourier de β sont entièrement déterminés par l'équation (2.4.24).

Réciproquement, soit $(c_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par :

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*, \ c_p = \frac{ic_p(\alpha)}{\sum\limits_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) + 2\pi p} \text{ et } \begin{cases} c_0 \sum\limits_{l=1}^{n} \theta_l(k_l - j_l) = ic_0(\alpha) \\ c_0 = 0 \text{ si } j = k \end{cases} \tag{2.4.25}$$

α est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $c_p(\alpha) \underset{|p|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{p^\infty}\right)$, et en réinjectant cette estimation dans (2.4.25), on obtient : $c_p \underset{|p|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{p^\infty}\right)$. Donc l'unique fonction β telle que : $\forall p \in \mathbb{Z}$, $c_p(\beta) = c_p$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et non nulle. De plus, la fonction β vérifie alors aussitôt l'équation (2.4.22) en remontant les calculs. Le couple (F, G_1) où $F = \beta z^j \bar{z}^k \tau^m$ et G_1 est bien solution de l'équation (2.4.9) de l'énoncé du lemme.

Cas 2. G est diagonal, *i.e.* α est constante et $j = k$. Dans ce cas, l'unique solution de (2.4.22) est la solution nulle. On pose alors $G_1 : \mathbb{R}^n \ni u \mapsto \alpha u^j \tau^m \in \mathbb{R}$. G_1 est polynomiale homogène de degré $|j| + m = \frac{r}{2}$, et le couple $(0, G_1)$ est bien solution de l'équation (2.4.9).

Finalement, tout polynôme homogène de degré r étant combinaison linéaire de monômes de même degré et l'équation à résoudre étant linéaire, on obtient un couple de solutions (F, G_1) de l'équation (2.4.9) avec F polynomiale homogène d'ordre r et sans terme diagonal et G_1 polynomiale homogène d'ordre $\frac{r}{2}$ si r est pair, nulle sinon.

Pour montrer l'unicité, il suffit de remarquer, que d'après l'équation (2.4.21), un monôme de la forme $\beta z^j \bar{z}^k \tau^m$ $(l, m \in \mathbb{N}^n)$ est envoyé par $\{H_0, \cdot\}$ sur un monôme de la forme $\alpha z^j \bar{z}^k \tau^m$. L'équation (2.4.9) se résout donc terme à terme, admet aussitôt une unique solution si l'on impose à F d'être polynomiale sans termes diagonaux, et ce couple vérifie bien les conditions 1. et 2. de l'énoncé du lemme. $\square$

2.4.2 Au voisinage d'un fond de puits

Soient $\mathcal{M}$ une variété symplectique et $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. On suppose ici que H admet un minimum local non-dégénéré E en un certain $m \in \mathcal{M}$. D'après la Proposition 2.2.1 et la Remarque 2.2.3, il existe un symplectomorphisme ϕ d'un voisinage de $(0,0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ dans un voisinage de $m \in \mathcal{M}$ tel que $\phi(0,0) = m$ et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ strictement positifs tels que l'on ait au voisinage de $(0,0)$:

$$H \circ \phi(x, \xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x,\xi)||^3\right) \tag{2.4.26}$$

La construction de la forme normale de Birkhoff classique associée à H est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.4.11. *En supposant que les réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont rationnellement indépendants, il existe un symplectomorphisme ψ d'un voisinage $\mathcal{U}$ de $(0,0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ dans un voisinage de $m \in \mathcal{M}$ tel que :*

$$\psi(0,0) = m \quad et \quad \forall (x,\xi) \in \mathcal{U},\ H \circ \psi(x,\xi) = H_1(p) + H_2(x,\xi) \tag{2.4.27}$$

où $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifie au voisinage de $p = 0$:

$$H_1(p) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i p_i + O(||p||^2) \tag{2.4.28}$$

et H_2 s'annule à tout ordre[6] *en $x = \xi = 0$. On appelle alors forme normale de Birkhoff du hamiltonien classique H la fonction $(x,\xi) \mapsto H_1(p(x,\xi))$.*

Remarque 2.4.12. Conformément à la définition 2.3.5, rappelons que $H_1(p)$ est à prendre dans un sens variant selon le contexte. Ainsi, dans (2.4.27), il désigne $H_1 \circ p(x,\xi)$, alors qu'il est dans (2.4.28) l'image par la fonction H_1 du n-uplet $p \in \mathbb{R}^n$.

Donnons l'analogue de la Définition 2.4.3 suivant :

6. voir la Définition 2.4.13.

Définition 2.4.13. Soient $F \in \mathcal{C}^\infty (T^* (\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$.

On dit que :

– F s'annule jusqu'à l'ordre k en $x = \xi = 0$ si, au voisinage de $(0,0)$ et dans les coordonnées canoniques de $T^*(\mathbb{R}^n)$, on a : $F(x,\xi) = O\left(||(x,\xi)||^k\right)$.

– F s'annule à tout ordre en $x = \xi = 0$ si pour $l \in \mathbb{N}$, F s'annule jusqu'à l'ordre l en $x = \xi = 0$. On écrit alors $F(x,\xi) = O(||(x,\xi)||^\infty)$.

La démonstration du Théorème 2.4.11 repose sur le lemme de Borel (Théorème 2.3.32) et sur les analogues dans le cas du fond du puits du Lemme 2.4.4 et la Proposition 2.4.8 : le Lemme 2.4.14 et la Proposition 2.4.19. Les démonstrations de tous les énoncés donnés ici ne sont qu'une version plus simple des preuves données dans la partie 2.4.1 : on ne donne donc aucune démonstration dans cette partie.

Lemme 2.4.14. *Soient F et G deux fonctions polynomiales homogènes de degré k et r respectivement. Alors $\{F, G\}$ est polynomiale homogène de degré $k + r - 2$.*

Remarque 2.4.15. Avec nos notations, la fonction nulle est polynomiale homogène de degré quelconque. Par exemple, si $F = G$ dans le Lemme 2.4.14, le crochet $\{F, G\}$ est nul, et la conclusion du lemme tient toujours.

Définition 2.4.16. Soient $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}$. On définit $\lfloor F \rfloor_N$ (resp. $\lfloor F \rfloor_{\leq N}$) comme la somme des termes polynomiaux homogènes de degré N (resp. au plus N) intervenant dans le développement de Taylor de F au voisinage de $x = \xi = 0$.

On définit alors la valuation de F, $\nu(F)$, comme le plus petit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor F \rfloor_N \neq 0$ (si l'ensemble des tels N est vide, alors $\nu(F) = +\infty$).

Soient F et G deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. On définit la relation $\sim$ par :

$$F \sim G \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \lfloor F \rfloor_N = \lfloor G \rfloor_N \tag{2.4.29}$$

Si $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_N = \{j \in \mathbb{N} \mid \nu(F_j) \leq N\}$ est fini, alors $\sim$ prend le sens suivant :

$$F \sim \sum_{j=0}^{+\infty} F_j \ \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{j \in I_N} \lfloor F_j \rfloor_{\leq N} = \lfloor F \rfloor_{\leq N} \tag{2.4.30}$$

Remarque 2.4.17. Dans l'équation (2.4.30), si toutes les fonctions F_j sont polynomiales, la définition de $\sim$ coïncide avec la définition donnée dans l'énoncé du Théorème 2.3.32.

Remarque 2.4.18. Ici encore, l'équation (2.4.27) du Théorème 2.4.11 se réécrit simplement :

$$H \circ \varphi \sim H_1(p) \tag{2.4.31}$$

où, ici, $H_1(p)$ désigne la fonction $(x,\xi) \mapsto H_1(p(x,\xi))$.

Proposition 2.4.19. *On suppose les réels $(\theta_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ rationnellement indépendants, et on définit H_0 par :*

$$\forall(x,\xi)\in T^*(\mathbb{R}^n),\ H_0(x,\xi)=E+\sum_{i=1}^{n}\theta_i\frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} \tag{2.4.32}$$

Soit $G\in\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n),\mathbb{R})$ une fonction polynomiale homogène de degré $k\geq 3$. Alors, il existe un unique couple de fonctions $G_1\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $F\in\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n),\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall(x,\xi)\in T^*(\mathbb{R}^n),\ \{H_0,F\}(x,\xi)=G(x,\xi)-G_1(p) \tag{2.4.33}$$

et F est polynomiale sans terme diagonal.

De plus, on a :

1. *F est polynomiale homogène de degré k et est entièrement déterminée par les termes extra-diagonaux de G.*
2. *G_1 est polynomiale homogène de degré $\frac{k}{2}$ si k est pair, nulle sinon. De plus, $G_1(z\bar{z})$ est exactement égal à la somme des termes diagonaux de G.*

Remarque 2.4.20. La démonstration ci-dessous prouve même mieux : si (F,G_1) est solution de l'équation cohomologique, alors F et G_1 sont nécessairement polynomiales modulo une fonction plate.

Remarque 2.4.21. Ici, seul le résultat d'existence est utile à la démonstration du Théorème 2.4.11. On se servira également de l'unicité dans la partie 2.5, mais aussi dans la partie 4.3.

2.4.3 Symbole principal de la forme normale de Birhoff quantique

Dans cette partie, on montre que le symbole principal de la forme normale de Birkhoff quantique dont la construction est donnée dans les Théorèmes 2.3.28 et 2.3.38 est la forme normale de Birkhoff classique associée à son symbole principal.

Les énoncés ci-dessous étant identiques dans le cas du fond de puits et dans celui d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée, on se place pour éviter les redondances indifféremment dans le cadre de la partie 2.3.2 ou de la partie 2.3.3.

On a la proposition suivante (Corollaire 1.2.16) :

Proposition 2.4.22. *Soient A et B deux opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques. Alors si $\sigma_p(\cdot)$ associe à un opérateur son symbole principal, on a :*

$$\sigma_p\left(\frac{[A,B]}{i\hbar}\right)=\{\sigma_p(A),\sigma_p(B)\} \tag{2.4.34}$$

Remarque 2.4.23. Il n'y a pas d'ambiguité dans l'énoncé de la Proposition 2.4.22 car le symbole principal d'un opérateur semiclassique ne dépend pas de la quantification usuelle choisie (Weyl, Wick, anti-Wick). Dans le cas du fond de puits, et en particulier dans la définition des opérateurs polynomiaux, on a choisi la quantification de Weyl. Dans le cas d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée, on a choisi la quantification de Weyl en les variables x, ξ mais la quantification de Wick en les variables t, τ. Dans les deux cas, le symbole principal d'un opérateur polynomial d'ordre r

$$\mathrm{Op}^W\left(\sum_{2p+|j|+|k|=r} \alpha_{pjk}\hbar^p z^j \bar{z}^k\right) \left(\text{resp.} \sum_{2p+|j|+|k|+2m=r} \alpha_{pjkm}(t)\hbar^p \mathrm{Op}^W(z^j\bar{z}^k)D_t^m\right)$$

est la fonction polynomiale homogène de degré r :

$$(x,\xi) \mapsto \sum_{|j|+|k|=r} \alpha_{0jk} z^j \bar{z}^k \quad \left(\text{resp. } (x,t,\xi,\tau) \mapsto \sum_{|j|+|k|+2m=r} \alpha_{0jkm}(t) z^j \bar{z}^k \tau^m\right).$$

On a aussitôt la correspondance suivante entre les relations $\sim$ définies dans les parties 2.3 et 2.4 :

Proposition 2.4.24. *Soient A et $(A_l)_{l\in\mathbb{N}}$ un opérateur pseudodifférentiel semiclassique et une famille d'opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_N = \{l \in \mathbb{N} \mid \lfloor A_l \rfloor_{\leq N} \neq 0\}$ est fini. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{l \in \mathbb{N} \mid \nu(\sigma_p(A_l)) \leq N\} \subset I_N$ est fini, et de plus, si l'on a :*

$$A \sim \sum_{l=0}^{+\infty} A_l \tag{2.4.35}$$

au sens de la Définition 2.3.24 (resp. de son analogue dans le cas du fond de puits), alors :

$$\sigma_p(A) \sim \sum_{l=0}^{+\infty} \sigma_p(A_l) \tag{2.4.36}$$

au sens de la Définition 2.4.6 (resp. de la Définition 2.4.16). En particulier, σ_p envoie le développement en PO *de A :*

$$A \sim \sum_{r=0}^{+\infty} \lfloor A \rfloor_r \tag{2.4.37}$$

sur le développement de Taylor de $\sigma_p(A)$ (en x, ξ, τ dans le cas d'une trajectoire périodique) :

$$\sigma_p(A) \sim \sum_{r=0}^{+\infty} \lfloor \sigma_p(A) \rfloor_r \tag{2.4.38}$$

On a maintenant tous les éléments permettant de montrer que les formes normales quantiques construites dans les Théorèmes 2.3.28 et 2.3.38 ont pour symbole principal la forme normale de Birkhoff classique associée au symbole principal du hamiltonien quantique d'origine.

On se place dans un premier temps dans le cadre de la partie 2.3.2 : soient $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ un opérateur semiclassique autoadjoint elliptique sur une variété X de dimension $n+1$, et E une valeur régulière de son symbole principal H. On suppose qu'il existe $\delta E > 0$ tel que $H^{-1}([E-\delta E, E+\delta E])$ est compacte. Soit enfin γ une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée du flot hamiltonien engendré par H et d'énergie E.

La construction de la forme normale de Birkhoff quantique associée au hamiltonien H donnée par le Théorème 2.3.28 est la suivante : il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels autoadjoints elliptiques $(\widetilde{W}_{\leq N})_{N\geq 3}$ et une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\left\| \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - h(P, D_t, \hbar) \right) |\mu, \nu\rangle \right\| = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \tag{2.4.39}$$

On appelle alors *forme normale de Birkhoff quantique* l'opérateur $h(P, D_t, \hbar)$. Mieux, on a construit la famille $\widetilde{W}_{\leq N}$ récursivement de la manière suivante : il existe une famille d'opérateurs $(W_q)_{q\geq 3}$ telle que pour tout $q \geq 3$, W_q est polynomial d'ordre q, sans terme diagonal et symétrique, et telle que :

$$\widetilde{W}_{\leq N} = W_{\leq N} + (D_t^2 + \sum_{i=1}^{n} P_i)^{N+1} \tag{2.4.40}$$

où :

$$W_{\leq N} = \sum_{3\leq q\leq N} W_q \tag{2.4.41}$$

On a maintenant le théorème suivant :

Théorème 2.4.25. *Le symbole principal de la forme normale de Birkhoff quantique construite ci-dessus :*

$$\sigma_p\left(h(P, D_t, \hbar)\right) \ : \ (x, t, \xi, \tau) \mapsto h(p, \tau, 0)$$

est une forme normale de Birkhoff classique associée au hamiltonien $\sigma_p(H)$, i.e. *il existe un symplectomorphisme φ d'un voisinage $\mathcal{U} \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ de $\mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\}$ dans un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ de γ tel que pour $t \in \mathbb{S}^1$, $\varphi(0, t, 0, 0) = \gamma(t)$ et :*

$$\sigma_p(H) \circ \varphi(x, t, \xi, \tau) \sim h(p, \tau, 0) \tag{2.4.42}$$

Démonstration du Théorème 2.4.25. Soit $N \geq 3$. D'après le Lemme 2.3.25, l'équation (2.4.39) s'écrit également :

$$\left\lfloor e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \right\rfloor_{\leq N} = \lfloor h(P, D_t, \hbar) \rfloor_{\leq N} \tag{2.4.43}$$

Donc d'après la Proposition 2.4.24 :

$$\left\lfloor \sigma_p \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \right) \right\rfloor_{\leq N} = \lfloor h(p,\tau,0) \rfloor_{\leq N} \tag{2.4.44}$$

De plus, d'après les Propositions 2.4.22 et 2.4.24, l'équation (2.3.59) :

$$e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \sim \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \mathrm{ad}^q_{\frac{i}{\hbar}\widetilde{W}_{\leq N}}(H)$$

où $\mathrm{ad}_{\frac{i}{\hbar}\widetilde{W}_{\leq N}} = \frac{i}{\hbar}[\widetilde{W}_{\leq N}, \cdot]$, devient :

$$\sigma_p \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \right) \sim \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \mathrm{ad}^q_{\sigma_p(\widetilde{W}_{\leq N})}(\sigma_p(H) \tag{2.4.45}$$

où $\mathrm{ad}_{\sigma_p(\widetilde{W}_{\leq N})} = \{\sigma_p(\widetilde{W}_{\leq N}), \cdot\}$. On en déduit, par un calcul similaire à ceux de la démonstration du Théorème 2.4.1 (donc à l'aide du Lemme 2.4.14), que :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \sigma_p \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \right) \right\rfloor_{\leq N} &= \sum_{q=0}^{N-2} \left\lfloor \frac{1}{q!} \mathrm{ad}^q_{\sigma_p(\widetilde{W}_{\leq N})}(\sigma_p(H)) \right\rfloor_{\leq N} \\ &= \sum_{q=0}^{N-2} \left\lfloor \frac{1}{q!} \mathrm{ad}^q_{\sigma_p(W_{\leq N})}(\sigma_p(H)) \right\rfloor_{\leq N} \end{aligned} \tag{2.4.46}$$

En posant, pour $N \geq 3$, $F_N = \sigma_p(W_N)$, F_N est une fonction polynomiale homogène de degré N. On définit maintenant F à l'aide du lemme de Borel par la relation :

$$F \sim \sum_{N=3}^{+\infty} F_N \tag{2.4.47}$$

On a encore, toujours par un calcul similaire à ceux de la démonstration du Théorème 2.4.1 :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \sigma_p \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \right) \right\rfloor_{\leq N} &= \sum_{q=0}^{N-2} \left\lfloor \frac{1}{q!} \mathrm{ad}^q_{\sigma_p(W_{\leq N})}(\sigma_p(H)) \right\rfloor_{\leq N} \\ &= \sum_{q=0}^{N-2} \left\lfloor \frac{1}{q!} \mathrm{ad}^q_{F}(\sigma_p(H)) \right\rfloor_{\leq N} \\ &= \lfloor \sigma_p(H) \circ \exp \chi_F \rfloor_{\leq N} \end{aligned} \tag{2.4.48}$$

Finalement, les équations (2.4.44) et (2.4.48) étant valables pour tout $N \geq 3$, on a bien :

$$\sigma_p(H) \circ \exp \chi_F \sim h(p,\tau,0) \tag{2.4.49}$$

□

Plaçons-nous maintenant dans le cadre de la partie 2.3.3 : on considère un opérateur semiclassique autoadjoint elliptique $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ sur une variété X de dimension n, et m un point en lequel H admet un minimum non-dégénéré. On suppose également que les réels strictement positifs $\theta_1, \ldots, \theta_n$ donnés par la Proposition 2.2.1 sont rationnellement indépendants. La construction de la forme normale de Birkhoff quantique associée au hamiltonien H (donnée par le Théorème 2.3.38) est la suivante : il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels autoadjoints elliptiques $(\widetilde{W}_{\leq N})_{N\geq 3}$ et une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\left\| \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - h(P, \hbar) \right) |\mu\rangle \right\| = O(|\mu\hbar|^{\frac{N+1}{2}}) \tag{2.4.50}$$

On appelle alors *forme normale de Birkhoff quantique* l'opérateur $h(P, \hbar)$.

Mieux, on a construit la famille $\widetilde{W}_{\leq N}$ récursivement de la manière suivante : il existe une famille d'opérateurs $(W_q)_{q\geq 3}$ telle que pour tout $q \geq 3$, W_q est polynomial d'ordre q, sans terme diagonal et symétrique, et telle que :

$$\widetilde{W}_{\leq N} = W_{\leq N} + (\sum_{i=1}^{n} P_i)^{N+1} \tag{2.4.51}$$

où :

$$W_{\leq N} = \sum_{3\leq q\leq N} W_q \tag{2.4.52}$$

L'analogue du Théorème 2.4.25, dont la démonstration est en tout point analogue à celle de ce dernier, est le suivant :

Théorème 2.4.26. *Le symbole principal de la forme normale de Birkhoff quantique construite ci-dessus :*

$$\sigma_p\left(h(P, \hbar)\right) \ : \ (x, t, \xi, \tau) \mapsto h(p, 0)$$

est une forme normale de Birkhoff classique du hamiltonien $\sigma_p(H)$, i.e. *il existe un symplectomorphisme ψ d'un voisinage $\mathcal{U}$ de $(0,0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ dans un voisinage de $m \in \mathcal{M}$ tel que :*

$$\psi(0,0) = m \quad et \quad \sigma_p(H) \circ \psi(x, \xi) \sim h(p, 0) \tag{2.4.53}$$

2.5 A propos de l'unicité des formes normales de Birkhoff classiques

Dans cette partie, on montre l'unicité de la forme normale de Birkhoff classique d'un hamiltonien modulo certaines relations d'équivalence. Plus précisément, dans le cas du fond de puits, la forme normale de Birkhoff classique d'un hamiltonien est unique à permutation des coordonnées près et modulo une fonction s'annulant à tout ordre en $x = \xi = 0$. Dans le cas d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée, la forme normale de Birkhoff classique d'un hamiltonien est unique à permutation des coordonnées près, modulo une fonction s'annulant à tout ordre en $x = \xi = \tau = 0$, et modulo le choix d'une réalisation des angles de Poincaré associés à cette trajectoire.

2.5.1 Le cas du fond de puits

On se place ici dans le cadre de la partie 2.4.2 : soient $\mathcal{M}$ une variété symplectique et $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. On suppose ici que H admet un minimum local non-dégénéré E en un certain $m \in \mathcal{M}$. D'après la Proposition 2.2.1 et la Remarque 2.2.3, il existe un symplectomorphisme ϕ d'un voisinage de $(0,0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ dans un voisinage de $m \in \mathcal{M}$ tel que $\phi(0,0) = m$ et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ strictement positifs tels que l'on ait au voisinage de $(0,0)$:

$$H \circ \phi(x,\xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||(x,\xi)||^3\right) \tag{2.5.1}$$

On suppose les réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ rationnellement indépendants. On précise alors le Théorème 2.4.11, donnant l'existence d'*une* forme normale de Birkhoff, par la proposition suivante, qui en donne l'unicité (modulo une permutation des coordonnées et une fonction s'annulant à tout ordre en $x = \xi = 0$) :

Proposition 2.5.1. *Soient ψ_1 et ψ_2 des symplectomorphismes définis sur des voisinages de $(0,0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ et à valeurs dans $\mathcal{M}$, H_1 et H_2 deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tels que $\psi_1(0,0) = \psi_2(0,0) = m$, et :*

$$H \circ \psi_1 \sim H_1(p), \quad H \circ \psi_2 \sim H_2(p) \tag{2.5.2}$$

au sens de la Définition 2.4.16. Alors il existe un isomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ représenté par une matrice de permutation dans la base canonique tel que : $H_1 \sim H_2 \circ u$.

Remarque 2.5.2 (Rappel)**.** On dit qu'un isomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est représenté par une matrice de permutation dans la base canonique s'il existe une permutation σ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = e_{\sigma(i)}$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.5.3. En d'autres termes, une fois la partie linéaire en p fixée, la forme normale de Birkhoff associée à un hamiltonien h, définie modulo une fonction s'annulant à tout ordre en $x = \xi = 0$, est unique.

La démonstration de la Proposition 2.5.1 repose en partie sur le lemme suivant, dont la preuve est donnée plus bas :

Lemme 2.5.4. *On munit $\mathbb{R}^{2n}$ de sa forme symplectique standard, et on considère ϕ un symplectomorphisme et $k \geq 2$ un entier tels qu'au voisinage de $x = \xi = 0$, on ait :*

$$\phi(x,\xi) = (x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^k\right) \tag{2.5.3}$$

Alors il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ *de valuation*[7] *au moins* $k+1$*, telle que :*

$$\phi(x,\xi) = \exp \chi_F(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^\infty\right) \tag{2.5.4}$$

Remarque 2.5.5. On pourrait également obtenir une expression sans reste dans (2.5.4) en écrivant ϕ comme le flot à temps 1 d'un hamiltonien F dépendant du temps.

Démonstration de la Proposition 2.5.1. D'après la Proposition 2.2.1, il existe des isomorphismes u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^n$ représentés par des matrices de permutation dans la base canonique tels que pour $j \in \{1,2\}$:

$$H_j \circ u_j(p) = E + \sum_{i=1}^n \theta_i p_i + O(p^2) \tag{2.5.5}$$

De plus, quitte à restreindre le voisinage sur lequel ψ_1 est défini, on peut considérer $\psi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$. On a $\psi(0,0) = (0,0)$ et :

$$H_2 \circ p \circ \psi \sim H_1 \circ p \tag{2.5.6}$$

En particulier, en notant q_1 (resp. q_2) la forme hessienne de $H_1 \circ p$ (resp. $H_2 \circ p$) en $(0,0)$, on a :

$$q_2 \circ d\psi_{(0,0)} = q_1 \tag{2.5.7}$$

De plus, les matrices de permutations sont des matrices orthogonales, les symplectomorphismes $\phi_{u_1} = (u_1, u_1^{*-1})$ et $\phi_{u_2} = (u_2, u_2^{*-1})$ définis dans la Proposition 1.1.5 vérifient :

$$p \circ \phi_{u_1} = u_1 \circ p, \quad p \circ \phi_{u_2} = u_2 \circ p \tag{2.5.8}$$

Donc :

$$q_2 \circ d\psi_{(0,0)} \circ \phi_{u_1} = q_1 \circ \phi_{u_1} = 2\sum_{i=1}^n \theta_i p_i = q_2 \circ \phi_{u_2} \tag{2.5.9}$$

Donc d'après le Lemme A.1 (page 166), il existe un isomorphisme symplectique v de $T_{(0,0)}(T^*(\mathbb{R}^n))$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le plan $\mathcal{P}_i$ engendré par $(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_i})$ est stable par v, tel que v induise sur chacun de ses plans une rotation, et tel que :

$$d\psi_{(0,0)} \circ \phi_{u_1} = \phi_{u_2} \circ v \tag{2.5.10}$$

On a donc :

$$p \circ d\psi_{(0,0)} = p \circ \phi_{u_2} \circ v \circ \phi_{u_1}^{-1} = u_2 \circ p \circ v \circ \phi_{u_1}^{-1} = u_2 \circ p \circ \phi_{u_1}^{-1} = u_2 \circ u_1^{-1} \circ p \tag{2.5.11}$$

en utilisant la relation $p \circ v = p$ due la forme de v et l'équation (2.5.8). Notons $u = u_2 \circ u_1^{-1}$. u est encore un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par une matrice d'une

7. voir Définition 2.4.16.

permutation dans la base canonique. L'identification $T^*(\mathbb{R}^n) \simeq T_{(0,0)}(T^*(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{R}^{2n}$ donne du sens à la définition : $\phi = d\psi_{(0,0)}^{-1} \circ \psi$, et on a :

$$H_2 \circ p \circ \psi = H_2 \circ p \circ d\psi_{(0,0)} \circ \phi = H_2 \circ u \circ p \circ \phi \tag{2.5.12}$$

et au voisinage de $x = \xi = 0$: $\phi(x,\xi) = (x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^2\right)$. D'après (2.5.6) et (2.5.12), on a :

$$H_2 \circ u \circ p \circ \phi \sim H_1 \circ p \tag{2.5.13}$$

D'après le Lemme 2.5.4, il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ de valuation au moins 3 telle que :

$$\phi(x,\xi) = \exp \chi_F(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^\infty\right) \tag{2.5.14}$$

D'après (2.5.5), il existe une permutation σ telle que :

$$H_2 \circ u(p) = E + \sum_{i=1}^n \theta_{\sigma(i)} p_i + O(p^2) \text{ et } H_1(p) = E + \sum_{i=1}^n \theta_{\sigma(i)} p_i + O(p^2) \tag{2.5.15}$$

Notons $H_0 : \mathbb{R}^n \ni p \mapsto E + \sum\limits_{i=1}^n \theta_{\sigma(i)} p_i$.

Montrons par récurrence sur $N \geq 1$ l'assertion suivante (A_N) : « $\lfloor H_2 \circ u \rfloor_{\leq N} = \lfloor H_1 \rfloor_{\leq N}$ et tous les termes de la fonction polynomiale $\lfloor F \rfloor_{\leq 2N}$ sont des termes diagonaux ».

(A_1) est vraie car $\lfloor H_2 \circ u \rfloor_{\leq 1} = \lfloor H_1 \rfloor_{\leq 1} = H_0$ et $\lfloor F \rfloor_{\leq 2} = 0$. Soit $N \geq 1$. On suppose (A_N). On a au voisinage de $x = \xi = 0$, en notant $h_2 = H_2 \circ u \circ p$ et $h_0 = H_0 \circ p$:

$$\begin{aligned}
h_1(x,\xi) &= h_2 \circ \exp \chi_F(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \sum_{i=0}^{2N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}_F^i(h_2) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[h_2 + \{F, h_2\} + \sum_{i=2}^{2N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}^i_{\lfloor F \rfloor_{\leq 2N}}(h_2) \right](x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[h_2 + \{F, h_2\} \right](x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[h_2 + \{\lfloor F \rfloor_{2N+1}, h_2\} \right](x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[h_2 + \{\lfloor F \rfloor_{2N+1}, h_0\} \right](x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+2})
\end{aligned}$$

où $\mathrm{ad}_\star(\cdot) = \{\star, \cdot\}$, où l'on a utilisé à la première ligne les équations (2.5.13) et (2.5.14), et où l'on a déduit du Lemme 2.4.14 puis utilisé :

1. à la deuxième ligne que : $\mathrm{ad}_F^i(h_2)$ s'annule jusqu'à l'ordre $2+i$ en $x = \xi = 0$.
2. à la troisième que pour $i \geq 2$, $\mathrm{ad}_F^i(h_2) - \mathrm{ad}^i_{\lfloor F \rfloor_{\leq 2N}}(h_2)$ s'annule jusqu'à l'ordre $2N + i$ en $x = \xi = 0$.
3. à la quatrième que le crochet de Poisson de deux fonctions polynomiales sans termes extra-diagonaux est nul (il suffit de le vérifier pour des monômes diagonaux par bilinéarité du crochet de Poisson), et l'hypothèse de récurrence (A_N) sur $\lfloor F \rfloor_{\leq 2N}$.

4. à la cinquième que $\{F - \lfloor F \rfloor_{2N+1}, h_2\} = \{F - \lfloor F \rfloor_{\leq 2N+1}, h_2\}$ s'annule jusqu'à l'ordre $2N+2$ en $x = \xi = 0$.
5. à la dernière ligne que $\{\lfloor F \rfloor_{2N+1}, h_2 - h_0\}$ s'annule jusqu'à l'ordre $2N+2$ en $x = \xi = 0$.

En identifiant les termes de degré $2N+1$ dans l'équation $h_1 \sim h_2 \circ \phi$, on obtient donc :

$$0 = \{\lfloor F \rfloor_{2N+1}, h_0\} \tag{2.5.16}$$

Or $\lfloor F \rfloor_{2N+1}$ est polynomiale sans terme diagonal, donc d'après la Proposition 2.4.19, $\lfloor F \rfloor_{2N+1} = 0$. On montre alors comme précédemment que :

$$h_1(x,\xi) = [h_2 + \{\lfloor F \rfloor_{2N+2}, h_0\}](x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+3}) \tag{2.5.17}$$

Notons F_{2N+2} la somme des termes extra-diagonaux de $\lfloor F \rfloor_{2N+2}$. En identifiant les termes de degré $2N+2$ dans l'équation (2.5.17), on obtient :

$$\lfloor h_1 \rfloor_{2N+2} = \lfloor h_2 \rfloor_{2N+2} + \{F_{2N+2}, h_0\} \tag{2.5.18}$$

donc d'après la Proposition 2.4.19, $F_{2N+2} = 0$ et $\lfloor h_1 \rfloor_{2N+2} = \lfloor h_2 \rfloor_{2N+2}$, donc (A_{N+1}) est vraie. Finalement, on a prouvé que l'assertion (A_N) est vraie pour tout $N \geq 1$, et donc :

$$H_2 \circ u \sim H_1 \tag{2.5.19}$$

□

La démonstration du Lemme 2.5.4 repose elle-même sur un lemme :

Lemme 2.5.6. *On munit $\mathbb{R}^{2n}$ de sa forme symplectique standard, et on considère ϕ un symplectomorphisme et $k \geq 2$ un entier tels qu'au voisinage de $x = \xi = 0$, on ait :*

$$\phi(x,\xi) = (x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^k\right) \tag{2.5.20}$$

Alors il existe une fonction F, polynomiale homogène de degré $k+1$ telle que :

$$\phi(x,\xi) = (x,\xi) + \chi_F(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+1}\right) \tag{2.5.21}$$

Démonstration du Lemme 2.5.6. Pour alléger les notations de la démonstration, on se place dans le cas $n = 1$, la généralisation au cas $n \geq 1$ quelconque se faisant sans difficulté.

Soient $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un symplectomorphisme et $k \geq 2$ un entier vérifiant la relation (2.5.20).

Notons $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. Par hypothèse, il existe deux fonctions polynomiales homogènes de degré k, $\phi_{1,k}$ et $\phi_{2,k}$, telles que :

$$\phi_1(x,\xi) = x + \phi_{1,k}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+1}\right) \tag{2.5.22}$$

et :

$$\phi_2(x,\xi) = \xi + \phi_{2,k}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+1}\right) \tag{2.5.23}$$

Soit F une fonction polynomiale homogène de degré $k+1$. En identifiant les termes de degré k dans les équations (2.5.21),(2.5.22), (2.5.23), l'équation (2.5.21) est équivalente au système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \xi} = \phi_{1,k} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = -\phi_{2,k} \end{cases} \tag{2.5.24}$$

qui admet une solution polynomiale homogène de degré $k+1$ si :

$$\frac{\partial \phi_{2,k}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_{1,k}}{\partial x} = 0 \tag{2.5.25}$$

Il suffit en effet de définir F par la formule :

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,\xi) = \int_0^1 \left(\xi\phi_{1,k}(tx,t\xi) - x\phi_{2,k}(tx,t\xi)\right) dt \tag{2.5.26}$$

F est bien polynomiale homogène homogène de degré $k+1$, et on a pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \xi}(x,\xi) &= \int_0^1 \left(\phi_{1,k}(tx,t\xi) + \xi t\frac{\partial \phi_{1,k}}{\partial \xi}(tx,t\xi) - xt\frac{\partial \phi_{2,k}}{\partial \xi}(tx,t\xi)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\phi_{1,k}(tx,t\xi) + xt\frac{\partial \phi_{1,k}}{\partial x}(tx,t\xi) + \xi t\frac{\partial \phi_{1,k}}{\partial \xi}(tx,t\xi)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\phi_{1,k}(tx,t\xi) + t\frac{\partial h}{\partial t}(t,x,\xi)\right) dt \\
&= [h(\cdot,x,\xi)]_0^1 \\
&= \phi_{1,k}(x,\xi)
\end{aligned} \tag{2.5.27}$$

en notant $h : (t,x,\xi) \mapsto \phi_{1,k}(tx,t\xi)$, et en utilisant :

1. à la première ligne la formule de dérivation sous le signe $\int$,
2. à la deuxième ligne l'équation (2.5.25),
3. à la troisième l'expression de h,
4. à la quatrième une intégration par partie,
5. à la dernière ligne l'équation : $\phi_{1,k}(0,0) = 0$.

On montre de même que $\frac{\partial F}{\partial x} = -\phi_{2,k}$. Or (2.5.25) se déduit de l'identification des termes de degré $k-1$ dans l'équation :

$$\{\phi_1, \phi_2\} = 1 \tag{2.5.28}$$

qui est bien vérifiée car ϕ est un symplectomorphisme, donc le système (2.5.24) admet une solution polynomiale homogène d'ordre $k+1$ qui vérifie aussitôt l'équation (2.5.21). $\square$

Remarque 2.5.7. On pourrait voir l'équivalence entre l'existence d'une solution de (2.5.24) et l'équation (2.5.25) comme une conséquence du lemme de Poincaré : on en a redémontré la condition suffisante dans notre cas particulier, la condition nécessaire découlant du théorème de Schwarz. Cette équivalence a ici une interprétation plus simple : les fonctions $\phi_{1,k}$ et $\phi_{2,k}$ étant polynomiales homogènes de degré k, (2.5.24) peut être simplement vu comme un système réel de $2k+2$ équations linéaires à $k+2$ inconnues, de rang $k+2$. L'équation (2.5.25) définit un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{2k+2}$ de dimension $k+2$, qui est précisément l'image du système homogène associé à (2.5.24)

Démonstration du Lemme 2.5.4. Soient ϕ un symplectomorphisme et $k \geq 2$ un entier vérifiant la relation (2.5.20). On montre par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ l'assertion (A_N) : « Il existe des fonctions polynomiales $F_0, \dots, F_N$ polynomiales homogènes telles que pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, F_i est de degré $i+k$, et :

$$\phi(x,\xi) = \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N}\right) \tag{2.5.29}$$

où $F_{\leq N} = \sum\limits_{i=0}^{N} F_i$ ».

(A_0) est vraie : il suffit de choisir $F_0 = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On suppose (A_N). On a :

$$\phi \circ (\exp \chi_{F_{\leq N}})^{-1}(x,\xi) = (x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N}\right) \tag{2.5.30}$$

donc d'après le Lemme 2.5.6, il existe F_{N+1}, polynomiale homogène de degré $k+N+1$ telle que :

$$\phi \circ (\exp \chi_{F_{\leq N}})^{-1}(x,\xi) = (x,\xi) + \chi_{F_{N+1}}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N+1}\right) \tag{2.5.31}$$

On déduit du Lemme 2.4.14 que :

$$\exp \chi_{F_{\leq N+1}}(x,\xi) = \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) + \chi_{F_{N+1}}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N+1}\right) \tag{2.5.32}$$

Or puisque $F_{\leq N}$ est de valuation au moins 3, on a :

$$\chi_{F_{N+1}}(x,\xi) = \chi_{F_{N+1}} \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N+1}\right) \tag{2.5.33}$$

Donc l'équation (2.5.34) se réécrit en utilisant (2.5.32) puis (2.5.33) :

$$\begin{aligned} \phi(x,\xi) &= \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) + \chi_{F_{N+1}}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N+1}\right) \\ &= \exp \chi_{F_{\leq N+1}}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N+1}\right) \end{aligned} \tag{2.5.34}$$

On a donc prouvé l'assertion (A_N) pour tout $N \in \mathbb{N}$, et le lemme de Borel nous donne l'existence d'une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ telle que :

$$F \sim \sum_{i=0}^{+\infty} F_i \tag{2.5.35}$$

On a alors aussitôt en utilisant le Lemme 2.4.14 :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N},\ \phi(x,\xi) &= \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N}\right) \\ &= \exp \chi_F(x,\xi) + O\left(||(x,\xi)||^{k+N}\right) \end{aligned} \tag{2.5.36}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

2.5.2 Le cas d'une trajectoire périodique non-dégénérée

On se place ici dans le cadre de la partie 2.4.1 : on considère un hamiltonien H sur un variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$ de dimension $2n+2$, E une valeur régulière de H. On suppose qu'il existe $\delta E > 0$ tel que $H^{-1}([E - \delta E, E + \delta E])$ est compacte. Soit enfin γ une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée du flot hamiltonien engendré par H de plus petite période 1 et d'énergie E, et soit $\theta_1, \ldots, \theta_n$ une réalisation des angles de Poincaré associés à γ.

L'unicité de la forme normale de Birkhoff classique de H (une fois sa partie linéaire en p, τ fixée, ou de manière équivalente modulo une permutation des coordonnées $p_1, \ldots, p_n$ et le choix d'une réalisation des angles de Poincaré) est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.5.8. *Soient ψ_1 et ψ_2 des symplectomorphismes définis sur des voisinages de $\mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\} \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ et à valeurs dans $\mathcal{M}$, H_1 et H_2 deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ tels que :*

$$\forall t \in \mathbb{S}^1,\ \psi_1(0, t, 0, 0) = \psi_2(0, t, 0, 0) = \gamma(t) \tag{2.5.37}$$

et :

$$H \circ \psi_1 \sim H_1(p, \tau), \quad H \circ \psi_2 \sim H_2(p, \tau) \tag{2.5.38}$$

au sens de la Définition 2.4.6. Alors il existe deux permutations de $[\![1, n]\!]$, σ_1 et σ_2, et deux n-uplets de réels α et β tels que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \equiv \theta_{\sigma_1(i)} \equiv \beta_{\sigma_2(i)}[2\pi] \tag{2.5.39}$$

et :

$$H_1(p, \tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i + O(||p||^2 + \tau^2) \tag{2.5.40}$$

$$H_2(p, \tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i + O(||p||^2 + \tau^2) \tag{2.5.41}$$

De plus, en notant u l'isomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par :

$$\forall (p, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}, u(p, \tau) = \left(p_{\sigma_2^{-1}(1)}, \ldots, p_{\sigma_2^{-1}(n)}, \tau + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_{\sigma_2(i)}) p_i \right) \tag{2.5.42}$$

on a : $H_1 \sim H_2 \circ u$.

Démonstration de la Proposition 2.5.8. Comme ψ_1 et ψ_2 vérifient la condition (2.5.37), il existe deux n-uplets de réels α et β tels que :

$$H_1(p, \tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i + O(||p||^2 + \tau^2) \tag{2.5.43}$$

$$H_2(p, \tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i + O(||p||^2 + \tau^2) \tag{2.5.44}$$

La Proposition 2.2.11 nous donne alors l'existence de deux permutations de $[\![1,n]\!]$, σ_1 et σ_2, telles que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i \equiv \theta_{\sigma_1(i)} \equiv \beta_{\sigma_2(i)}[2\pi] \tag{2.5.45}$$

Notons pour $i \in [\![1,n]\!]$, $k_i \in \mathbb{Z}$ l'entier tel que : $\alpha_i - \beta_{\sigma_2(i)} = 2\pi k_i$, et définissons un symplectomorphisme $\psi_{\alpha,\beta}$ dans les coordonnées canoniques de $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$:

$$\psi_{\alpha,\beta}(x,t,\xi,\tau) = (R_1(t,x,\xi), t, R_2(t,x,\xi), \tau + 2\pi\sum_{i=1}^{n} k_i p_i) \tag{2.5.46}$$

où :

$$R_1(t,x,\xi) = \Big(\ldots, \cos(2\pi k_{\sigma_2^{-1}(i)}t)x_{\sigma_2^{-1}(i)} - \sin(2\pi k_{\sigma_2^{-1}(i)}t)\xi_{\sigma_2^{-1}(i)}, \ldots\Big) \in \mathbb{R}^n \tag{2.5.47}$$

et :

$$R_2(t,x,\xi) = \Big(\ldots, \sin(2\pi k_{\sigma_2^{-1}(i)}t)x_{\sigma_2^{-1}(i)} + \cos(2\pi k_{\sigma_2^{-1}(i)}t)\xi_{\sigma_2^{-1}(i)}, \ldots\Big) \in \mathbb{R}^n \tag{2.5.48}$$

On vérifie aisément que $\psi_{\alpha,\beta}$ est bien défini (*i.e.* que R_1 et R_2 ne dépendent pas du représentant de t modulo 1 choisi), est un symplectomorphisme et que l'on a :

$$(p,\tau) \circ \psi_{\alpha,\beta} = u \circ (p,\tau) \tag{2.5.49}$$

où (p,τ) est vue comme l'application $(x,t,\xi,\tau) \mapsto (p(x,\xi),\tau)$. Donc :

$$H \circ \psi_2 \circ \psi_{\alpha,\beta} \sim H_2 \circ u(p,\tau) \tag{2.5.50}$$

Notons $H_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ l'application définie par :

$$\forall (p,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1},\ H_0(p,\tau) = E + \tau + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \tag{2.5.51}$$

De plus, quitte à restreindre le voisinage sur lequel ψ_1 est défini, on peut considérer $\psi = \psi_{\alpha,\beta}^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ et l'on a les trois propriétés suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{S}^1,\ \psi(0,t,0,0) = (0,t,0,0) \tag{2.5.52}$$

$$H_2 \circ u(p,\tau) \circ \psi \sim H_1(p,\tau) \tag{2.5.53}$$

et :

$$H_2 \circ u(p,\tau) = H_0(p,\tau) + O(||p||^2 + \tau^2),\ H_1(p,\tau) = H_0(p,\tau) + O(||p||^2 + \tau^2) \tag{2.5.54}$$

Or pour tout $t \in \mathbb{S}^1$:

$$d(H_0 \circ (p,\tau))_{(0,t,0,0)} = d\tau \tag{2.5.55}$$

Donc en réordonnant les coordonnées canoniques de $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ pour une écriture plus commode de ψ, $\psi(x, \xi, t, \tau)$ a pour expression :

$$\Big(S(t)(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^2 + |\tau|), \alpha(x,t,\xi,\tau), \tau + q(t,x,\xi) + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{3}{2}})\Big)$$

où pour tout $t \in \mathbb{S}^1$, $S(t) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $q(t,\cdot,\cdot)$ est la matrice de forme quadratique $M(t) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, et $\alpha(0,t,0,0) = t$.

Comme dans la partie 2.2.3, on a, pour tout $t \in \mathbb{S}^1$:

$$S(t) \in Sp_{2n}(\mathbb{R}), \quad \text{et } M(t) = {}^tS(t)J_nS'(t) \tag{2.5.56}$$

et en notant $D_\alpha \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ on a :

$${}^tSD_\alpha S + M = D_\alpha \tag{2.5.57}$$

Donc S satisfait l'équation :

$$S' = J_nD_\alpha S - SJ_nD_\alpha \tag{2.5.58}$$

Donc S vue comme une fonction (1-périodique) de la variable réelle est solution de l'équation (2.5.58) Ainsi, il existe $S_0 \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; S(t) = e^{tJ_nD_\alpha}S_0e^{-tJ_nD_\alpha} \tag{2.5.59}$$

Or S est 1-périodique, donc :

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \; e^{lJ_nD_\alpha}S_0e^{-lJ_nD_\alpha} = S_0 \tag{2.5.60}$$

Rappelons maintenant le théorème de Kronecker :

Théorème 2.5.9 ([Kro84]). *Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1, \dots, a_n$ et 2π sont rationnellement indépendants. Alors $\mathbb{Z}.(a_1, \dots, a_n) + 2\pi\mathbb{Z}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.*

Les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et 2π sont rationnellement indépendants, donc d'après le théorème de Kronecker, il existe, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une suite $(l_N)_{N\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \; e^{il_N\alpha_j} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^{it\alpha_j} \tag{2.5.61}$$

donc :

$$S_0 = e^{l_NJ_nD_\alpha}S_0e^{-l_NJ_nD_\alpha} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^{tJ_nD_\alpha}S_0e^{-tJ_nD_\alpha} = S(t) \tag{2.5.62}$$

Ainsi, $S = S_0 \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ est constante, donc $M = 0$ et :

$${}^tSD_\alpha S = D_\alpha \tag{2.5.63}$$

D'après le lemme A.1 (page 166), S stabilise, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le plan $\mathcal{P}_i$ engendré par $(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_i})$ et induit sur chacun de ses plans une rotation. Le symplectomorphisme ψ_0 défini dans les coordonnées canoniques (x,t,ξ,τ) de $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ par :

$$\psi_0(x,\xi,t,\tau) = (S(x,\xi),t,\tau) \tag{2.5.64}$$

vérifie : $(p,\tau)\circ\psi_0=(p,\tau)$. Donc en posant $\phi=\psi_0^{-1}\circ\psi$, on a :

$$H_2\circ u(p,\tau)\circ\phi\sim H_1(p,\tau) \tag{2.5.65}$$

et :

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4) \tag{2.5.66}$$

où au voisinage de $x=\xi=\tau=0$:

$$\begin{cases}\phi_1(x,t,\xi,\tau) &= x+O(||(x,\xi)||^2+|\tau|)\\ \phi_2(0,t,0,0) &= t\\ \phi_3(x,t,\xi,\tau) &= \xi+O(||(x,\xi)||^2+|\tau|)\\ \phi_4(x,t,\xi,\tau) &= \tau+O((||(x,\xi)||^2+|\tau|)^{\frac{3}{2}})\end{cases} \tag{2.5.67}$$

On conclut alors exactement comme dans la preuve de la Proposition 2.5.1 à l'aide du lemme suivant, dont la preuve est donnée ci-dessous :

Lemme 2.5.10. *Soient ϕ un symplectomorphisme défini sur un voisinage de $\mathbb{S}^1\subset T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1)$ et $k\geq 2$ un entier tels que :*

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4) \tag{2.5.68}$$

où au voisinage de $x=\xi=\tau=0$:

$$\begin{cases}\phi_1(x,t,\xi,\tau) &= x+O((||(x,\xi)||^2+|\tau|)^{\frac{k}{2}})\\ \phi_2(x,t,\xi,\tau) &= t+O((||(x,\xi)||^2+|\tau|)^{\frac{k-1}{2}})\\ \phi_3(x,t,\xi,\tau) &= \xi+O((||(x,\xi)||^2+|\tau|)^{\frac{k}{2}})\\ \phi_4(x,t,\xi,\tau) &= \tau+O((||(x,\xi)||^2+|\tau|)^{\frac{k+1}{2}})\end{cases} \tag{2.5.69}$$

Alors il existe une fonction $F\in\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1),\mathbb{R})$ de valuation au moins $k+1$, telle que :

$$\phi(x,t,\xi,\tau)=\exp\chi_F(x,t,\xi,\tau)+O\left((||(x,\xi)||^2+|\tau|)^\infty\right) \tag{2.5.70}$$

où les équations ci-dessus prennent du sens via l'identification :

$$T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1)\simeq\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^{n+1}\subset\mathbb{R}^{2n+2}. \tag{2.5.71}$$

□

Démonstration du Lemme 2.5.10. On énonce dans un premier temps le lemme :

Lemme 2.5.11. *Soient ϕ un symplectomorphisme défini sur un voisinage de $\mathbb{S}^1\subset T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1)$ et $k\geq 2$ un entier tels que :*

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4) \tag{2.5.72}$$

où au voisinage de $x = \xi = \tau = 0$:

$$\begin{cases} \phi_1(x,t,\xi,\tau) & = x + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k}{2}}) \\ \phi_2(x,t,\xi,\tau) & = t + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k-1}{2}}) \\ \phi_3(x,t,\xi,\tau) & = \xi + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k}{2}}) \\ \phi_4(x,t,\xi,\tau) & = \tau + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k+1}{2}}) \end{cases} \tag{2.5.73}$$

Alors il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1), \mathbb{R})$ polynomiale homogène de degré $k+1$, telle que :

$$\phi(x,t,\xi,\tau) = (x,t,\xi,\tau) + \chi_F(x,t,\xi,\tau) + O\left((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^\infty\right) \tag{2.5.74}$$

où les équations ci-dessus prennent du sens via l'identification :

$$T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}. \tag{2.5.75}$$

Le passage du Lemme 2.5.11 au Lemme 2.5.10 est en tout point analogue à celui du Lemme 2.5.6 au Lemme 2.5.4. On ne donne donc ici que la démonstration du Lemme 2.5.11. □

Démonstration du Lemme 2.5.11. Comme dans la démonstration du Lemme 2.5.6, on se place dans le cas $n = 1$, la généralisation au cas $n \geq 1$ quelconque se faisant sans difficulté. On note alors $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ où, par hypothèse, il existe une fonction $\phi_{1,k}$ (resp. $\phi_{2,k}$, $\phi_{3,k}$, $\phi_{4,k}$) polynomiale homogène de degré k (resp. $k-1$, k, $k+1$) :

$$\begin{cases} \phi_1(x,t,\xi,\tau) & = x + \phi_{1,k}(x,t,\xi,\tau) + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k+1}{2}}) \\ \phi_2(x,t,\xi,\tau) & = t + \phi_{2,k}(x,t,\xi,\tau) + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k}{2}}) \\ \phi_3(x,t,\xi,\tau) & = \xi + \phi_{3,k}(x,t,\xi,\tau) + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k+1}{2}}) \\ \phi_4(x,t,\xi,\tau) & = \tau + \phi_{4,k}(x,t,\xi,\tau) + O((||(x,\xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{k+2}{2}}) \end{cases} \tag{2.5.76}$$

Soit F une fonction polynomiale homogène de degré $k+1$. L'équation (2.5.74) est équivalente au système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \xi} = \phi_{1,k} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = -\phi_{3,k} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \tau} = \phi_{2,k} \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = -\phi_{4,k} \end{cases} \tag{2.5.77}$$

En identifiant les termes en $dt \wedge d\tau$ et $dx \wedge d\xi$ de degré $k-1$ dans l'équation : $\phi^*\omega = \omega$ (où ω est la forme symplectique canonique dont $T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$, on obtient :

$$\frac{\partial \phi_{4,k}}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_{2,k}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{3,k}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_{1,k}}{\partial x} = 0 \tag{2.5.78}$$

En identifiant les termes en $dt \wedge dx$ et $dt \wedge d\xi$ de degré k dans l'équation : $\phi^*\omega = \omega$, on a :

$$\frac{\partial \phi_{3,k}}{\partial t} - \frac{\partial \phi_{4,k}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{1,k}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{4,k}}{\partial \xi} = 0 \tag{2.5.79}$$

Finalement, identifiant les termes en $dx \wedge d\tau$ et $d\xi \wedge d\tau$ de degré $k-2$ dans l'équation : $\phi^*\omega = \omega$, on obtient :

$$\frac{\partial \phi_{3,k}}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_{2,k}}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_{1,k}}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_{2,k}}{\partial \xi} = 0 \tag{2.5.80}$$

Donc la forme

$$\lambda = -\phi_{3,k}dx + \phi_{1,k}d\xi - \phi_{4,k}dt + \phi_{2,k}d\tau$$

est fermée. Le lemme de Poincaré ne permet a priori d'obtenir que l'existence *locale* de F au voisinage $(0, t_0, 0, 0)$, $t_0 \in \mathbb{S}^1$. Plus précisément, F y est défini par la formule :

$$F(x,t,\xi,\tau) = \int_0^1 \lambda((ux, t_0 + u(t-t_0), u\xi, u\tau)).(x, t-t_0, \xi, \tau)du \tag{2.5.81}$$

L'équation (2.5.81) ne dépend pas du représentant réel de t_0 choisi (imposant le représentant réel de t). Elle définit donc aussitôt une fonction polynomiale homogène de degré $k+1$, dont elle vérifie comme dans la démonstration du Lemme 2.5.6 qu'elle satisfait le système (2.5.77), donc l'équation (2.5.74). $\square$

Remarque 2.5.12. On pourrait montrer de manière analogue l'unicité du développement en PO de la forme normale quantique construites dans les Théorèmes 2.3.28 et 2.3.38 une fois sa partie linéaire en P (resp P, D_t) fixée.

Cette unicité est également la conséquence de problèmes inverses : dans le cas où l'invariant de la dynamique considéré est une trajectoire périodique non-dégénérée, on sait déjà que les coefficients de la formule des traces de Gutzwiller déterminent la forme normale de Birkhoff quantique (voir [ISZ02, GP10]). Dans le cas d'un minimum non-dégénéré, cette dernière est déterminée par la partie basse du spectre du hamiltonien (voir [GPU07]).

Chapitre 3

Formules des traces

Dans tout ce chapitre, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.

3.1 Introduction

On ne sait déterminer le spectre d'un hamiltonien quantique que dans très peu de cas. Pour les systèmes non intégrables (cas générique), il n'est pas donné par la formule de Bohr-Sommerfeld.

La formule des traces de Gutzwiller offre le cadre naturel pour obtenir des invariants spectraux. Celle-ci est d'abord apparue en physique ([Gut71, BB70, BB71, BB72]). Les premières études rigoureuses ont été réalisées dans le contexte des asymptotiques en haute énergie : [CdV73] montre une généralisation de la formule de Poisson pour opérateurs elliptiques sur une variété compacte en s'inspirant de l'intégrale de Feymann, [Cha74, DG75] font intervenir les opérateurs intégraux de Fourier. La première preuve de la formule des traces telle qu'elle est énoncée ici (dans le cadre de l'analyse semiclassique) apparaît dans [PU91, PU95] (dans le cas d'opérateurs semiclassiques elliptiques sur une variété compacte) après une étude microlocale dans [GU89] mais pour des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 (la racine carré d'un opérateur de Schrödinger). D'autres preuves traitent le cas d'opérateurs de Schrödinger sur $\mathbb{R}^n$ (par exemple [Mei92]). Enfin, on trouve dans [CRR99] une preuve utilisant les états cohérents.

Généralisant la formule des traces de Selberg [Sel56], qui est exacte et concerne le laplacien sur les surfaces à courbure négative constante, la formule des traces de Gutzwiller fait le lien entre mécaniques quantique et classique. C'est une formule asymptotique pour une densité régularisée de valeurs propres : elle permet de calculer dans la limite semiclassique des moyennes à l'échelle de la constante de Planck du spectre purement discret d'un opérateur pseudodifférentiel elliptique à partir de l'ensemble des orbites fermées d'énergie fixée.

3.2 Préliminaires

Soient X une variété et $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*X, \mathbb{R})$

3.2.1 Flot propre

Définition 3.2.1. On dit que le flot hamiltonien Φ engendré par le symbole principal de H est propre sur Σ_E si :

1. L'ensemble $\mathcal{P} = \{(z,T) \in \Sigma_E \times \mathbb{R} \mid \Phi^T(z) = z\}$ est une sous-variété de $\Sigma_E \times \mathbb{R}$ (la dimension pouvant varier d'une composante connexe à l'autre).
2. Pour tout $(z,T) \in \mathcal{P}$, l'espace tangent à $\mathcal{P}$ en (z,T) est l'ensemble des points fixes de la différentielle en (z,T) de $(x,t) \mapsto \Phi^t(x)$, *i.e.* :

$$T_{(z,T)}\mathcal{P} = \{(\zeta,\tau) \in T_z\Sigma_E \times \mathbb{R} \mid \tau\chi_H(z) + d\Phi_z^T(\zeta) = \zeta\} \tag{3.2.1}$$

L'hypothèse de flot propre généralise la notion de trajectoire périodique non-dégénérée : d'après l'expression de l'application de Poincaré linéarisée 1.1.26, une trajectoire périodique d'énergie est incluse dans une variété lisse de trajectoires périodiques d'énergie E (sa composante connexe dans $\mathcal{P}$) de dimension $m+1$, où m est la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 de son application de Poincaré.

Plus, précisément, on a vu dans la Proposition 1.1.41 que si γ est une trajectoire périodique non-dégénérée de période T, elle est isolée : l'ensemble $\gamma \times \{T\}$ est ouvert dans $\mathcal{P}$, fermé et connexe. C'est donc une composante connexe de $\mathcal{P}$, de dimension 1. De plus, la condition 2. de la Définition 3.2.1 est vérifiée en tout point de $\gamma \times \{T\}$. En effet, si z est un point de γ, on a : $T_{(z,T)}\mathcal{P} = T_{(z,T)}(\gamma \times \{T\}) = \mathbb{R}\chi_H(z) \times \{0\}$, et on déduit de la Proposition 1.1.33 que :

$$\{(\zeta,\tau) \in T_z\Sigma_E \times \mathbb{R} \mid \tau\chi_H(z) + d\Phi_z^T(\zeta) = \zeta\} = \mathbb{R}\chi_H(z) \times \{0\}$$

Réciproquement, si $\gamma \times \{T\}$ est une trajectoire périodique isolée, alors elle est non-dégénérée sous l'hypothèse que le flot est propre. En effet, c'est une composante connexe de $\mathcal{P}$ de dimension 1, donc en tout point z de γ, on a :

$$\{(\zeta,\tau) \in T_z\Sigma_E \times \mathbb{R} \mid \tau\chi_H(z) + d\Phi_z^T(\zeta) = \zeta\} = T_{(z,T)}\mathcal{P} = \mathbb{R}\chi_H(z) \times \{0\}$$

et donc la différentielle en z de son application de Poincaré ne peut admettre 1 comme valeur propre.

Remarque 3.2.2. Si le flot hamiltonien associé au symbole principal de H n'engendre sur Σ_E que des trajectoires périodiques non-dégénérées, alors il est propre sur Σ_E.

On a également la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors, sous l'hypothèse que le flot est propre sur Σ_E, il existe un nombre fini de composantes connexes de $\mathcal{P}$ qui contiennent au moins un point périodique de période dans K.*

Remarque 3.2.4. Sans l'hypothèse de flot propre, il existe un nombre fini des trajectoires isolées (en particulier de trajectoires non-dégénérées) de période dans un compact donné de $\mathbb{R}$.

Démonstration de la Proposition 3.2.3. $\mathcal{P}$ est un fermé de $\Sigma_E \times \mathbb{R}$, donc $\mathcal{P} \cap (\Sigma_E \times K)$ est compact. Supposons qu'il existe un nombre infini de composantes connexes de $\mathcal{P}$ qui contiennent au moins un point périodique de période dans K. Il existe alors une suite $(z_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{P} \cap (\Sigma_E \times K)$ et dont les termes sont dans des composantes connexes deux à deux distinctes. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge vers un certain $(z, T) \in \mathcal{P} \cap (\Sigma_E \times K)$. Or $\mathcal{P}$ est une variété donc localement connexe. Donc à partir d'un certain rang, (z_n, T_n) est dans la même composante connexe que (z, T), ce qui est absurde. $\square$

3.2.2 Action de Maupertuis

L'action de Maupertuis doit son nom au principe de moindre action de Maupertuis, qui fait le lien entre formulation lagrangienne et hamiltonienne de la mécanique classique. Elle est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de $\mathcal{P}$ sous l'hypothèse de flot propre, mais dans les énoncés ci-dessous, pour lesquels on ne donne que la contribution d'une trajectoire isolée à la formule des traces, nous n'avons besoin ici que de sa définition. Pour plus de détails, on pourra consulter par exemple [Arn89, AM78]).

Définition 3.2.5. Soit γ une trajectoire périodique du flot, de période T.

$$S_\gamma = \oint_\gamma pdq = \int_0^T p(t).\dot{q}(t)dt \tag{3.2.2}$$

où $\gamma(t) = \Phi^t(\gamma(0)) = (q(t), p(t)) \in T^*(X)$.

Remarque 3.2.6. La définition ci-dessus fait intervenir le choix d'*une* primitive de la forme symplectique canonique sur $T^*(X)$, ici telle que toute trajectoire contenue dans la section nulle a une action nulle. Cette primitive n'est pas nécessairement préservée par un symplectomorphisme. (c'est le cas si le symplectomorphisme ψ est exact, *i.e.* $\psi^*\alpha' = \alpha$ une fois fixées deux primitives α et α' des formes symplectiques de l'espace de départ et d'arrivée). En particulier, toute trajectoire envoyée sur la section nulle voit son action s'annuler. Par exemple, le symplectomorphisme ψ : $T^*(\mathbb{S}^1) \ni (t, \tau) \mapsto (t, \tau - E) \in T^*(\mathbb{S}^1)$ envoie $\gamma = (\cdot, E)$ sur $\psi \circ \gamma = (\cdot, 0)$, mais l'action de γ est E). Pour plus de détails, on pourra consulter [VuN06].

3.2.3 Indice de Maslov

On définit enfin l'indice de Maslov d'une trajectoire périodique (pour des définitions équivalentes de l'indice de Maslov, on pourra consulter [Arn67, Hör71, CdV93]). On munit $\mathbb{R}^{2n}$ de sa forme symplectique usuelle ω, et de son produit scalaire usuel $\langle\cdot;\cdot\rangle$. On le munit enfin de la structure complexe définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^{2n},\ \forall(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+ib).u = au + bJ_n u \tag{3.2.3}$$

où l'on a repris les notations de la Définition 1.1.34, et du produit hermitien défini par :

$$\forall(u,v) \in \mathbb{R}^{2n},\ (u;v) = \langle u;v\rangle + i\omega(u,v) \tag{3.2.4}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle commute avec J_n. Maintenant, $Sp_{2n}(\mathbb{R}) \subset Gl_{2n}(\mathbb{R})$, donc pour tout $M \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O,S) \in O_{2n}(\mathbb{R}) \times S_{2n}^{++}(\mathbb{R})$, tel que : $M = OS$ (où $O_{2n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de taille $2n$ et $S_{2n}^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives). Or, S est la racine carrée d'une matrice symplectique définie positive, donc S est symplectique [1], et O l'est aussitôt aussi. Ainsi, $O \in Sp_{2n}(\mathbb{R}) \cap O_{2n}(\mathbb{R})$ donc commute avec J_n, donc est $\mathbb{C}$-linéaire et on vérifie facilement que $O \in Sp_{2n}(\mathbb{R}) \cap O_{2n}(\mathbb{R})$ est le groupe $U(n)$ des matrices unitaires pour cette structure complexe.

On peut donc définir sans ambiguité, pour tout matrice $S \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$, le complexe $\rho(S)$ comme le déterminant de la matrice $O \in U(n)$ associée à S comme précédemment. De plus, si S stabilise le $\mathbb{R}$-espace vectoriel (lagrangien) engendré par n premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, alors $O \in U(n)$ s'identifie à une matrice orthogonale, donc de déterminant 1 ou -1.

Définition 3.2.7 ([CdV93])**.** Soit S un chemin continu tracé dans $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $S(1)(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}) = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ et $S(0) = I_{2n}$. L'indice de Maslov S est le degré de l'application $\rho^2 \circ S$ (on a bien $\rho^2(S(1)) = \rho^2(S(0))$ et $\forall t \in \rho^2 \circ S(t) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$), *i.e.* l'entier

$$\frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z} \tag{3.2.5}$$

où θ est un relèvement continu de $\rho^2 \circ S$.

Cette définition est invariante par conjugaison symplectique, donc l'indice de Maslov d'une trajectoire périodique de période T, tracée une variété lagrangienne de $T^*(X)$, est défini sans ambiguïté comme l'indice de Maslov de l'application : $[0,1] \ni t \mapsto d\Phi^{tT}_{\gamma(tT)}$.

1. S est diagonalisable en base orthonormée, et ses valeurs propres sont strictement positives, donc ${}^tS$ et son inverse S^{-1} s'écrivent comme un même polynôme d'interpolation en ${}^tS^2$ et S^{-2}, et l'identité $P(S^2)J_n = J_nP(S^{-2})$ est linéaire en $P \in \mathbb{R}[X]$ et vraie sur les monômes. Pour plus de détails, on pourra consulter [Ser01]

3.3 Formule sommatoire de Poisson

Définition-proposition 3.3.1. Un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$. Son rang k est son rang en tant que $\mathbb{Z}$-module. Si $k = n$, il est de rang maximal et il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (dite base de Λ) telle que que $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_n$. La matrice de passage d'une base de Λ à une autre est un élement de $GL_n(\mathbb{Z})$, aussitôt de déterminant égal à 1 en valeur absolue : le réel $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ ne dépend donc pas de la base choisie : c'est par définition le volume de Λ, noté $\mathrm{Vol}(\Lambda)$. On appelle parallélotope associé à la base $(v_1, \ldots, v_n)$ l'ensemble :

$$P_v = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \forall i \in [\![1, n]\!], \alpha_i \in [0, 1[\right\} \tag{3.3.1}$$

Son volume ne dépend pas de la base choisie, c'est $\mathrm{Vol}(\Lambda)$.
Enfin, le réseau dual de Λ est le réseau $\Lambda^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in \Lambda,\ \langle x, v \rangle \in \mathbb{Z}\}$.

Théorème 3.3.2 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Λ un réseau de $\mathbb{R}^n$ de rang maximal et Λ^* son réseau dual. Alors :*

$$\sum_{n \in \Lambda} f(n) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)} \sum_{n \in \Lambda^*} \widehat{f}(2\pi n) \tag{3.3.2}$$

Preuve du théorème 3.3.2. On définit une fonction S de classe C^∞ et Λ-périodique par formule :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n,\ S(t) := \sum_{p \in \Lambda} f(t + p). \tag{3.3.3}$$

(la série de chaque dérivée partielle converge normalement sur tout compact). En particulier, S est la somme de sa série de Fourier. On a alors :

$$S(0) = \sum_{m \in \Lambda^*} c_m(S) \tag{3.3.4}$$

où pour $m \in \Lambda^*$, $c_m(S)$ est le coefficient de Fourier de S d'ordre m. Soit P un parallélotope fondamental de Λ

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \forall i \in [\![1, n]\!], \alpha_i \in [0, 1[\right\} \tag{3.3.5}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
c_m(S) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)} \int_P S(t) e^{-i2\pi\langle m,t\rangle} dt \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)} \sum_{p\in\Lambda} \int_P f(t+p) e^{-i2\pi\langle m,t\rangle} dt \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)} \int_{\cup_{p\in\Lambda} p+P} f(t) e^{-i2\pi\langle m,t\rangle} dt \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i2\pi\langle m,t\rangle} dt \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda)} \hat{f}(2\pi m)
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

La formule sommatoire de Poisson (3.3.2) est obtenue à partir de (3.3.4) en remplaçant les deux membres par leur expression en fonction de f et $\hat{f}$ respectivement.

□

3.3.1 Deux exemples de formule des traces

Dans cette partie, on montre que la formule sommatoire de Poisson peut être interprétée comme une formule des traces dans deux exemples.

3.3.1.a Sur le cercle

On considère l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ confondu, ici encore, avec l'espace des fonctions 1-périodiques de la variable réelle, et le hamiltonien H à domaine dense dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ défini par :

$$H = D_t = -i\hbar\partial_t \tag{3.3.7}$$

H est auto-adjoint et la famille $(|\nu\rangle)_{\nu\in\mathbb{Z}^n}$ définie par :

$$\forall \nu \in \mathbb{Z},\ |\nu\rangle : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{i2\pi\nu t} \tag{3.3.8}$$

est une base hilbertienne de vecteurs propres de H, où, pour $\nu \in \mathbb{Z}$, $|\nu\rangle$ est associé à la valeur propre $2\pi\hbar\nu$.

Le symbole (principal ou total, ils sont égaux ici) de H, $\sigma(H)$ est défini dans les coordonnées canoniques de $T^*(\mathbb{S}^1)$ par :

$$\forall (t,\tau) \in T^*(\mathbb{S}^1),\ \sigma(H)(t,\tau) = \tau \tag{3.3.9}$$

Le flot engendré par le hamiltonien classique $\sigma(H)$ vérifie donc :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall (t,\tau) \in T^*(\mathbb{S}^1),\ \Phi^s(t,\tau) = (s-t,\tau) \tag{3.3.10}$$

Toutes les trajectoires du flot sont donc périodiques. Pour une énergie E fixée, elles sont géométriquement confondues (égales à $\Sigma_E = \mathbb{S}^1 \times \{E\}$) : la période primitive de cette trajectoire (géométrique) est 1, et l'ensemble de ces périodes est donc

$\mathbb{Z}$. Le couple de la trajectoire périodique $\gamma_{E,l}$ d'énergie E de période $l \in \mathbb{Z}^*$ a pour action de Maupertuis :

$$S_{\gamma_{E,l}} = \int_0^l E dt = lE. \tag{3.3.11}$$

De plus, Σ_E a pour volume 1

Soit alors $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dont la transformée de Fourier est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Alors $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et la formule sommatoire de Poisson appliquée à $\varphi_E = \varphi\left(2\pi \cdot - \frac{E}{\hbar}\right)$ donne :

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{2\pi\nu\hbar - E}{\hbar}\right) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_E(\nu) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_E(2\pi l) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{\frac{ilE}{\hbar}} \hat{\varphi}(l)\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Donc :

$$\mathrm{Tr}\varphi\left(\frac{H-E}{\hbar}\right) = \frac{\mathrm{Vol}(\Sigma_E)}{2\pi}\hat{\varphi}(0) + \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}^*} e^{\frac{iS_{\gamma_{E,l}}}{\hbar}}\hat{\varphi}(l) \tag{3.3.13}$$

L'équation (3.3.13) est une formule des traces exacte, faisant le lien entre spectre du hamiltonien quantique et les trajectoires périodiques (incluant les points périodiques de période 0) de son symbole.

3.3.1.b L'oscillateur harmonique

On se place maintenant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$, et on considère l'oscillateur harmonique défini par :

$$H = \frac{1}{2}\left(-\hbar^2\partial_x^2 + x^2\right) \tag{3.3.14}$$

H est autoadjoint et la famille $(|\mu\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}}$ (définie dans la partie 2.3.1) forme une base hilbertienne de vecteurs propres de H où, pour $\mu \in \mathbb{N}$, $|\mu\rangle$ est associé à la valeur propre $\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\hbar$ (voir cette même partie pour une démonstration).

Le symbole (principal ou total, ils sont égaux ici) de H, $\sigma(H)$, est défini dans les coordonnées canoniques de $T^*(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}),\ \sigma(H)(x,\xi) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \xi^2\right) \tag{3.3.15}$$

Le flot engendré par le hamiltonien classique $\sigma(H)$ vérifie donc :

$$\begin{aligned}\forall s \in \mathbb{R},\ \forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}),\ \Phi^s(x,\xi) &= (x\cos s + \xi \sin s, \xi\cos s - x\sin s) \\ &= (x^2+\xi^2)(\cos(\alpha - s), \sin(\alpha - s))\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

où α est défini modulo 2π par la relation : $e^{i\alpha} = x + i\xi$.

Soit $E > 0$. E est une valeur régulière de $\sigma(H)$ et toutes les trajectoires d'énergie E sont périodiques et géométriquement confondues (égales à $\Sigma_E = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \xi^2 = 2E\}$). La période primitive de cette trajectoire (géométrique) est 2π et l'ensemble de ces périodes est donc $2\pi\mathbb{Z}$.

Le couple de la trajectoire périodique $\gamma_{E,l}$ d'énergie E de période $2\pi l \in 2\pi\mathbb{Z}$ a pour action de Maupertuis :

$$S_{\gamma_{E,l}} = \int_0^{2\pi l} 2E \sin^2(t) dt = 2\pi l E. \tag{3.3.17}$$

On a pour $t \in [0, 2\pi l]$, $\rho^2(d_{\gamma(t)}\Phi^t) = e^{-2lit}$ $(d_{\gamma(t)}\Phi^t)$ est déjà symplectique et orthogonale). L'indice de Maslov de $\gamma_{E,l}$ est donc : $\sigma_{\gamma_{E,l}} = -2l$. De plus, Σ_E a pour volume 2π.

Soit alors $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dont la transformée de Fourier est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Soit $E > 0$. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc pour tout entier $k \geq 2$, il existe un réel positif C_k, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leq \frac{C_k}{(1 + |x|)^k} \tag{3.3.18}$$

et en particulier :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} |\varphi| \left(\mu + \frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar}\right) &\leq \sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \frac{C_k}{(1 + |\mu + \frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar}|)^k} \\
&\leq C_k \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\mu + \frac{3}{2} + \frac{E}{\hbar})^k} \\
&\leq C_k \int_{x \geq \frac{E}{\hbar}} \frac{dx}{x^k} \\
&\leq \frac{C_k}{(k-1)E^{k-1}} \hbar^{k-1}
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

On a donc prouvé que : $\sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \varphi \left(\mu + \frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar}\right) = O(\hbar^\infty)$, et la formule sommatoire de Poisson appliquée à $\varphi_E = \varphi \left(\cdot + \frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar}\right)$ donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu \in \mathbb{N}} \varphi \left(\frac{\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \hbar - E}{\hbar} \right) &= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \varphi_E(\mu) + O(\hbar^\infty) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_E(2\pi l) + O(\hbar^\infty) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{\frac{i2\pi l E}{\hbar} + i\pi l} \hat{\varphi}(2\pi l) + O(\hbar^\infty)
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Donc :

$$\mathrm{Tr}\varphi\left(\frac{H-E}{\hbar}\right)=\frac{Vol(\Sigma_E)}{2\pi}\hat{\varphi}(0)+\sum_{l\in\mathbb{Z}^*}e^{\frac{iS_{\gamma_{E,l}}}{\hbar}-i\frac{\pi}{2}\sigma_{\gamma_{E,l}}}\hat{\varphi}(2\pi l)+O(\hbar^\infty) \tag{3.3.21}$$

Ici encore, une application directe de la formule sommatoire de Poisson permet d'obtenir une formule des traces (3.3.21) pour l'oscillateur harmonique.

Remarque 3.3.3. On verra dans la partie 3.5 comment la formule sommatoire de Poisson permet un calcul explicite des coefficients de la formule des traces à partir de la forme normale de Birkhoff.

3.4 Enoncés

On se place ici dans le cadre de [PU91] : $H(x,\hbar D_x,\hbar)$ un opérateur semiclassique autoadjoint elliptique sur une variété compacte X (sans bord) de dimension n, et E une valeur régulière du symbole principal de H. Comme on l'a rappelé dans le Chapitre 1, le spectre de $H(x,\hbar D_x,\hbar)$ est un ensemble discret de valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité $(E_j(\hbar))_{j\in\mathbb{N}}$.

Remarque 3.4.1. La formule des traces dans le cas d'une valeur critique non-dégénérée est étudiée dans [BPU95]).

Théorème 3.4.2 ([PU91])**.** *Soient $C>0$, $\epsilon\in]0,1[$ et*

$$J_{E,C}=\{j\in\mathbb{N};|E_j(\hbar)-E|\le C\hbar^{1-\epsilon}\}.$$

Si le flot Φ est propre sur Σ_E, on a, pour chaque $\phi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\phi}\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, un développement asymptotique quand $\hbar$ tend vers 0 :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\phi\left(\frac{H(x,\hbar D_x,\hbar)-E}{\hbar}\right)\right)&=\sum_{j\in J_{E,C}}\phi\left(\frac{E_j(\hbar)-E}{\hbar}\right)+O(\hbar^\infty)\\&=\sum_{l=1}^{N}\hbar^{-d_l}\sum_{k=0}^{+\infty}a_{l,k}\hbar^k+O(\hbar^\infty)\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

où $l\in[\![1,N]\!]$ indice les composantes connexes $\mathcal{P}_l$ de $\mathcal{P}$ contenant au moins un point périodique de période dans le support de $\hat{\phi}$, et $d_l=(\dim\mathcal{P}_l-1)/2$.

De plus, la somme (finie) des contributions d'ordre dominant des composantes connexes de $\Sigma_E\times\{0\}$ est égale à :

$$\hbar^{n-1}\frac{\hat{\phi}(0)}{(2\pi)^n}\mathrm{Vol}(\Sigma_E) \tag{3.4.2}$$

et pour une composante du type $\gamma\times\{T_\gamma\}$, où γ est une trajectoire périodique isolée :

$$\frac{\hat{\phi}(T_\gamma)}{2\pi}T_\gamma^\sharp\frac{e^{i\left(\frac{S_\gamma}{\hbar}-\frac{\pi\sigma_\gamma}{2}+\beta_\gamma\right)}}{\sqrt{|\det(Id-dP_\gamma)|}} \tag{3.4.3}$$

où σ_γ est un indice de type Maslov de γ, S_γ son action de Maupertuis, dP_γ son application de Poincaré linéarisée, $T_\gamma^\sharp$ la plus petite période positive de γ, et :

$$\beta_\gamma = \int_\gamma H_{sub}(z)dz = \int_0^{T_\gamma} H_{sub} \circ \gamma(t)dt \tag{3.4.4}$$

où H_{sub} est le symbole sous-principal (de Weyl) de $H(x, \hbar D_x, \hbar)$.

La formule des traces de Gutzwiller admet une généralisation sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 3.4.2 : la formule des traces *avec observable*, que nous utiliserons dans l'étude de problèmes inverses (voir Chapitres 4 et 5). Soit $A_\hbar$ un opérateur semiclassique dont le symbole total est à support compact. Alors on a le théorème suivant (en notant $H_\hbar = H(x, \hbar D_x, \hbar)$) :

Théorème 3.4.3 ([PU95]). *Si le flot Φ est propre sur Σ_E, on a, pour chaque $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\phi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, un développement asymptotique quand $\hbar$ tend vers 0 :*

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left(A_\hbar \phi\left(\frac{H_\hbar - E}{\hbar}\right)\right) &= \sum_{j \in J_{E,C}} \langle A_\hbar \psi_{j,\hbar}; \psi_{j,\hbar}\rangle \phi\left(\frac{E_j(\hbar) - E}{\hbar}\right) + O(\hbar^\infty) \\ &= \sum_{l=1}^{N} \hbar^{-d_l} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{l,k}\hbar^k + O(\hbar^\infty)\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

où $(\psi_{j,\hbar})_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de vecteurs propres de $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ telle que pour $j \in \mathbb{N}$, $\psi_{j,\hbar}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $E_j(\hbar)$, et pour $l \in [\![1, N]\!]$ indice les composantes connexes $\mathcal{P}_l$ de $\mathcal{P}$ contenant au moins un point périodique de période dans le support de $\hat{\phi}$, et $d_l = (\dim \mathcal{P}_l - 1)/2$.

De plus, la somme (finie) des contributions d'ordre dominant des composantes connexes de $\Sigma_E \times \{0\}$ est égale à :

$$\hbar^{n-1} \frac{\hat{\phi}(0)}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_E} a d\lambda \tag{3.4.6}$$

où a est le symbole principal de $A_\hbar$, et λ la mesure de Liouville de Σ_E.

Et pour une composante du type $\gamma \times \{T_\gamma\}$, où γ est une trajectoire périodique isolée, la contribution d'ordre dominant est donnée par :

$$\frac{\hat{\phi}(T_\gamma)}{2\pi} \frac{e^{i\left(\frac{S_\gamma}{\hbar} - \frac{\pi\sigma_\gamma}{2} + \beta_\gamma\right)}}{\sqrt{|\det(Id - dP_\gamma)|}} \int_0^{T_\gamma^\sharp} a \circ \gamma(t)dt \tag{3.4.7}$$

où σ_γ, S_γ, dP_γ, $T_\gamma^\sharp$ et β_γ sont définis comme dans le Théorème 3.4.2.

Remarque 3.4.4. Sous l'hypothèse de flot propre, toutes les composantes connexes de $\mathcal{P}$ peuvent être munies de mesures à partir desquelles l'expression du terme dominant dans leur contribution à la formule des traces s'exprime, généralisant ainsi celles données dans les cas de $\Sigma_E \times \{0\}$ et de $\gamma \times \{T_\gamma\}$ où γ est une trajectoire isolée (voir par exemple [GU89]).

Remarque 3.4.5. Dès que $n \geq 2$ et $\hat{\phi}(0) \neq 0$, le terme dominant de 3.4.1 et 3.4.5 est donné par la composante $\Sigma_E \times \{0\}$. On obtient alors une répartition moyenne asymptotique (éventuellement pondérée dans le cas avec observables) des valeurs propres $E_j(\hbar)$ autour de la valeur E.

Remarque 3.4.6. Soit γ une trajectoire périodique isolée de période T : par définition, on peut choisir un voisinage de $V_\gamma \subset \Sigma_E$ de γ, et un voisinage $V_T \subset \mathbb{R}$ de T tel que $\mathcal{P} \cap (V_\gamma \times V_T) = \gamma \times \{T\}$. Si l'on choisit un opérateur $A_\hbar$ dont le symbole total a un support inclus dans V_γ et que l'on impose au support de $\hat{\phi}$ d'être inclus dans V_T, on ne retient que les contributions de $\gamma \times \{T\}$ à la formule des traces. Cette remarque nous sera très utile lors de l'études de problèmes inverses (Chapitres 4 et 5).

3.5 Forme normale de Birkhoff et formule des traces

Dans la prépublication [HP12], on montre que le symbole total d'un opérateur pseudodifférentiel semiclassique elliptique dans un système de coordonnées locales autour d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée γ peut être reconstruit à partir des coefficients de la formule des traces associée à une certaine famille d'observables. Une étape cruciale de la démonstration est le calcul explicite des coefficients de la formule des traces associée à un opérateur pseudodifférentiel semiclassique $A_\hbar$: celui-ci est réalisé dans la preuve de la Proposition 5.2.10 (plus précisément à partir de la page 146).

En choisissant un opérateur pseudodifférentiel semiclassique $A_\hbar$ et une fonction $\hat{\phi}_l$ comme dans la Remarque 3.4.6, on ne retient que les contributions de trajectoire périodique elliptique non-dégénérée γ de période $lT_\gamma^\sharp$ où $T_\gamma^\sharp$ est la période primitive de γ : la formule des traces peut alors être microlocalisée infiniment près de γ.

Dans la preuve de la Proposition 5.2.10, on suppose que le hamiltonien est déjà défini dans des coordonnées de Fermi, *i.e.* que son symbole principal s'écrit dans des coordonnées locales $(x, t, \xi, \tau) \in T(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ telles que $\gamma(t) = (0, t, 0, 0)$:

$$\sigma_p(H)(x, t, \xi, \tau) = E + \tau + \sum_{j=1}^{n} \theta_j \frac{x_j^2 + \xi_j^2}{2} + O\left((||(x, \xi)||^2 + |\tau|)^{\frac{3}{2}} \right) \tag{3.5.1}$$

On peut alors appliquer le Théorème 2.3.28, et on obtient, en reprenant les notations de la preuve de la Proposition 5.2.10, que $2\pi \mathrm{Tr}\left(A_\hbar \phi_l \left(\frac{H-E}{\hbar} \right) \right)$ est égal, modulo $O(\hbar^\infty)$:

$$\sum_{\mu,\nu}\langle\mu,\nu|e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}Oe^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}|\mu,\nu\rangle\times\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho\left((|\mu|+\frac{n}{2}+|\nu|)\hbar^{\frac{1}{4}}\right)e^{it(2\pi\nu+\theta.(\mu+\frac{1}{2}))}\dots$$
$$\dots\exp\left(\frac{it}{\hbar}\sum_{1\leq q\leq N-2}H^q\left((\mu+\frac{1}{2})\hbar,\nu\hbar,\hbar\right)+O\left((|\mu|+|\nu|)^{\frac{N+1}{2}}\hbar^{\frac{N-1}{2}}\right)\right)dt$$
$$=\sum_{\mu,\nu}\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho\left((|\mu|+\frac{n}{2}+|2\pi\nu|)\hbar^{\eta}\right)e^{it(2\pi\nu+\theta.(\mu+\frac{1}{2})+\frac{H^2(0,0,\hbar)}{\hbar})}$$
$$\left(1+\sum_{i\geq 1}^{\frac{N-1}{2}}\hbar^iQ_i(\mu+\frac{1}{2},\nu,t)\right)\times\sum_{p\geq 1}^{\frac{N+1}{2}}\sum_{|k|+m\leq p}b_{k,m,p-|k|-m}(\mu+\frac{1}{2})^k(2\pi\nu)^m\hbar^p dt+O(\hbar^{\frac{N+1}{2}})$$

où $i\leq\frac{N-1}{2}$, Q_i est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $1+i$ $\left(\mu+\frac{1}{2},\nu\right)$ et qui ne dépend que de de H^q (qui sont définis dans la preuve comme des troncatures de la forme normale de Birkhoff) et du développement de Taylor de exp, et les $b_{k,m,s}$ $((k,m,s)\in\mathbb{N}^{n+2}\backslash\{0\})$ proviennent du développement de Taylor en $(\mu\hbar,\nu\hbar,\hbar)=(0,0,0)$ des élements de matrices diagonaux $\langle\mu,\nu|e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}Oe^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}|\mu,\nu\rangle$. On détermine alors tous les coefficients du développement semiclassique de la formule des traces. En particulier, en utilisant la formule sommatoire de Poisson (formulée cette fois-ci en termes de distributions) :

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}e^{i2\pi\nu t}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\delta(t-l) \tag{3.5.2}$$

et l'égalité au sens des distributions :

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}e^{it\theta.(\mu+\frac{1}{2})}=\frac{e^{i\frac{t}{2}(\alpha_1+\dots+\alpha_n)}}{\prod_{j=1}^n(1-e^{it\alpha_j})} \tag{3.5.3}$$

on obtient la contribution principale de la l-ième itérée de γ ($l\in\mathbb{Z}^*$) à la formule des traces (3.4.5) est :

$$\frac{b_{0,0,0}}{2\pi}e^{il\frac{H^2(0,0,\hbar)}{\hbar}}\frac{e^{i\frac{l}{2}(\theta_1+\dots+\theta_n)}}{\prod_{j=1}^n(1-e^{il\theta_j})} \tag{3.5.4}$$

On déduit de la construction de la forme normale de Birkhoff quantique (Théorème 2.3.28) que $H^2(0,0,\hbar)$ est une homothétie de rapport $\hbar\int_0^1 H_{sub}\circ\gamma(t)dt$, donc ici :

$$\beta_\gamma=l\frac{H^2(0,0,\hbar)}{\hbar} \tag{3.5.5}$$

Dans notre cas, l'action de Maupertuis de γ est nulle.

Remarque 3.5.1. Si $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ est obtenu comme réduction d'un hamiltonien par passage à des coordonnées de Fermi, cela ne signifie pas que la trajectoire périodique d'origine avait une action nulle (voir Remarque 3.2.6).

On a $T_\gamma^\sharp = 1$, et $\hat{\phi}_l(l) = 1$. De plus,

$$b_{0,0,0} = \int_0^1 a \circ \gamma(t) dt \tag{3.5.6}$$

Et enfin :

$$\frac{e^{i\frac{l}{2}(\theta_1+\cdots+\theta_n)}}{\prod_{j=1}^{n}(1-e^{il\theta_j})} = \frac{i^n}{2^n \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{l\theta_j}{2}\right)} \tag{3.5.7}$$

On en déduit que l'indice de type Maslov σ_γ est tel que :

$$\frac{i^n}{2^n \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{l\theta_j}{2}\right)} = \frac{i^{-\sigma_\gamma}}{2^n \prod_{j=1}^{n} |\sin\left(\frac{l\theta_j}{2}\right)|} = \frac{i^{-\sigma_\gamma}}{\sqrt{|\det(Id - dP_\gamma)|}} \tag{3.5.8}$$

Finalement, on retrouve bien que (3.5.4) est égale à :

$$\frac{\hat{\phi}(T_\gamma)}{2\pi} \frac{e^{i\left(\frac{S_\gamma}{\hbar} - \frac{\pi\sigma_\gamma}{2} + \beta_\gamma\right)}}{\sqrt{|\det(Id - dP_\gamma)|}} \int_0^{T_\gamma^\sharp} a \circ \gamma(t) dt \tag{3.5.9}$$

Remarque 3.5.2. L'indice de type Maslov intervenant dans la formule des traces n'a pas été défini précisément. Cependant, il n'est pas nécessaire de le connaître pour effectuer un calcul explicite des coefficients de la formule des traces à partir de la forme normale de Birkhoff, et sa définition n'intervient donc dans aucune des preuves de nos résultats. Sa définition est délicate (voir [dG07, CRL90]) et non nécessaire ici : nous n'insistons donc volontairement pas sur ce point.

Chapitre 4

Problèmes inverses

Dans tout ce chapitre, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.

4.1 Introduction

Rappelons ici que, formellement, deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un fait intervenir tout ou une partie des solutions de l'autre. Cette définition est asymétrisée par l'interprétation physique suivante : tandis qu'un problème direct est celui qui a été naturellement considéré par les scientifiques dans un premier temps, un problème inverse correspond à la détermination des *causes* à partir des *effets*. Les problèmes inverses ont été rendus populaires par M. Kac et son célèbre article : « Can one hear the shape of a drum ? », [Kac66]. Alors que le problème direct est connu (deux variétés isométriques sont isospectrales), il se pose la question suivante : étant donné le spectre du laplacien sur un domaine plan Ω borné à bord lisse avec une condition de Dirichlet au bord (correspondant aux fréquences propres de vibration du tambour), peut-on connaître, à isométrie près, le domaine Ω (la forme du tambour) ?

Dans cette thèse, nous étudierons le problème inverse suivant : supposons que H est un opérateur pseudodifférentiel elliptique (a priori inconnu) sur une variété X. De quelles données spectrales avons-nous besoin pour retrouver son symbole « total », autrement dit H microlocalement au voisinage infinitésimal d'un ensemble (supposé connu) invariant par la dynamique classique engendrée par son symbole principal ?

Rappelons que dans le cas où cet ensemble est une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée γ d'énergie E, si l'on suppose pour simplifier les énoncés que les périodes lT, $l \in \mathbb{Z}^*$, des itérées de γ sont isolées et que l'on choisit des fonctions ϕ_l telles que le support de $\hat{\phi}_l$ ne contient que la période lT, on sait que le développement semiclassique –donné par la formule des traces de Gutzwiller [Gut71] – des traces de $\phi_l\left(\frac{H-E}{\hbar}\right)$ pour $l \in \mathbb{Z}^*$ détermine la forme normale de Birkhoff associée à $H(x, \hbar D_x, \hbar)$ au voisinage de γ (cet énoncé est démontré dans [ISZ02, GP10], après des travaux de [Zel97, Zel98] et [Gui96] dans le contexte des asymptotiques en haute énergie). Dans le cas où l'ensemble invariant est un fond de puits d'énergie E, on a un résultat analogue, où la forme normale de Birkhoff est déterminée par le spectre du hamiltonien dans l'intervalle $[E, E+\hbar^{1-\alpha}]$ (où $\alpha > 0$ peut être choisi quelconque, voir [GPU07]).

Le but de cette thèse est la détermination du symbole de H lui-même, et non plus seulement de sa forme normale de Birkhoff, dans un voisinage infinitésimal de l'ensemble invariant (γ ou m) considéré dans les deux cas précédents.

4.2 Principaux résultats

Dans cette partie, on présente la prépublication [HP12] en collaboration avec Thierry Paul, où sont regroupés les principaux résultats obtenus pendant cette thèse.

Puisque les coefficients de la formule des traces de Gutzwiller dans le cas d'une trajectoire périodique et le bas du spectre dans le cas d'un fond de puits sont invariants par conjugaison par un opérateur microlocalement unitaire, il est nécessaire de supposer connue plus d'information spectrale que dans les résultats mentionnés ci-dessus.

Les résultats obtenus sont donc énoncés dans les trois cas suivants, où l'invariant de la dynamique classique considéré est :

Cas 1. une trajectoire elliptique non-dégénérée γ.

Cas 2. un minimum m non-dégénéré (avec une condition de non-résonance).

Cas 3. un minimum m non-dégénéré (avec une condition de non-résonance) dans le cas particulier où le hamiltonien est un opérateur de Schrödinger.

Dans chacun des trois cas suivants, on a séparé la détermination locale du hamiltonien (résultats C ci-dessous) en deux résultats intermédiaires (résultats A et B).

Résultats A. Dans le cas 1, les premiers coefficients de la formule des traces associée [1] à une famille (finie) d'observables vérifiant des propriétés algébriques au voisinage de γ permettent de reconstruire explicitement un système de coordonnées de Fermi [2]. Dans les cas 2 et3, le système de coordonnées de Fermi est reconstruit à partir du bas du spectre et d'éléments de matrice diagonaux d'une famille (finie) d'observables relativement aux vecteurs propres associés. Ces résultats sont énoncés précisément dans les Théorèmes 5.1.3, 5.1.7 et 5.1.10.

Résultats B. Dans le cas 1, les coefficients de la formule des traces associés à une famille d'observables définie dans un système de coordonnées de Fermi (non nécessairement celui construit en A) permettent de reconstruire explicitement le développement de Taylor du symbole total du hamiltonien exprimé dans ce même système de coordonnées de Fermi. Dans

1. plus précisément les coefficients intervenant dans le développement asymptotique (3.4.5) dans la limite semiclassique.

2. voir partie 2.2

les cas 2 et 3, ce développement de Taylor est reconstruit à partir du bas du spectre et d'éléments de matrice diagonaux relativement aux vecteurs propres associés. Dans le cas 3, la famille d'observables est finie. Ces résultats sont énoncés précisément dans les Théorèmes 5.1.4, 5.1.8 et 5.1.11.

Résultats C. La combinaison des résultats A et B permet d'obtenir le résultat annoncé : le développement de Taylor du symbole total du hamiltonien est déterminé à l'aide des données spectrales ci-dessus. C'est le contenu des Corollaires 5.1.5, 5.1.9 et 5.1.12.

Enfin, on donne des analogues classiques de ces résultats dans la partie 5.4.

Remarque 4.2.1. Dans [CdVG11], Y. Colin de Verdière et V. Guillemin prouvent qu'en dimension 1, il est possible de déterminer le potentiel à partir de la forme normale de Birkhoff *quantique* – elle-même déterminée par le bas du spectre – sous des hypothèses génériques, affaiblies par le premier auteur dans [CdV11]. Ici, on montre que le développement de Taylor à tout ordre du potentiel peut être reconstruit sans les hypothèses génériques des résultats de [CdVG11, CdV11] et en dimension finie quelconque, mais à partir d'éléments de matrices diagonaux associés à une famille *finie* d'observables et non plus seulement à partir de la partie basse du spectre.

Remarque 4.2.2. L'information nécessaire ne requiert pas la connaissance des vecteurs propres $(\psi_{j,\hbar})_j$ mais seulement des éléments de matrice diagonaux – qui sont déterminés par les coefficients de la formule des traces (3.4.5) dans le cas d'une trajectoire périodique elliptique – associés à une famille d'observables, ces éléments de matrice correspondant physiquement à la valeur moyenne des résultats d'une mesure.

4.2.1 Résultats A

La preuve des résultats A est située dans la partie 5.3 et fait appel aux appendices.

Dans l'appendice B, on retrouve les coefficients θ_i ($i \in [\![1, n]\!]$) de la partie linéaire en p dans les cas 2-3 (fond de puits) – les angles de Poincaré dans le cas 1 (trajectoire périodique)– à partir de données spectrales. Dans le cas du fond de puits, on a déjà vu que ces coefficients étaient uniques à permutation près (Proposition 2.2.1), et réciproquement une permutation des coordonnées envoie une forme normale de Birkhoff du hamiltonien sur une autre (Proposition 2.5.1). On ne peut donc déterminer les θ_i ($i \in [\![1, n]\!]$) qu'à permutation près : une fois ordonnés par ordre croissant, on les détermine par récurrence à l'aide du bas du spectre, plus précisément sur une bande spectrale de largeur $\epsilon(\hbar)$ telle que $\hbar \underset{\hbar\to 0}{=} o(\epsilon)$.

Dans le cas 1, D. Fried, en réponse à une question de J.J. Duistermaat et V. Guillemin, a montré que les racines d'un polynôme réciproque $P \in \mathbb{R}[X]$ sont entièrement par la suite $(b_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$, où pour $N \geq 1$, b_N est la valeur absolue du N-ième résultant cyclique de P (voir [Fri88]), si aucun terme de cette suite n'est nul. En particulier, si $A \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ est une matrice symplectique, son polynôme caractéristique χ_A est réciproque réel (Proposition 1.1.35), et pour $N \geq 1$, $b_N = |\det(I_{2n} - A^N)|$. Donc si (dP_γ) est la matrice de l'application de Poincaré linéarisée dans une base symplectique – rappelons que son spectre ne dépend pas du choix du point $m \in \gamma$, du choix d'une section de Poincaré locale, ni du choix d'une base symplectique du tangent à cette dernière d'après le Corollaire 1.1.23 – alors (dP_γ) est symplectique et $|\det(I_{2n} - dP_\gamma^N)|$ ne s'annule jamais. Par conséquent, le spectre de l'application de Poincaré linéarisée est entièrement déterminé par la suite $(|\det(I_{2n} - dP_\gamma^N)|)_{N\geq 1}$. La suite $(|\det(I_{2n} - dP_\gamma^N)|)_{N\geq 1}$ est à son tour donnée par la contribution principale de la trajectoire à la formule des traces (Théorème 3.4.2, voir Remarque 4.2.4 ci-dessous). Réciproquement, il existe une forme normale de Birkhoff du hamiltonien correspondant à chaque réalisation des angles de Poincaré modulo 2π et permutation des coordonnées (Proposition 2.5.8).

La seconde étape consiste à reconstruire explicitement à partir des données spectrales annoncées un symplectomorphisme envoyant le système de coordonnées d'origine sur un système de coordonnées de Fermi (une fois fixé le choix d'un ordre pour les θ_i, $i \in [\![1, n]\!]$, et d'une réalisation modulo 2π dans le cas 1).

Un tel symplectomorphisme a été construit dans les Propositions 2.2.11, 2.2.1 et 2.2.7 dans les cas respectifs 1, 2 et 3. Le reste de cette partie est consacré à la présentation de sa reconstruction explicite à partir des données spectrales des Théorèmes 5.1.3, 5.1.7 et 5.1.10.

Dans le cas 2, le symplectomorphisme définissant un système de coordonnées de Fermi peut être choisi linéaire dans un système de coordonnées de Darboux et, sous cette condition, le Lemme A.1 détermine l'ensemble $\mathcal{S}$ des symplectomorphismes qui conviennent (au sens où ils définissent un système de coordonnées de Fermi). Le lemme A.2 donne alors un ensemble (fini) d'invariants de $\mathcal{S}$, et affirme que l'on peut construire une matrice appartenant à $\mathcal{S}$ à partir de la donnée de cette famille d'invariants. L'idée de la preuve est la suivante : on construit une famille $(T_A)_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}$ dont on montre les deux propriétés suivantes :

1. Il existe au moins un ensemble $A \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])$, tel que : $T_A \in \mathcal{S}$.
2. Il existe au plus un ensemble $A \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])$, tel que que T_A est symplectique.

La première de ces deux assertions est un résultat d'existence non constructif puisque le test d'appartenance à $\mathcal{S}$ fait appel à la connaissance de la forme hessienne du hamiltonien. Cependant, la construction de la famille $(T_A)_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}$ ne requiert que la donnée des invariants, et le test d'appartenance à $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est indépendant de la connaissance du hamiltonien. En réunissant ces deux résultats, on construit donc explicitement un élement de $\mathcal{S}$. Il ne reste alors plus qu'à déterminer l'ensemble des invariants de $\mathcal{S}$. On prouve qu'ils sont entièrement déterminés par les éléments de matrice diagonaux d'une famille d'observables vérifiant les conditions de l'énoncé du Théorème 5.1.7 relativement aux vecteurs propres correspondant à un intervalle spectral $[E, E + \epsilon(\hbar)]$(avec $\hbar \underset{\hbar\to 0}{=} o(\epsilon)$ et E est le minimum du symbole principal du hamiltonien), d'abord dans un cas particulier de telles observables (donné dans l'énoncé du théorème) étendu ensuite au cas général (où l'on impose uniquement une condition algébrique sur les symboles).

La preuve dans le cas 3 (où le hamiltonien est un opérateur de Schrödinger) est tout à fait similaire, à ceci près que le symplectomorphisme peut maintenant non seulement être choisi linéaire dans un système de coordonnées de Darboux $(x, \xi) \in \mathcal{U} \subset T^*(\mathbb{R}^n)$ mais peut aussi être défini uniquement à partir de son action sur de la section nulle de $T^*(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des symplectomorphismes définissant un système de coordonnées de Fermi et vérifiant ces deux conditions s'en trouve considéralement réduit (il est maintenant fini), et l'ensemble des invariants également : on a donc besoin de moins d'observables pour le déterminer.

Remarque 4.2.3. Ce n'est pas ici que la réduction du jeu d'hypothèses lors du passage au cas général à celui d'un opérateur de Schrödinger est la plus spectaculaire, mais dans les résultats de type B : le nombre d'observables dont les éléments de matrice diagonaux permettant la reconstruction du symbole total du hamiltonien y passera d'infini (polynomial en N si l'on veut reconstruire le développement de Taylor du symbole total jusqu'à l'ordre N) à fini.

Enfin, dans le cas d'une trajectoire périodique elliptique non-dégénérée (cas 1), le symplectomorphisme peut maintenant s'écrire dans un système de coordonnées symplectiques locales $(x, t, \xi, \tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ tel que $\gamma = \{x = \xi = \tau = 0\}$ donné par le théorème du voisinage tubulaire de Weinstein [Wei71, Wei77, Wei81] (en réarrangeant ici les variables pour une commodité de notations) :

$$\varphi_{S,M}(x, \xi, t, \tau) = (S(t)(x, \xi), t, \tau + q_M(t, x, \xi)) \tag{4.2.1}$$

où pour tout $t \in \mathbb{S}^1$, $q_M(t, \cdot, \cdot)$ est la forme quadratique de matrice $M(t)$, et

$$S(t) \in Sp_{2n}(\mathbb{R}) \ \text{ et } M(t) = {}^tS(t)J_nS'(t) \tag{4.2.2}$$

Il suffit donc de construire, à partir des données spectrales de l'énoncé du Théorème 5.1.3, une fonction S telle que $\varphi_{S,M}$ définisse bien un système de coordonnées de Fermi. Or les coefficients des termes en $\hbar$ de la formule des traces associée aux observables $(P_p^k))_{1 \leq k \leq 2n^2+n, p \in \mathbb{Z}}$ (définies dans l'énoncé) déterminent par un calcul direct (effectué dans la preuve du deuxième point de la Proposition 5.2.10, à partir de l'équation 5.2.52 page 146) une famille de fonctions analogue à la famille d'invariants du cas 2. Une adaptation du Lemme A.2 permet alors, non plus de construire explicitement une fonction S telle que $\varphi_{S,M}$ définisse bien un système de coordonnées de Fermi, mais une fonction S telle qu'il existe une fonction $\mathbb{S}^1 \ni t \mapsto U(t)$, telle que $S_0 = SU$ convienne et pour tout $t \in \mathbb{S}^1$, $U(t)$ est diagonale par blocs de rotations de taille 2 et d'angles respectifs $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n})$. Les coefficients restants (*i.e.* les coefficients des termes en $\hbar$ de la formule des traces associée aux observables $(P_p^0)_{p \in \mathbb{Z}}$) déterminent alors les fonctions dérivées $\dot{\alpha_1}, \dots, \dot{\alpha_n}$ et donc, à constante (matricielle) près, une fonction S_0 telle que φ_{S_0,M_0} définisse bien un système de coordonnées de Fermi. On prouve enfin que tout choix de la constante définit encore un système de coordonnées de Fermi.

Remarque 4.2.4. Dans le calcul direct des coefficients de la formule des traces avec observables évoqué ci-dessous, ainsi que dans la détermination des angles de Poincaré à l'aide du résultat de [Fri88], on ne retient que la contribution de γ à la formule des traces. C'est possible en choisissant des observables localisée autour de γ et une fonction ϕ dont le support de $\widehat{\phi}$ ne contient que la période T grâce à l'hypothèse de non-dégénérescence (voir la Remarque 3.4.6). Si la période de γ est isolée dans le spectre des périodes, il n'y a à faire d'hypothèse que sur le support de $\widehat{\phi}$.

4.2.2 Résultats B

La preuve des résultats B est située dans la partie 5.2. La stratégie des preuves est analogue à celles des résultats A : on part du fait qu'il est déjà connu que la forme normale de Birkhoff est déterminée par le spectre du hamiltonien dans les cas 2-3 ([GPU07]), par les coefficients de la formule des traces dans le cas 1 ([ISZ02, GP10]). Notons que ces résultats s'entendent au sens où l'on a microlocalisé la formule des traces comme dans la Remarque 4.2.4 et la forme normale de Birkhoff est confondue avec sa classe d'équivalence modulo une permutation des coordonnées dans son symbole total et modulo le choix d'une réalisation des angles de Poincaré. On cherche alors à déterminer l'opérateur W_N (construit dans les Théorèmes 2.3.28 et 2.3.38) dont l'exponentielle associée comme dans les énoncés de ces deux théorèmes conjugue le hamiltonien d'origine à sa forme normale de Birkhoff quantique tronquée à l'ordre N.

Le Théorème 5.1.4 (cas 1) a été décomposé en deux propositions : la Proposition 5.2.10, où l'on prouve que les coefficients de la formule des traces associée à une observable O dont le symbole principal s'annule sur γ déterminent les éléments de matrices diagonaux de O relativement aux vecteurs propres du hamiltonien associés à une bande spectrale de largeur $\hbar^{1-\alpha}$ (où $\alpha > 0$ est peut être choisi quelconque), le reste du spectre apportant une contribution en $O(\hbar^\infty)$ à la formule des traces. Dans la Proposition 5.2.11, on montre que les éléments ces éléments de matrice associés à la famille d'opérateurs definie dans le Théorème 5.1.4 déterminent le symbole total du hamiltonien dans un voisinage (formel) de la trajectoire.

La preuve du Théorème 5.1.8 (cas 2) est en tout point analogue à celle de la preuve de la Proposition 5.2.11. Elle est donc omise. En revanche, le Théorème 5.1.11, dont les hypothèses sont sensiblement moins fortes que celles du Théorème 5.1.8, est prouvé dans [HP12].

On présente donc ci-dessous les preuves des Propositions 5.2.10, 5.2.11 et 5.1.11. On reprend les notations de l'article, qui coïncident avec celles du Chapitre 2.

La preuve de la Proposition 5.2.10 repose sur un calcul explicite des coefficients de la formule des traces. Les N premiers coefficients de la formule des traces font intervenir les coefficients du développement asymptotique (quand $|\mu\hbar| + |\nu\hbar| \to 0$) tronqué à l'ordre N des élements de matrices de l'opérateur $e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} O e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}$ pris entre les vecteurs propres $|\mu, \nu\rangle$ de la forme normale de Birkhoff du hamiltonien quantique.

Plus précisément, on détermine à partir des coefficients de la formule des traces des fractions rationnelles en les $e^{il\theta_j}, j = 1 \ldots n, l \in \mathbb{Z}^*$, dont les coefficients dépendent linéairement de ceux du développement asymptotique des éléments de matrices et dont les uniques pôles sont 1 et -1. Le théorème de Kronecker (Théorème 2.5.9) nous permet d'étendre la connaissance des valeurs de ces fractions rationnelles à celles prises sur tout $(\mathbb{S}^1 \setminus \{-1; 1\})^n$, et ainsi de retrouver le développement asymptotique des éléments de matrice en étudiant l'asymptotique de ces fractions rationnelles au voisinage de $\{1\}^n$.

Les $W_{\leq N}$ sont des opérateurs polynomiaux : il suffit, pour les reconstruire, de déterminer leurs coefficients. Ces derniers interviennent dans le développement asymptotique des éléments de matrice associés aux opérateurs donnés par l'énoncé du Théorème 5.1.4, et leurs contributions respectives à ce développement asymptotique dépendent de la manière dont des fonctions $\mu(\hbar), \nu(\hbar)$ tendent vers $+\infty$ tout en satisfaisant la condition imposée $|\mu\hbar| + |\nu\hbar| \to 0$. Dans le preuve de la Proposition 5.2.11, on les détermine ainsi par récurrence (en ayant choisi une relation d'ordre *ad hoc* sur l'ensemble qui les indice).

Dans la preuve du Théorème 5.1.11, on commence par traduire l'énoncé en termes purement classiques. Comme dans la partie 2.4.3, les symboles principaux des opérateurs W_N sont exactement les fonctions F_N de la construction classique de la formule des traces : en effet, si l'on impose aux fonctions F_N d'être polynomiales sans termes diagonaux en $z, \bar{z}$ (*i.e.* de la forme $a_k z^k \bar{z}^k$, $k \in \mathbb{N}^n$, voir partie 2.3.1), une telle suite $(F_N)_{N \geq 3}$ est unique. Les coefficients du développement de Taylor du potentiel comme fonction de $z, \bar{z}$ sont liés par la relation $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, et donc ceux des fonctions $F_N,\ N \geq 3$, aussi : seules $2^n - 1$ observables (classiques, les symboles principaux des observables quantiques données par l'énoncé du théorème) sont nécessaires à leur reconstruction. Les termes extra-diagonaux du développement de Taylor du potentiel sont déterminés par récurrence à partir des fonctions $F_N,\ N \geq 3$, tandis que les termes diagonaux sont déterminés par récurrence à l'aide des coefficients de la forme normale de Birkhoff. On retrouvera des méthodes analogues dans la partie 4.3.

Concluons cette partie par un calcul du nombre d'observables que l'on se donne dans les énoncés des Théorèmes 5.1.4, 5.1.8 et 5.1.11 pour la détermination du développement de Taylor du symbole total du hamiltonien jusqu'à l'ordre N (où notre définition du degré *pondéré* d'une fonction polynomiale homogène dans le cas 1 est donnée dans la Définition 2.3.6).

Celles-ci sont définies en imposant à l'ordre dominant de leur symbole principal d'être un monôme de degré au plus N.

Dans le cas 1, on identifie les fonctions polynomiales et

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})[X_1, \ldots, X_n, \Xi_1, \ldots, \Xi_n, \Theta]$$

muni du degré d défini par : $d(X^j \Xi^k \Theta^l) = |j| + |k| + 2j$.

L'espace des fonctions polynomiales de degré au plus N est engendré par

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \binom{N-2j+2n-1}{2n-1} \underset{N\to+\infty}{\sim} C_n N^{2n}$$

monômes (où $C_n > 0$, et l'on a utilisé le Lemme 4.3.8), alors que l'espace engendré par les ordres dominant des symboles principaux de l'énoncé du Théorème 5.1.4 n'est engendré que par

$$1 + 2^n \binom{N+n-1}{n-1} \underset{N\to+\infty}{\sim} C'_n N^{n-1}$$

monômes (où $C'_n > 0$).

Enfin, dans les cas 2-3, il y a $\binom{N+2n-1}{2n-1} \underset{N\to+\infty}{\sim} C_n N^{2n-1}$ monômes de degré au plus N, tandis que l'on ne fait appel qu'à $2^n \binom{N+n-1}{n-1} \underset{N\to+\infty}{\sim} C'_n N^{n-1}$ observables dans le cas 2 et $2^n - 1$ observables dans le cas 3. La réduction du nombre d'observables nécessaires à la reconstruction du symbole du hamiltonien provient du fait que ce dernier est conjugué à sa forme normale de Birkhoff par un symplectomorphisme, et non pas un difféomorphisme quelconque.

4.3 Retour sur l'opérateur de Schrödinger

Dans cette partie, on présente le résultat de [GU07]. On prouve ensuite (Proposition 4.3.7) qu'il est optimal : sans la condition de symétrie sur le potentiel, il existe, pour toute fonction $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (4.3.21), une infinité [3] d'opérateurs de Schrödinger dont le symbole a pour forme normale de Birkhoff classique la fonction : $(x, \xi) \mapsto H \circ p(x, \xi)$.

4.3.1 Détermination du potentiel sous une hypothèse de symétrie

On considère ici le symbole de l'opérateur de Schrödinger semiclassique :

$$H(x, \hbar D_x) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x) \tag{4.3.1}$$

à domaine dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, *i.e.* le hamiltonien classique défini sur $T^*(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\forall (x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ H(x, \xi) = \frac{1}{2} ||\xi||^2 + V(x) \tag{4.3.2}$$

où le potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ admet un minimum local E non-dégénéré en $x = 0$.

On a montré dans la partie 2.2.2 la proposition :

3. Plus précisément, leurs développements de Taylor sont deux à deux distincts, sinon le résultat est trivial : la forme normale de Birkhoff classique ne fait intervenir le potentiel que modulo une fonction plate !

Proposition 4.3.1. *Il existe un isomorphisme linéaire u de* $\mathbb{R}^n$*, et des réels* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *strictement positifs tels que l'on ait :*

$$H \circ \phi_u(x, \xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O\left(||x||^3\right) \tag{4.3.3}$$

où ϕ_u *est le symplectomorphisme défini sur* $T^*(\mathbb{R}^n)$ *par :* $\phi_u(x, \xi) = (u(x), u^{*-1}(\xi))$.

puis le théorème suivant dans la partie 2.4.2 :

Théorème 4.3.2. *En supposant les réels* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *rationnellement indépendants, il existe un symplectomorphisme* $\psi : T^*(\mathbb{R}^n) \to T^*(\mathbb{R}^n)$ *tels que :*

$$\psi(0,0) = (0,0) \text{ et } \forall (x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n), \psi^* H(x, \xi) = H_1(p) + H_2(x, \xi) \tag{4.3.4}$$

où $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *vérifie au voisinage de* $p = 0$ *:*

$$H_1(p) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i p_i + O(||p||^2) \tag{4.3.5}$$

et H_2 *est s'annule à tout ordre en* $x = \xi = 0$.

On appelle alors forme normale de Birkhoff du hamiltonien classique H *la fonction* $(x, \xi) \mapsto H_1(p(x, \xi))$ [4].

Dans le cas où on fait l'hypothèse supplémentaire sur V qu'il est symétrique par réflexion autour des axes de coordonnées, *i.e.* que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = V(\pm x_1, \ldots, \pm x_n) \tag{4.3.6}$$

V. Guillemin et A. Uribe ont prouvé que le développement de Taylor en 0 à tout ordre de V était déterminé par celui de la forme normale de Birkhoff de H au même ordre.

Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 4.3.3 ([GU07])**.** *Si* $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est symétrique par réflexion autour des axes de coordonnées, et même admet le développement de Taylor suivant à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *:*

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2 + O(||x||^4) \tag{4.3.7}$$

où les réels strictement positifs $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *sont rationnellement indépendants.*
Pour tout $N \geq 2$*, le développement de Taylor en* 0 *à l'ordre* $2N \in \mathbb{N}$ *(en* x*) est entièrement déterminé par celui en* $(0,0)$ *au même ordre* $2N$ *(en* x, ξ*) de la forme normale de Birkhoff du hamiltonien classique* H.

4. où rappelons-le, $p = p(x, \xi)$ est le n-uplet ayant pour j-ième coordonnées $p_j = \frac{x_j^2 + \xi_j^2}{2}$ (Définition 2.3.5).

Remarque 4.3.4. L'hypothèse (4.3.7) ne fait rien perdre en généralité : comme on l'a vu dans la partie 2.2.2, V peut toujours s'écrire sous cette forme, où les réels positifs $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont exactement ceux de la Proposition 4.3.1, à changement de variables orthogonal u près. Celui-ci induit un symplectomorphisme $\phi_u = (u, u^{*-1})$ qui change bien le hamiltonien classique $H(x, \xi) = \frac{1}{2} ||\xi||^2 + V(x)$ en $H \circ \phi_u(x, \xi) = \frac{1}{2} ||\xi||^2 + V \circ u(x)$.

On a alors le corollaire immédiat :

Corollaire 4.3.5 ([GU07]). *Si l'on suppose que V est réel-analytique, i.e. somme de sa série de Taylor, alors la conclusion du Théorème 4.3.3 devient : la forme normale de Birkhoff du hamiltonien classique H détermine le potentiel V.*

Démonstration du Théorème 4.3.3. Commençons par rappeler la proposition suivante, prouvée dans la partie 2.4.2 :

Proposition 4.3.6. *On suppose les réels $(\theta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ rationnellement indépendants, et on définit H_0 par :*

$$\forall (x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n), \; H_0(x, \xi) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} \tag{4.3.8}$$

Soit $G \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ une fonction polynomiale homogène de degré $k \geq 3$. Alors, il existe un unique couple de fonctions $G_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n), \; \{H_0, F\}(x, \xi) = G(x, \xi) - G_1(p) \tag{4.3.9}$$

et F est polynomiale sans terme diagonal.

De plus, on a :

1. *F est polynomiale homogène de degré k et est entièrement déterminée par les termes extra-diagonaux de G.*
2. *G_1 est polynomiale homogène de degré $\frac{k}{2}$ si k est pair, nulle sinon. De plus, $G_1(z\bar{z})$ est exactement égal à la somme des termes diagonaux de G.*

La connaissance du terme quadratique (linéaire en $p = z\bar{z}$) de la forme normale de Birkhoff détermine les θ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ et donc a fortiori le symplectomorphisme $\phi_\theta = (\Delta, \Delta^{-1})$ où Δ est la matrice diagonale de taille n ayant pour éléments diagonaux $\theta_1, \dots, \theta_n$. On a alors pour $(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} H \circ \phi_\theta(x, \xi) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \theta_i \xi_i^2 + V\left(\frac{x_1}{\sqrt{\theta_1}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{\theta_n}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + R(x) \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

où $R : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto V\left(\frac{x_1}{\sqrt{\theta_1}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{\theta_n}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i^2$ est symétrique par rapport aux réflexions autour des axes de coordonnées et s'annule jusqu'à l'ordre 4 en $x = 0$, et il suffit de déterminer le développement de Taylor de R en 0 à un ordre donné $2N$ pour obtenir celui de V au même ordre.

Pour $k \geq 2$, on note R_{2k} le polynôme homogène de degré $2k$ intervenant dans le développement de Taylor de R. Du fait de la symétrie de R, on a :

$$R \sim \sum_{k=2}^{+\infty} R_{2k} \tag{4.3.11}$$

La forme normale de Birkhoff associée à H s'écrit :

$$H_1(p) \sim \sum_{k=2}^{+\infty} H_k(p) \tag{4.3.12}$$

où $H_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est polynomiale homogène de degré $\frac{k}{2}$ si k est paire, nulle sinon, et donc $(x,\xi) \mapsto H_{2k}(p(x,\xi))$ est polynomiale homogène de degré $2k$. On a alors $H_2 : \mathbb{R}^n \ni p \mapsto E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i p_i$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On va déterminer par récurrence les fonctions polynomiales R_{2k} $(2 \leq k \leq N)$ à partir des H_{2k} $(2 \leq k \leq N)$, ce qui achèvera la preuve du Théorème 4.3.3.

La formule du binôme de Newton nous donne, pour $l \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1, n]\!]$:

$$x_j^{2l} = \left(\frac{z_j + \bar{z}_j}{\sqrt{2}}\right)^{2l} = \frac{1}{2^l} \sum_{m=0}^{2l} \binom{2l}{m} z_j^m \bar{z}_j^{2l-m} \tag{4.3.13}$$

Donc pour tout $m \in \mathbb{N}^n$, il existe un polynôme S_m ne comprenant que des termes extra-diagonaux (*i.e.* de la forme $z^j \bar{z}^k$ avec $j \neq k$, voir Définition 2.3.3) tel que :

$$x^{2m} = \frac{1}{2^{|m|}} \prod_{i=1}^{n} \binom{2m_i}{m_i} . |z|^{2m} + S_m(z, \bar{z}) \tag{4.3.14}$$

Il suffit donc, pour déterminer le polynôme R_{2k}, de déterminer ses termes diagonaux. Reprenons la démonstration du Théorème 4.3.2, en utilisant cette fois-ci, comme annoncé dans la partie 2.4.2, le résultat d'unicité de la Proposition 4.3.6.

On a construit le symplectomorphisme ψ donné par le Théorème 4.3.2 comme suit : $\psi = \phi_\theta \circ \exp \chi_F$, où F est définie (modulo une fonction s'annulant à tout ordre en $x = \xi = 0$) à partir de son développement de Taylor en $(0,0)$ grâce au lemme de Borel :

$$F \sim \sum_{k=2}^{+\infty} F_k \tag{4.3.15}$$

où les fonctions $F_k \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$, $k \geq 2$, sont polynomiales homogènes d'ordre k et ont été construites par récurrence (en même temps que les fonctions H_k de l'équation (4.3.12)) à l'aide de la Proposition 4.3.6. $F_2 = 0$ et pour tout $k \geq 2$, (F_k, H_k) est l'unique couple de $\mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ satisfaisant l'équation :

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ \{H_0, F_k\}(x,\xi) = G_k(x,\xi) - H_k(p) \tag{4.3.16}$$

et tel que F_k est polynomiale sans terme diagonal, où G_k est la somme des termes d'ordre k dans le développement de Taylor de $H \circ \phi_\theta \circ \exp \chi_{F_{\leq k-1}}$:

$$G_k = \lfloor H \circ \phi_\theta \circ \exp \chi_{F_{\leq k-1}} \rfloor_k \tag{4.3.17}$$

Montrons par récurrence sur $N \geq 1$ l'assertion (A_N) : « les polynômes $(H_{2k})_{1 \leq k \leq N}$, déterminent les fonctions $(R_{2k})_{2 \leq k \leq N}$, $(G_k)_{2 \leq k \leq 2N+1}$, et la fonction $F_{\leq 2N+1}$ ». On a donc $G_2 = H_0 = H_2 \circ p$, et ainsi $F_2 = 0$. G_3 est donc la somme des termes d'ordre 3 dans le développement de Taylor de $H \circ \phi_\theta$. Donc $G_3 = 0$, puis $F_3 = 0$. L'assertion (A_1) est donc vraie.

Supposons maintenant (A_N) vraie pour un certain $N \geq 1$. Comme $F_{\leq 2N+1}$ s'annule jusqu'à l'ordre 3 en $x = \xi = 0$, on a au voisinage de $x = \xi = 0$:

$$\begin{aligned} H(x,\xi) \circ \phi_\theta \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+1}} = \lfloor H \rfloor_{2N} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+1}} + R_{2N+2}(x) \\ + O(||(x,\xi)||^{2N+4}) \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

avec $\lfloor H \rfloor_{2N}(x,\xi) = H_0(x,\xi) + \sum\limits_{k=2}^{N} R_{2k}(x)$

Donc, pour tout $(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$:

$$G_{2N+2}(x,\xi) = \Big\lfloor \lfloor H \rfloor_{2N} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+1}} \Big\rfloor_{2N+2} (x,\xi) + R_{2N+2}(x) \tag{4.3.19}$$

Par hypothèse de récurrence, $\lfloor H \rfloor_{2N} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+1}}$ est connu, et a fortiori ses termes diagonaux aussi. Or d'après la Proposition 4.3.6, les termes diagonaux de G_{2N+2} sont entièrement déterminés par H_{2N+2}. Les termes diagonaux de R_{2N+2}, donc R_{2N+2} tout entier d'après (4.3.14), sont donc déterminés par $(H_{2k})_{2 \leq k \leq N+1}$. On en déduit G_{2N+2}, puis, d'après la Proposition 4.3.6, F_{2N+2}. Or comme précédemment, on a :

$$G_{2N+3} = \Big\lfloor \lfloor H \rfloor_{2N} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+2}} \Big\rfloor_{2N+3} \tag{4.3.20}$$

Donc G_{2N+3} est entièrement déterminé par $(H_{2k})_{2 \leq k \leq N+1}$, et par la Proposition 4.3.6, F_{2N+3} l'est aussi . Finalement, on a bien prouvé l'assertion (A_N) pour tout $N \geq 1$. □

4.3.2 Un résultat négatif dans le cas sans symétries

Dans cette partie, on prouve la proposition suivante :

Proposition 4.3.7. *Soit* $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{N}^n, |k| > 2\} \setminus 2\mathbb{N}^n$.
Soient $(a_k)_{k \in \mathcal{K}}$ *une suite de réels indexée par* $\mathcal{K}$*,* $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ *un* n*-uplet de réels rationnellement indépendants, et* $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *telle qu'au voisinage de* $p = 0$ *:*

$$H_1(p) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i p_i + O\left(||p||^2\right) \tag{4.3.21}$$

Alors il existe $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *telle que :*

1. au voisinage de $x = 0$, on ait :

$$V(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2 + O\left(||x||^3\right) \tag{4.3.22}$$

2.

$$\forall k \in \mathcal{K}, \frac{\partial^{|k|} V}{\partial x^k}(0) = a_k k! \tag{4.3.23}$$

3. $(x,\xi) \mapsto H_1(p(x,\xi))$ *est la forme normale associé au hamiltonien classique* $H : (x,\xi) \mapsto \frac{1}{2}\,||\xi||^2 + V(x)$

Avant de commencer la preuve, commençons par une petite remarque reposant sur le lemme de combinatoire suivant :

Lemme 4.3.8. *Soit $N \geq 2$.*

1. $\#\{(k_1,\ldots,k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} k_i = N\} = \binom{N-1}{n-1}$

2. $\#\{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} k_i = N\} = \binom{N+n-1}{n-1}$

Démonstration du Lemme 4.3.8. Le deuxième point est une conséquence du premier : en effet, en envoyant pour $i \in [\![1,n]\!]$, k_i sur $k_i + 1$, on réalise une bijection entre les deux ensembles :

$$\{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^{n} k_i = N\} \simeq \{(k_1,\ldots,k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \mid \sum_{i=1}^{n} k_i = N+n\} \tag{4.3.24}$$

Reste à prouver le premier point. Or si on associe au n-uplet $(k_1,\ldots k_n)$ le n-uplet $(k_1,\ldots,\sum\limits_{m=1}^{i} k_m,\ldots,N)$, on réalise une bijection entre les deux ensembles :

$$\begin{aligned}
&\{(k_1,\ldots,k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \mid \sum_{i=1}^{n} k_i = N\} \\
&\qquad \simeq \{(k_1,\ldots,k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \mid k_1 < \cdots < k_n = N\} \\
&\qquad \simeq \{(k_1,\ldots,k_{n-1}) \in [\![1,N-1]\!]^{n-1} \mid k_1 < \cdots < k_{n-1}\} \\
&\qquad \simeq \mathcal{P}_{n-1}\left([\![1,N-1]\!]\right)
\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

où $\mathcal{P}_{n-1}\left([\![1,N-1]\!]\right)$ est l'ensemble des parties à $n-1$ éléments de $[\![1,N-1]\!]$, de cardinal $\binom{N-1}{n-1}$, ce qui achève la démonstration. □

Pour $N \geq 1$, les contributions d'ordres $2N+1$ et $2N+2$ dans le développement de Taylor de V sont donc composées respectivement de $\binom{2N+n}{n-1}$ et $\binom{2N+n+1}{n-1}$ termes, alors que celle d'ordre $2N+2$ du développement de Taylor de la forme normale associé au hamiltonien classique correspondant n'en comprend que $\binom{N+n}{n-1}$. Il était donc déraisonnable d'espérer pouvoir déterminer le potentiel V à partir de la seule forme normale classique.

Démonstration de la Proposition 4.3.7. Quitte à conjuguer le hamiltonien classique H que l'on cherche à construire par le symplectomorphisme ϕ_θ (défini dans la partie 4.3.1), il suffit de construire une fonction $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que :

1. au voisinage de $x = 0$, on ait :
$$R(x) = O\left(||x||^3\right) \tag{4.3.26}$$

2.
$$\forall k \in \mathcal{K},\ \frac{\partial^{|k|} R}{\partial x^k}(0) = \frac{a_k k!}{\theta^{\frac{k}{2}}} \tag{4.3.27}$$

3. $(x, \xi) \mapsto H_1(p(x, \xi))$ est la forme normale associé au hamiltonien classique $h : (x, \xi) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + R(x)$

En effet, le potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ défini pour $x \in \mathbb{R}^n$ par :
$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2 + R\left(\sqrt{\theta_1} x_1, \ldots, \sqrt{\theta_n} x_n\right) \tag{4.3.28}$$
vérifiera alors les conclusions de la proposition 4.3.7.

Construisons R à l'aide du lemme de Borel (Théorème 2.3.32). Supposons qu'une telle fonction R existe et notons, pour $m \geq 3$, R_m la composante polynomiale homogène de degré m de son développement de Taylor (les composantes de degré inférieur ou égal à 2 sont nécessairement nulles par la condition 1 imposée à R). Les composantes de degré impair sont déjà toutes fixées par la condition 2 imposée à R : pour tout $m \geq 1$,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ R_{2m+1}(x) = \sum_{|k|=2m+1} \frac{a_k}{\theta^{\frac{k}{2}}} x^k \tag{4.3.29}$$

Quant aux composantes d'ordre pair $2m$ ($m \geq 2$), toujours par la condition 2, elles se décomposent nécessairement de la manière suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ R_{2m}(x) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{K} \\ |k|=2m}} \frac{a_k}{\theta^{\frac{k}{2}}} x^k + \sum_{|k|=m} b_k x^{2k} \tag{4.3.30}$$

Réciproquement, une fonction $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dont les composantes du développement de Taylor vérifient les conditions ci-dessus vérifie aussitôt les conditions 1 et 2.

L'énoncé de la proposition 4.3.7 devient alors : il existe une famille de réels $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^n, |k| \geq 2}$ telle que si pour $m \geq 2$, les fonctions R_{2m-1} et R_{2m} sont définies par les formules (4.3.29) et (4.3.30) respectivement, et R est définie modulo une fonction plate par le lemme de Borel :
$$R \sim \sum_{m=3}^{+\infty} R_m \tag{4.3.31}$$

alors $(x,\xi) \mapsto H_1(p(x,\xi))$ est la forme normale associé au hamiltonien classique $h : (x,\xi) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} + R(x)$.

C'est ce dernier énoncé que nous allons prouver. Plus précisément, on va prouver par une récurrence forte sur $N \geq 2$ l'assertion (A_N) suivante : « il existe des réels $(b_k)_{2\leq|k|\leq N}$ et des fonctions F_j $(3 \leq j \leq 2N)$ polynomiales homogènes d'ordre j, tels que si pour $2 \leq m \leq N$, les fonctions R_{2m-1} et R_{2m} sont définies par les formules (4.3.29) et (4.3.30) respectivement, et h_{2N-1} et h_{2N} par les formules :

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ h_{2N-1}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} + \sum_{k=3}^{2N-1} R_k(x) \tag{4.3.32}$$

et

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ h_{2N}(x,\xi) = h_{2N-1}(x,\xi) + R_{2N}(x) \tag{4.3.33}$$

alors pour $M \in \{2N-1, 2N\}$:

$$h_M \circ \exp \chi_{F_{\leq M}}(x,\xi) = H_1(p) + O(||(x,\xi)||^{M+1}) \tag{4.3.34}$$

où $F_{\leq M} = \sum_{k=3}^{M} F_k$ ».

Soit $N \geq 4$. Une fois les fonctions $F_3, \ldots, F_{N-1}$ construites, on notera G_N la fonction polynomiale homogène d'ordre N définie par :

$$G_N = \lfloor h_N \circ \exp \chi_{F_{\leq N-1}} \rfloor_N \tag{4.3.35}$$

On note également, pour $k \geq 2$, H_{2k} la composante polynomiale homogène d'ordre k dans le développement de Taylor de H_1, si bien que $(x,\xi) \mapsto H_{2k}(p(x,\xi))$ est polynomiale homogène d'ordre $2k$ et :

$$H_1(p) \sim H_0 + \sum_{k=2}^{+\infty} H_{2k}(p) \tag{4.3.36}$$

où H_0 est définie dans la Proposition 4.3.6 par l'équation (4.3.8).

On définit alors F_3 à l'aide de la Proposition 4.3.6 comme l'unique fonction polynomiale homogène d'ordre 3 (a fortiori sans terme diagonal) telle que :

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ \{H_0, F_3\}(x,\xi) = R_3(x) \tag{4.3.37}$$

On a aussitôt, en utilisant le Lemme 2.4.14 :

$$\begin{aligned} h_3 \circ \exp \chi_{F_{\leq 3}}(x,\xi) &= h_3(x,\xi) + \{F_3, h_3\} + O(||(x,\xi)||^4) \\ &= h_3(x,\xi) + \{F_3, H_0\} + O(||(x,\xi)||^4) \\ &= H_0(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^4) \\ &= H_1(p) + O(||(x,\xi)||^4) \end{aligned} \tag{4.3.38}$$

Puisque F_3 s'annule jusqu'à l'ordre 3 en $x = \xi = 0$, on aura une fois la famille $(b_k)_{|k|=2}$ construite :

$$\begin{aligned} \forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ G_4(x,\xi) &= \lfloor h_4 \circ \exp \chi_{F_{\leq 3}} \rfloor_4 (x,\xi) \\ &= \lfloor h_3 \circ \exp \chi_{F_{\leq 3}} \rfloor_4 (x,\xi) + R_4(x) \end{aligned} \tag{4.3.39}$$

Les termes extra-diagonaux de G_4 ne dépendent que de $(a_j)_{|j|\leq 4}$ et de $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ tel que $|k| = 2$, notons c_k le coefficient de son terme en $|z|^{2k}$. D'après (4.3.14) et (4.3.30), on a :

$$c_k = \frac{1}{4} \prod_{i=1}^{n} \binom{2k_i}{k_i}.\ b_k + C_k \tag{4.3.40}$$

où C_k ne dépend que de $(a_j)_{|j|\leq 3}$ et de $\theta_1, \ldots, \theta_n$ (cette contribution provient de la fonction polynomiale $\{F_3, R_3\} + \{F_3, \{F_3, H_0\}\}$).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ tel que $|k| = 2$, on choisit b_k de telle sorte que c_k soit exactement le terme en $|z|^{2k}$ de $H_1(|z|^2)$, donc de $H_4(z\bar{z})$ (où H_4 a été définie plus haut comme la composante polynomiale homogène d'ordre 2 de H_1). En utilisant la Proposition 4.3.6, on construit alors F_4 comme l'unique fonction polynomiale sans termes diagonaux, aussitôt homogène d'ordre 4, telle que :

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ \{H_0, F_4\}(x,\xi) = G_4(x,\xi) - H_4(p) \tag{4.3.41}$$

et, d'après le Lemme 2.4.14 :

$$\begin{aligned} h_4 \circ \exp \chi_{F_{\leq 4}}(x,\xi) =& h_4(x,\xi) + \{F_{\leq 4}, h_4\} + \frac{1}{2}\{F_{\leq 4}, \{F_{\leq 4}, h_4\}\} \\ & + O(||(x,\xi)||^5) \\ =& h_3(x,\xi) + \{F_3, H_0\} + G_4(x,\xi) + \{F_4, H_0\} \\ & + O(||(x,\xi)||^5) \\ =& H_0(x,\xi) + H_4(p) + O(||(x,\xi)||^5) \\ =& H_1(p) + O(||(x,\xi)||^5) \end{aligned} \tag{4.3.42}$$

L'assertion (A_2) est donc vérifiée.

Soit maintenant $N \geq 2$, on suppose (A_N). On a, pour tout $(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} G_{2N+1}(x,\xi) &= \lfloor h_{2N+1} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N}} \rfloor_{2N+1} (x,\xi) \\ &= \lfloor h_{2N} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N}} \rfloor_{2N+1} (x,\xi) + R_{2N+1}(x) \end{aligned} \tag{4.3.43}$$

Or h_{2N} et $F_{\leq 2N}$ ont déjà été construites par hypothèse de récurrence, et R_{2N+1} ne dépend que de $(a_k)_{|k|=2N+1}$ et de $\theta_1, \ldots, \theta_n$, donc G_{2N+1} ne dépend que de termes connus ou déjà construits.

On définit F_{2N+1} à l'aide de la Proposition 4.3.6 comme l'unique fonction polynomiale homogène d'ordre $2N + 1$ (a fortiori sans terme diagonal) telle que :

$$\{H_0, F_{2N+1}\} = G_{2N+1} \tag{4.3.44}$$

F_{2N+1} est entièrement déterminée par G_{2N+1} et on a :

$$\begin{aligned}
&h_{2N+1} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+1}}(x,\xi) = \sum_{i=0}^{2N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}^i_{F_{\leq 2N+1}}(h_{2N+1}) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[h_{2N+1} + \{F_{\leq 2N}, h_{2N+1}\} + \{F_{2N+1}, H_0\} + \sum_{i=2}^{2N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}^i_{F_{\leq 2N+1}}(h_{2N+1}) \right](x,\xi) \\
&\quad + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[\{F_{2N+1}, H_0\} + h_{2N+1} + \{F_{\leq 2N}, h_{2N+1}\} + \sum_{i=2}^{2N-1} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}^i_{F_{\leq 2N}}(h_{2N+1}) \right](x,\xi) \\
&\quad + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[\{F_{2N+1}, H_0\} + h_{2N+1} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N}} \right](x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \left[\{F_{N2+1}, H_0\} + G_{2N+1} \right](x,\xi) + H_1(p) + O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= H_1(p) + O(||(x,\xi)||^{2N+2})
\end{aligned} \tag{4.3.45}$$

où $\mathrm{ad}_{F_{\leq 2N+1}} = \{F_{\leq 2N+1}, \cdot\}$, et où l'on a déduit du Lemme 2.4.14 puis utilisé :

1. à la première ligne que : $\mathrm{ad}^i_{F_{\leq 2N+1}}(h_{2N+1})$ s'annule jusqu'à l'ordre $2+i$ en $x = \xi = 0$.
2. à la deuxième que : $\{F_{2N+1}, h_{2N+1} - H_0\}$ s'annule jusqu'à l'ordre $2N+2$ en $x = \xi = 0$.
3. à la troisième que pour $i \geq 2$, $\mathrm{ad}^i_{F_{\leq 2N+1}}(h_{2N+1}) - \mathrm{ad}^i_{F_{\leq 2N}}(h_{2N+1})$ s'annule jusqu'à l'ordre $2N+i$ en $x = \xi = 0$.
4. à la quatrième que : $\mathrm{ad}^i_{F_{\leq 2N}}(h_{2N+1})$ s'annule également jusqu'à l'ordre $2+i$ en $x = \xi = 0$.

puis on a utilisé :

1. à la cinquième ligne, l'hypothèse de récurrence et la définition de G_{2N+1} pour en déduire que :

$$\begin{aligned}
h_{2N+1} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N}}(x,\xi) =& \lfloor h_{2N+1} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N}} \rfloor_{\leq 2N}(x,\xi) + G_{2N+1}(x,\xi) \\
&+ O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= \lfloor h_{2N} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N}} \rfloor_{\leq 2N}(x,\xi) + G_{2N+1}(x,\xi) \\
&+ O(||(x,\xi)||^{2N+2}) \\
&= H_1(p) + G_{2N+1}(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{2N+2})
\end{aligned}$$

2. à la dernière ligne l'équation (4.3.44).

Comme précédemment, on a pour $(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
G_{2N+2}(x,\xi) &= \lfloor h_{2N+2} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+1}} \rfloor_{2N+2}(x,\xi) \\
&= \lfloor h_{2N+1} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+1}} \rfloor_{2N+2}(x,\xi) + R_{2N+2}(x)
\end{aligned} \tag{4.3.46}$$

Donc les termes extra-diagonaux de G_{2N+2} ne font intervenir que des termes connus ou déjà construits. Maintenant notons, pour $k \in \mathbb{N}^n$ tel que $|k| = N+1$, c_k le coefficient du terme en $|z|^{2k}$ de G_{2N+2}. D'après (4.3.14), on a :

$$c_k = \frac{1}{2^{N+1}} \prod_{i=1}^{n} \binom{2k_i}{k_i}.\ b_k + C_k \tag{4.3.47}$$

où C_k ne dépend que de termes connus ou déjà construits. Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ tel que $|k| = N+1$, on choisit b_k de telle sorte que c_k soit exactement le terme en $|z|^{2k}$ de $H_1(|z|^2)$, donc de $H_{2N+2}(z\bar{z})$. En utilisant la Proposition 4.3.6, on peut donc construire F_{2N+2} comme l'unique fonction polynomiale sans termes diagonaux, aussitôt homogène d'ordre $2N+2$, telle que :

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n),\ \{H_0, F_{2N+2}\}(x,\xi) = G_{2N+2}(x,\xi) - H_{2N+2}(p) \tag{4.3.48}$$

Un calcul similaire à celui de (4.3.45) montre que :

$$h_{2N+2} \circ \exp \chi_{F_{\leq 2N+2}}(x,\xi) = H_1(p) + O\left(||(x,\xi||^{2N+3}\right) \tag{4.3.49}$$

Finalement, on a prouvé par récurrence que l'assertion (A_N) était vraie pour tout $N \geq 2$.

Il suffit maintenant de définir les fonctions R et F modulo une fonction plate à l'aide du lemme de Borel :

$$R \sim \sum_{k=3}^{+\infty} R_k \tag{4.3.50}$$

et :

$$F \sim \sum_{k=3}^{+\infty} F_k \tag{4.3.51}$$

Un calcul similaire à celui de (4.3.45) permet d'affirmer que pour tout $N \geq 3$:

$$\begin{aligned} h \circ \exp \chi_F(x,\xi) &= h_N \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^{N+1}) \\ &= H_1(p) + O(||(x,\xi)||^{N+1}) \end{aligned} \tag{4.3.52}$$

et donc finalement :

$$h \circ \exp \chi_F \sim H_1(p) \tag{4.3.53}$$

$(x,\xi) \mapsto H_1(p(x,\xi))$ est bien la forme normale de Birkhoff classique associée à h, donc à H. □

Chapitre 5

Recovering the Hamiltonian from spectral data

C. Hériveaux and T. Paul

Abstract. We show that the contributions to the Gutzwiller trace formula with observable associated to the iterates of a given elliptic nondegenerate periodic trajectory γ and to certain families of observables localized near γ determine the quantum Hamiltonian in a formal neighborhood of the trajectory γ, that is the full Taylor expansion of its total symbol near γ. We also treat the "bottom of a well" case both for general and Schrödinger operators and give some analog classical results.

Contents

5.1 Introduction and main results

It is well known that spectral properties of semiclassical Hamiltonians and dynamical properties of their principal symbols are linked. Even when there is no precise information "eigenvalue by eigenvalue" of the spectrum, the so-called Gutzwiller trace formula provide information on averages of the spectrum at scale of the Planck constant. More precisely, let $H(x, \hbar D_x)$ be a self-adjoint semiclassical elliptic pseudodifferential operator on a compact manifold X of dimension $n+1$, whose symbol $H(x, \xi)$ is proper (as a map from T^*X into $\mathbb{R}$). Let E be a regular value of H and γ a non-degenerate periodic trajectory of primitive period T_γ lying on the energy surface $H = E$.

Consider the Gutzwiller trace (see [Gut71])

$$\operatorname{Tr}\left(\psi_r\left(\frac{H(x, \hbar D_x) - E}{\hbar}\right)\right) = \sum_i \psi_r\left(\frac{E_i(\hbar) - E}{\hbar}\right) \tag{5.1.1}$$

where for $r \in \mathbb{Z}^*$, ψ_r is a C^∞ function whose Fourier transform is compactly supported with support in a small enough neighborhood of rT_γ and is identically one in a still smaller neighborhood containing rT_γ. As shown in [PU91], [PU95] (5.1.1) has an asymptotic expansion

$$e^{i\frac{S_\gamma}{\hbar} + \frac{\pi}{2}\sigma_\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^r \hbar^k \tag{5.1.2}$$

In [GP10] it was shown how to compute the terms of this expansion to <u>all</u> orders in terms of a microlocal Birkhoff canonical form for H in a formal neighborhood of γ. Following earlier results by Zelditch [Zel97, Zel98] and Guillemin [Gui96] in the context of the high part of the spectrum of the Laplacian, it was also proved in [GP10] that the family of constants $(a_k^r)_{(k,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*}$ determine the microlocal (and hence, a fortiori, the classical) Birkhoff canonical form for H in a formal neighborhood of γ, see also [ISZ02] for another proof based on trace formulas for monodromy operators.

In the case of the bottom of a well the determination of the Birkhoff form by the low part of the spectrum has been shown in [GPU07]. When it is known in addition that $H(x, \hbar D_x)$ is a Schrödinger operator $-\hbar^2\Delta + V$, it has been shown that the low part of the spectrum determines the Taylor expansion of the potential V when this one is even in all variables [GU07] or in dimension one under generic assumptions [CdVG11], and the potential itself in one dimension under generic assumptions [CdV11]. But in the general case the Gutzwiller formula will determine only the normal form of the Hamiltonian, that is to say $H(x, \hbar D_x)$ only modulo unitary operators, and its principal symbol only modulo symplectomorphisms. Of course it cannot determine more, as the spectrum, and a fortiori the trace, is insensitive to unitary conjugation.

The aim of this paper is to address the question of determining the *true* Hamiltonian from more precise spectral data, namely from the Gutzwiller trace formula with observables.

It is well known that, for any pseudodifferential operator $O(x, \hbar D_x)$ of symbol $\mathcal{O}(x, \xi)$, there is a result equivalent to (5.1.2) for the following quantity

$$\mathrm{Tr}\left(O(x,\hbar D_x)\psi\left(\frac{H(x,\hbar D_x)-E}{\hbar}\right)\right)=\sum_i\langle\varphi_j,O(x,\hbar D_x)\varphi_j\rangle\psi\left(\frac{E-E_i}{\hbar}\right), \quad (5.1.3)$$

(here φ_j is meant as the eigenvector of eigenvalue E_j) under the form of an asymptotic expansion of the form

$$e^{i\frac{S_\gamma}{\hbar}+\frac{\pi}{2}\sigma_\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^r(\mathcal{O})\hbar^k \quad (5.1.4)$$

where a_k^r are distributions supported on γ.

We will show in the present paper that the knowledge of the coefficients $a_k^\gamma(O)$ for O belonging to some family of observables localized near γ is enough to determine the full Taylor expansion of the total symbol of $H(x, \hbar D_x)$ near γ, in other words $H(x, \hbar D_x)$ microlocally in a formal neighborhood of γ, when γ is non-degenerate elliptic (including the case where γ is reduced to a point (bottom of a well)). Let us first remark that the trace formula with any observable microlocalized in a small enough neighborhood of γ determines obviously its primitive period T_γ. We will assume that any multiple of T_γ is isolated in the set of the periods of all the periodic trajectories on the same energy shell (let us remark that in case this condition is not fulfilled, our results remains valid by taking observables microlocalized in a neighborhood of the non-degenerate elliptic γ). Moreover it is known ([Fri88, Gui96]) that the coefficients of trace formula determines the Poincaré angles modulo $2\pi\mathbb{Z}$ and we prove in Appendix B that, in the case where γ is not reduced to one point, any realization of the Poincaré angles as real numbers leads to a different Birkhoff normal form but give an explicit symplectomorphism that conjugates one to another: hence, our reconstruction of the "true" Hamiltonian is independent of the choice of the realization. We also show that in the "bottom of a well" case, the θ_is are determined by the spectrum.

Therefore the only knowledge we will require will be the fact that there exists a geometric periodic trajectory γ, possibly of dimension zero, which is elliptic non-degenerate (see definition below) and whose set of periods in isolated in the set of periods of the same energy shell.

We will be concerned by three cases:

1. γ is a curve
2. the general "bottom of a well" case (γ reduced to a point)
3. the "bottom of a well" case when the Hamiltonian is a Schrödinger operator.

Our results will also be of three different kinds :

a. The knowledge of the coefficients of the trace formula for (1), or of some of the diagonal matrix elements (expectation values) between eigenvectors of the Hamiltonian for (2),(3), for a family of observables satisfying some algebraic properties on γ determine some Fermi coordinates (see definition below). It is the content of Theorems 5.1.3, 5.1.7, 5.1.10.

b. The knowledge of the coefficients of the trace formula for (1), or of some of the diagonal matrix elements (expectation values) between eigenvectors of the Hamiltonian for (2)-(3), for another family of observables, expressed on any (not necessarily the one determined by a.) Fermi system of coordinates, determine the full Taylor expansion of the total symbol of the Hamiltonian expressed on these Fermi coordinates (Theorems 5.1.4, 5.1.8, 5.1.11).

c. The combination of the two preceding cases, where the family of observables defined in a. drives the knowledge of the full Hamiltonian. More precisely, the knowledge of the quantities expressed in a. determines a family of observables, which is precisely the one defined in b. expressed in the Fermi system determined in a., the trace coefficients or some of the diagonal matrix elements of which determine the full Taylor expansion of the Hamiltonian on a determined system of coordinates (Corollaries 5.1.5, 5.1.9, 5.1.12).

Finally we obtain analog classical results as byproduct of the quantum ones in Section 5.4.

Definition 5.1.1. A periodic trajectory of the Hamiltonian flow generated by $H(x,\xi)$ is said to be non-degenerate elliptic if its linearized Poincaré map has eigenvalues $(e^{\pm i\theta_i})_{1\le i\le n}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$, and the rotation angles θ_i $(1 \le i \le n)$ and π are independent over $\mathbb{Q}$.

Definition 5.1.2 (Fermi coordinates)**.** We will denote by "Fermi coordinates" any system of local coordinates of $T^*\mathcal{M}$ near γ, $(x,t,\xi,\tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$, such that $\gamma = \{x = \xi = \tau = 0\}$ and on which the principal symbol H_p of $H(x,\hbar D_x)$ can be written for any chosen realization of the Poincaré angles $\theta_i \in \mathbb{R}$ as:

$$H_p(x,t,\xi,\tau) = H_0(x,t,\xi,\tau) + H_2 \tag{5.1.5}$$

where

$$H_0(x,t,\xi,\tau) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} + \tau \tag{5.1.6}$$

and

$$H_2 = O\left((x^2+\xi^2+|\tau|)^{\frac{3}{2}}\right) \tag{5.1.7}$$

The existence of such local coordinates, guaranteed by the Weinstein tubular neighborhood Theorem ([Wei77]), was proved in [Gui96, GP10, Zel97] under the hypothesis of non-degeneracy mentioned earlier. However the construction of Fermi coordinates involves the knowledge of the quadratic part of H_p in a neighborhood of γ. Our first result shows that a system of Fermi coordinates can be determined by γ only at the classical level and some quantum spectral quantities. (constructed out of a system of local coordinates near γ and some quantum spectral quantities.)

Theorem 5.1.3. *Let $P_p^k, k = 0, 1, \dots, 2n^2+n, p \in \mathbb{Z}$, be any pseudodifferential operators whose respective principal symbols $\mathcal{P}_p^k$ satisfy in a local symplectic system of coordinates $(x,t,\xi,\tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ such that $\gamma = \{x = \xi = \tau = 0\}$:*

$$\mathcal{P}_p^0(x,t,\xi,\tau) = e^{-2i\pi pt}\tau \quad \text{and} \quad \mathcal{P}_p^k(x,t,\xi,\tau) = e^{-2i\pi pt}\mathcal{R}^k(x,\xi),\ k = 1,\dots,2n^2+n \tag{5.1.8}$$

*with the property that $\mathcal{R}^k(0) = \nabla\mathcal{R}^k(0) = 0$ **and the Hessians** $d^2\mathcal{R}^k(0)$ **are linearly independent**.*

An example of such symbols is given by the family,

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_{ijp}^1(x,t,\xi,\tau) &= e^{-2i\pi pt}x_i\xi_j \\ \mathcal{Q}_{ijp}^2(x,t,\xi,\tau) &= e^{-2i\pi pt}x_ix_j \\ \mathcal{Q}_{ijp}^3(x,t,\xi,\tau) &= e^{-2i\pi pt}\xi_i\xi_j \\ \mathcal{Q}_p(x,t,\xi,\tau) &= e^{-2i\pi pt}\tau \end{cases} \tag{5.1.9}$$

Then, the knowledge of the coefficients $(a_1^l(P_p^k))_{0\le k\le 2n^2+n, p\in\mathbb{Z}}$ in (5.1.3)-(5.1.4) determines (in a constructive way) an explicit system of Fermi coordinates near γ.

Theorem 5.1.4. *Let γ be a non-degenerate elliptic periodic trajectory of the Hamiltonian flow generated by the principal symbol H_p of $H(x,\hbar D_x)$ on the energy shell $H_p^{-1}(E)$, and let $(x,t,\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n+1}$ be a system of Fermi coordinates near γ.*

For $(m,n,p) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z}$, let O_{mnp}, O_p be any pseudodifferential operator whose total Weyl symbols (in this system of coordinates) $\mathcal{O}_{mnp}$, $\mathcal{O}_p$ satisfy in a neighborhood of γ:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{mnp}(x,t,\xi,\tau) &= e^{-i2\pi pt}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j+i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{m_j}\left(\frac{x_j-i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{n_j} \\ & \quad + \sum_{2l+N=|m|+|n|+1} O(\hbar^l(x^2+\xi^2+|\tau|)^{\frac{N}{2}}) \\ \mathcal{O}_p(x,t,\xi,\tau) &= e^{-i2\pi pt}\tau + \sum_{2l+N=3} O(\hbar^l\,(x^2+\xi^2+|\tau|)^{\frac{N}{2}}) \end{cases} \tag{5.1.10}$$

Then the knowledge of the coefficients $a_k^l(O_{mnp})$ and $a_k^l(O_q)$ in (5.1.3)-(5.1.4) for $k \le N$ and m,n,p,q satisfying

1. $|m| + |n| \le N$
2. $\forall j = 1\dots n,\ m_j = 0$ ***or*** $n_j = 0$
3. $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$

determines the Taylor expansion near γ up to order M_1 in (x,ξ) and M_2 in τ, of the total Weyl symbol, in this system of Fermi coordinates, of $H(x,\hbar D_x)$ up to order l in $\hbar$ at the condition that $2l + M_1 + 2M_2 \le N$.

Concatenating the two preceding results we get the coordinate free statement:

Corollary 5.1.5. *Let P_p^k be as in Theorem 5.1.3. Then the knowledge of the coefficients $a_1^l(Q_{ijp}^k)$, $a_1^l(Q_p)$ for $p \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}, 1 \leq i,j \leq n, k \in \{1,2,3\}$ determine observables O_{mnp}, O_q out of which the coefficients $a_k^l(O_{mnp})$ and $a_k^l(O_q)$, for $k \leq N$ and m,n,p,q satisfying conditions* (1), (2), (3) *in Theorem 5.1.4, determine modulo a function vanishing to infinite order on γ, the full symbol of $H(x,\hbar D_x)$, in a determined system of local coordinates near γ.*

Remark 5.1. It is easy to see that Condition 2 implies that the number of observables in the transverse to γ directions (for each Fourier coefficient in t) needed for determining $H(x,\hbar D_x)$ up to order N is a polynomial function of N of degree $n-1$, while the number of all polynomial functions in (x,ξ,τ) of order N is a polynomial in N of higher degree $2n$. The fact that not all observables are needed can be understood by the fact that we know that the Hamiltonian we are looking for is conjugated to the normal form by a unitary operator and not by any operator (see the discussion after Theorem 5.2.1). At the classical level this is a trace of the fact that we are looking for a symplectomorphism, and not any diffeomorphism (see section 5.4).

Remark 5.2. The asymptotic expansion of the trace (5.1.3) involves only the microlocalization of $H(x,\hbar D_x)$ in a formal neighborhood of γ. Therefore there is no hope to recover from spectral data more precise information than the Taylor expansion of its symbol near γ. The rest of the symbol concerns spectral data of order $\hbar^\infty$.

Let us now consider the case where γ is reduced to one point, namely the "bottom of a well" case. Let us assume that the principal symbol H_p of $H(x,\hbar D_x)$ has a global non-degenerate minimum at $z_0 \in T^*\mathcal{M}$, and let $d^2H_p(z_0)$ be the Hessian of H at z_0. Let us define the matrix Ω defined by $d^2H_p(z_0)(\cdot,\cdot) =: \omega_{z_0}(\cdot,\Omega^{-1}\cdot)$ where $\omega_{z_0}(\cdot,\cdot)$ is the canonical symplectic form of $T^*\mathcal{M}$ at z_0. The eigenvalues of Ω are purely imaginary, let us denote them by $\pm i\theta_j$ with $\theta_j > 0$, $j = 1\ldots n$. Let us assume moreover that $\theta_j, j = 1\ldots n$ are rationally independent.

Definition 5.1.6. By extension of definition 5.1.2, we will also denote by Fermi coordinates any system of Darboux coordinates $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ centered at z_0 such that:

$$H_p(x,\xi) = H_p(z_0) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} + O((x,\xi)^3). \tag{5.1.11}$$

The existence of such local coordinates will be proved in section 5.3, once again by using the knowledge of the quadratic part of H_p near z_0. Our next result shows that one can explicitely construct Fermi coordinates out of the knowledge of some quantum spectral quantities.

Theorem 5.1.7. *Let $P^k, k = 1\ldots 2n^2+n$ be* ***any*** *pseudodifferential operators whose principal symbols $\mathcal{P}^k$ is such that $\mathcal{P}^k(z_0) = \nabla\mathcal{P}^k(z_0) = 0$* ***and the Hessians*** *$d^2\mathcal{P}^k(z_0)$* ***are linearly independent****.*

An example of such symbols is given by the family, $1 \leq i,j \leq n$, $k \in \{1,2,3\}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{Q}^1_{ij}(x,\xi) & = & x_i\xi_j \\ \mathcal{Q}^2_{ij}(x,\xi) & = & x_i x_j \\ \mathcal{Q}^3_{ij}(x,\xi) & = & \xi_i\xi_j \end{array}\right. \tag{5.1.12}$$

in any system $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ *of Darboux coordinates centered at* z_0.

Then, for any $\epsilon = \epsilon(\hbar) > 0$, $\hbar = o(\epsilon(\hbar))$ *(e.g.* $\epsilon = \hbar^{1-\eta}, \eta > 0$*), the knowledge of the spectrum of* $H(x,\hbar D_x)$ *in* $[H_p(z_0), H_p(z_0)+\epsilon]$ *and the diagonal matrix elements of* P^k *between the corresponding eigenvectors of* $H(x,\hbar D_x)$ *determines (in a constructive way) an explicit system of Fermi coordinates.*

Theorem 5.1.8. *For* $(m,n) \in \mathbb{N}^{2n}$*, let* O_{mn} *be any pseudodifferential operator whose total Weyl symbol* $\mathcal{O}_{mn}$ *satisfy in a neighborhood of* z_0*:*

$$\mathcal{O}_{mn}(x,\xi) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j + i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{m_j} \left(\frac{x_j - i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{n_j} + \sum_{\substack{2l+N= \\ |m|+|n|+1}} O\left(\hbar^l \left(x^2+\xi^2\right)^{\frac{N}{2}}\right) \tag{5.1.13}$$

in a system $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ *of Fermi coordinates centered at* z_0.

Then the knowledge of the spectrum of $H(x,\hbar D_x)$ *in* $[H_p(z_0), H_p(z_0)+\epsilon]$ *with* $\hbar^{1-\alpha} = O(\epsilon)$ *for some* $\alpha > 0$*, and the diagonal matrix elements of* O_{mn} *between the corresponding eigenvectors of* $H(x,\hbar D_x)$*,*

for:

1. $|m| + |n| \leq N$
2. $\forall j = 1 \dots n,\ m_j = 0$ ***or*** $n_j = 0$,

determines the Taylor expansion up to order N *of the full symbol of* $H(x,\hbar D_x)$ *at* z_0 *in the coordinates* (x,ξ).

Corollary 5.1.9. *The diagonal matrix elements of the operators* P^k *as in Theorem 5.1.7 determine observables* O_{mn} *whose diagonal matrix elements as in Theorem 5.1.8 determine, modulo a function vanishing to infinite order at* z_0*, the full symbol of* $H(x,\hbar D_x)$*, in a determined system of local coordinates near* z_0.

Remark 5.3. Although we will not prove it here, let us remark that Theorem 5.1.8 (and also Theorem 5.1.4) is also valid in the framework of quantization of Kälherian manifolds.

In the case where $H(x,\hbar D_x)$ is a Schrödinger operator $-\hbar^2\Delta + V$, it is known, [GU07], that the (actually classical) normal form determines the Taylor expansion of the potential in the case where the latter is invariant, for each $i = 1 \dots n$, by the symmetry $x_i \to -x_i$. The same result holds without the symmetry assumption in the case $n = 1$, with assumption $V'''(0) \neq 0$, as it has been shown in [CdVG11].

Let now $H = -\hbar^2\Delta + V$ be a Schrödinger operator and q_0 be a global non-degenerate minimum of V. Let us assume that the square-roots $(\theta_i)_{1\leq i\leq n}$ of the eigenvalues of $d^2V(q_0)$ are linearly independent over the rationals. In that precise case, we will denote by Fermi coordinates any system of Darboux coordinates $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n$, in which the (principal or total, both notions are equivalent here) symbol H of our Schrödinger operator can be written as:

$$H(x, \xi) = V(q_0) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + R(x) \tag{5.1.14}$$

where $R(x) = O(x^3)$. The existence of such local coordinates will also be proved in section 5.3, and Theorem 5.1.10 below proves that one can explicitely construct Fermi coordinates out of any system of local coordinates centered at q_0.

Theorem 5.1.11 shows that the matrix elements of only a **finite number** of observables are necessary to recover the full Taylor expansion of the potential in the general case.

Theorem 5.1.10. *Let $P^k, k = 1 \ldots \frac{n(n+1)}{2}$ be **any** pseudodifferential operators whose principal symbols are potentials $\mathcal{P}^k$ such that $\mathcal{P}^k(q_0) = \nabla \mathcal{P}^k(q_0) = 0$ **and the Hessians** $d^2\mathcal{P}^k(q_0)$ **are linearly independent** (an example of such potentials is the family $\mathcal{Q}^2_{ij}(x) = x_i x_j$ in a local system of coordinates centered at q_0).*

Then, for any $\epsilon = \epsilon(\hbar) > 0, \hbar = o(\epsilon)$, the knowledge of the spectrum of $H(x, \hbar D_x)$ in $[V(q_0), V(q_0) + \epsilon]$ and the diagonal matrix elements of $P^k, k = 1 \ldots \frac{n^2+n}{2}$ between the corresponding eigenvectors of $H(x, \hbar D_x)$ determines (in a constructive way) an explicit system of Fermi coordinates.

Theorem 5.1.11. *Let $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ be a system of Fermi coordinates centered at $(q_0, 0)$.*

Then the knowledge of the spectrum of $H(x, \hbar D_x)$ in $[V(q_0), V(q_0)+\epsilon]$ with $\hbar^{1-\alpha} = O(\epsilon)$ for some $\alpha > 0$, and the diagonal matrix elements of the $2^n - 1$ observables O_{m0}, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \{0, 1\}^n \setminus \{0\}$, defined in Theorem 5.1.8, between the corresponding eigenvectors of $H(x, \hbar D_x)$ determines the full Taylor expansion of V at q_0 in the coordinates x.

Corollary 5.1.12. *The diagonal matrix elements of the operators P^k as in Theorems 5.1.10 determine $2^n - 1$ observables O_{m0} whose diagonal matrix elements as in Theorem 5.1.11 determine the potential V up to a function vanishing to infinite order at q_0.*

Remark 5.4. Note that since we are dealing with observables localized near the bottoms of the wells, the hypothesis that z_0 in Theorems 5.1.7-5.1.8 and q_0 in Theorems 5.1.10 and 5.1.11 are *global* minima can be released and the corresponding results can be formulated in a straightforward way.

The proof of Theorem 5.1.4 relies on two results having their own interest per se: **Proposition 5.2.10** which shows that the coefficients of the trace formula determine the matrix elements $\langle \varphi_j, O(x, \hbar D_x)\varphi_j\rangle$ where φ_j are the eigenvectors of the normal form of the Hamiltonian, and **Proposition 5.2.11** which states that the knowledge of the matrix elements of the conjugation of a given known selfadjoint operator by a unitary one determines, in a certain sense, the latter.

As a byproduct of Proposition 5.2.11 we obtain also a purely classical result, somehow analog of it: the averages on Birkhoff angles associated to Birkhoff coordinates of the same classical observables than the ones in Theorem 5.1.4 determine the Taylor expansion of the (true) Hamiltonian. This is the content of **Theorem 5.4.2** below.

The paper is organized as follows. Section 5.2 is devoted to the proof of Theorems 5.1.4, 5.1.8 and 5.1.11. In section 5.3, we give an explicit construction of some Fermi coordinates out of any system of local coordinates in both the periodic and "Bottom of the well" case: this is the content of Theorems 5.1.3, 5.1.7 and 5.1.10. In Section 5.4 we show the classical equivalent of our quantum formulation.

Through the whole paper, $[\![l, m]\!]$, $l < m$, will stand for the set of integers $\{l, \ldots, m\}$ and we we will assume, without loss of generality, that the period of γ is equal to 1.

5.2 Recovering the Hamiltonian in some given Fermi coordinates

Let us start this section by observing that, by microlocalization near γ, it is enough, in order to prove Theorem 5.1.4, to prove Theorem 5.2.1 below, which is nothing but the same statement expressed in a local Fermi system of coordinates.

The proof of Theorem 5.2.1 will need a construction of the quantum Birkoff normal form, given in subsection 5.2.1. The rest of the proof is then a consequence of Proposition 5.2.10 (subsection 5.2.2) and Proposition 5.2.11 (subsection 5.2.3). Subsection 5.2.4 contains the proof of the analogs of Theorem 5.1.4 when γ is reduced to a single point, both in the general and "Schrödinger" cases (Theorems 5.1.8 and 5.1.11).

Theorem 5.2.1. *Let $H(x, \hbar D_x)$ be a self-adjoint semiclassical elliptic pseudodifferential operator on $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$. Let $(x, t, \xi, \tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ be the canonical symplectic coordinates and let us assume that $\gamma = \mathbb{S}^1 = \{x = \xi = \tau = 0\}$ is a non degenerate elliptic periodic orbit of the Hamiltonian flow generated by the principal symbol H_p of $H(x, \hbar D_x)$ on the energy shell $H_p^{-1}(E)$.*

Let us assume moreover that H_p can be written in these coordinates as:

$$H_p(x, t, \xi, \tau) = H_0(x, t, \xi, \tau) + H_2 \tag{5.2.1}$$

where

$$H_2 = O\left((x^2+\xi^2+|\tau|)^{\frac{3}{2}}\right) \tag{5.2.2}$$

And H_0 is equal to:

$$H_0(x,t,\xi,\tau) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} + \tau \tag{5.2.3}$$

For $(m,n,p) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z}$, let O_{mnp}, O_p be any pseudodifferential operator whose total Weyl symbols $\mathcal{O}_{mnp}$, $\mathcal{O}_p$ satisfy in a neighborhood of γ:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{mnp}(x,t,\xi,\tau) &= e^{-i2\pi pt} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j+i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{m_j} \left(\frac{x_j-i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{n_j} \\ & \quad + \sum_{2l+N=|m|+|n|+1} O(\hbar^l\,(x^2+\xi^2+|\tau|)^{\frac{N}{2}}) \\ \mathcal{O}_p(x,t,\xi,\tau) &= e^{-i2\pi pt}\tau + \sum_{2l+N=3} O(\hbar^l\,(x^2+\xi^2+|\tau|)^{\frac{N}{2}}) \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Then the knowledge of the coefficients $a_k^l(O_{mnp})$ and $a_k^l(O_q)$ in (5.1.3)-(5.1.4) *for $k \leq N$ and m,n,p,q satisfying*

1. $|m|+|n| \leq N$
2. $\forall j = 1\ldots n,\ m_j = 0$ ***or*** $n_j = 0$
3. $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$

determines the Taylor expansion near γ of the full symbol (in the system of coordinates (x,t,ξ,τ)) of $H(x,\hbar D_x)$ up to order N.

The proof of Theorem 5.2.1 will be divided into three steps: first, we will prove in Proposition 5.2.2 the existence of the quantum Birkhoff normal form in a form convenient for our computations, especially concerning the discussion of orders. In Proposition 5.2.10, we will show that the trace formula with any observable O determines the matrix elements of O in the eigenbasis of the Hamiltonian. Finally, in Proposition 5.2.11, we will show that these matrix elements (associated to the family of operators defined in Theorem 5.2.1) determines $H(x,\hbar D_x)$ in a formal neighborhood of $x=\xi=\tau=0$, which will lead to Theorem 5.2.1.

Let us first fix some notations and standard results. For $i \in [\![1,n]\!] := \{1,\ldots,n\}$, we define the following operators on $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$:

- $a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + \hbar\partial_{x_i})$
- $a_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - \hbar\partial_{x_i})$
- $D_t = -i\hbar\partial_t$
- $P_i := \frac{1}{2}\left(-\hbar\partial_{x_i}^2 + x_i^2\right) = a_i^* a_i + \frac{\hbar}{2}$

For $\mu \in \mathbb{N}^n$, $\nu \in \mathbb{Z}$ we will denote by $|\mu,\nu\rangle$ the common eigenvectors of $P_1 \ldots P_n$ and D_t:

$$P_i|\mu,\nu\rangle = (\mu_i + \frac{1}{2})\hbar|\mu,\nu\rangle \text{ and } D_t|\mu,\nu\rangle = 2\pi\hbar\nu|\mu,\nu\rangle. \tag{5.2.5}$$

These vectors are explicitly constructed as follows:

$$|0,0\rangle(x,t) := \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{4}}} e^{\frac{-x^2}{2\hbar}}, \quad |\mu,\nu\rangle(x,t) := e^{i2\pi\nu t} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mu_i!\hbar^{|\mu|}}} a_i^{*\mu_i} |0,0\rangle(x,t) \tag{5.2.6}$$

We will also need the notation

$$|\mu\rangle(x) := |\mu,0\rangle(x,0) \tag{5.2.7}$$

We will not need the explicit expressions of $|\mu,\nu\rangle(x,t)$ and $|\mu\rangle(x)$ in terms of rescaled Hermite functions, but rather use the following indentites:

$$\begin{cases} a_i|\mu,\nu\rangle = \sqrt{\mu_i\hbar}|\mu_1,\ldots,\mu_{i-1},\mu_i-1,\mu_{i+1},\ldots,\mu_n,\nu\rangle \\ a_i^*|\mu,\nu\rangle = \sqrt{(\mu_i+1)\hbar}|\mu_1,\ldots,\mu_{i-1},\mu_i+1,\mu_{i+1},\ldots,\mu_n,\nu\rangle \\ [a_i,a_j^*] = \delta_{ij}\hbar, \ [a_i,a_j] = 0. \end{cases} \tag{5.2.8}$$

We shall write $|\mu| := \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i$, $z_i = \frac{x_i+i\xi_i}{\sqrt{2}}$, $p_i = \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2}$ and denote by $\mathrm{Op}^W(f)$ the pseudodifferential operator whose total Weyl symbol is f. We have

$$\mathrm{Op}^W(z_i) = a_i, \ \mathrm{Op}^W(\bar{z}_i) = a_i^*, \ \mathrm{Op}^W(z_i\bar{z}_i) = P_i \text{ and } \mathrm{Op}^W(\tau) = D_t \tag{5.2.9}$$

Finally, we will denote by a, a^* or P the n-tuple of operators a_i, a_i^*, P_i, $i \in [\![1,n]\!]$ and denote for j n-tuple of nonnegative integers, $X^j = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i^{j_i}$.

5.2.1 Construction of the Quantum Birkhoff normal form

Our construction of the normal form, inspired by [GP10], is the content of the following Proposition.

Proposition 5.2.2. *Let $H(x,\hbar D_x)$ be a self-adjoint semiclassical elliptic pseudodifferential operator on $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$, whose principal symbol is*

$$H_p(x,t,\xi,\tau) = H_0(p,\tau) + H_2 \tag{5.2.10}$$

where $H_0(p,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i p_i + \tau$ and H_2 vanishes to the third order on $x = \xi = \tau = 0$.

Then for any $N \geq 3$, there exists a self-adjoint semiclassical elliptic pseudodifferential operator $\widetilde{W}_{\leq N}$ and a smooth function $h(p_1,\ldots,p_n,\tau,\hbar)$ satisfying microlocally in a neighborhood of $x = \xi = \tau = 0$ the following statement:

$$\begin{aligned} &\forall M > 0, \ \exists C_N = C_N(M) > 0, \forall(\mu,\nu,\hbar) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z} \times [0,1[, |\mu\hbar| + |\nu\hbar| < M, \\ &\left\| \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - h(P_1,\ldots,P_n,D_t,\hbar) \right) |\mu,\nu\rangle \right\| \leq C_N(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}} \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

The operators $\widetilde{W}_{\leq N}$ can be computed recursively in the form:

$$\widetilde{W}_{\leq N} = W_{\leq N} + (D_t^2 + \sum_{i=1}^{n} P_i)^{N+1} \tag{5.2.12}$$

where

$$\begin{cases} W_{\leq N} = \sum_{3\leq q\leq N} W_q \\ W_q := \sum_{2p+|j|+|k|+2m=q} \alpha_{pjkm}(t)\hbar^p Op^W(z^j \bar{z}^k) D_t^m \end{cases} \tag{5.2.13}$$

with α_{pjkm} smooth and W_q is symmetric.

Remark 5.5 (IMPORTANT CONVENTION). We are only interested in recovering the Hamiltonian in a formal neighborhood of γ: every asymptotic expansion is meant microlocally and we will be rewriting equations such as (5.2.11) simply as:

$$\left\|\left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - h(P_1, \dots, P_n, D_t, \hbar)\right)|\mu,\nu\rangle\right\| = O\left(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}}\right) \tag{5.2.14}$$

By abuse of notation, we will identify the same way any operator with its version microlocalized near γ.

Remark 5.6. We introduce $\widetilde{W}_{\leq N}$ in order to gain ellipticity and self-adjointness like it has been done in Lemma 4.5 of [GP10].

The proof of Proposition 5.2.2 will need several preliminaries:

Definition 5.2.3. We will say that a pseudodifferential operator A on $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ is "polynomial of order $r \in \mathbb{N}$" (PO(r)) if there exists $\alpha_{pjkm} \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ such that:

$$A = \sum_{2p+|j|+|k|+2m=r} \alpha_{pjkm}(t)\hbar^p \mathrm{Op}^W(z^j \bar{z}^k) D_t^m \tag{5.2.15}$$

These operators have the following properties.

Proposition 5.2.4. *Let A be a pseudodifferential operator on $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$. Then, there exists a family of operators A_r, $r \in \mathbb{N}$ such that for any $r \in \mathbb{N}$, A_r is PO(r) and*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left\|\left(A - \sum_{r=0}^{N} A_r\right)|\mu,\nu\rangle\right\| = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}}\right) \tag{5.2.16}$$

Let us define a notion of suitable asymptotic equivalence.

Definition 5.2.5. Let us introduce for any operator A the notations $\lfloor A \rfloor_r$ et $\lfloor A \rfloor_{\leq N}$ which represent respectively the terms of order r and of order smaller or equal to N in the expansion (5.2.16).
If A and B are two operators, we will write $A \sim B$ if, for any $r \in \mathbb{N}$, $\lfloor A \rfloor_r = \lfloor B \rfloor_r$. Also, if $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a family of operators, we will write that:

$$A \sim \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \tag{5.2.17}$$

if for any $N \in \mathbb{N}$, $\lfloor A_n \rfloor_{\leq N}$ is zero for n sufficiently large, and the finite sum:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor A_n \rfloor_{\leq N} = \lfloor A \rfloor_{\leq N}. \tag{5.2.18}$$

Proof of proposition 5.2.4. Let a be the total Weyl symbol of A. Let us define the family $(\alpha_{pjkm})_{(p,m,j,k)\in\mathbb{N}^2\times(\mathbb{N}^n)^2}$ of functions on $\mathbb{S}^1$ by the Taylor expansion of a near $z = \bar{z} = \tau = \hbar = 0$, for any $N \in \mathbb{N}$:

$$a(z,t,\bar{z},\tau,\hbar) = \sum_{r=0}^{N} \sum_{\substack{2p+|j|+|k| \\ +2m=r}} \alpha_{pjkm}(t)\hbar^p z^j \bar{z}^k \tau^m + \sum_{p=0}^{\frac{N+1}{2}} O\left(\hbar^p (|z|^2 + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}-p}\right) \tag{5.2.19}$$

For any $r \in \mathbb{N}$, let us notice $(z,t,\bar{z},\tau,\hbar) \mapsto \sum\limits_{2p+|j|+|k|+2m=r} \alpha_{pjkm}(t)\hbar^p z^j \bar{z}^k \tau^m$ is the total symbol of a pseudodifferential operator A_r, which is PO(r). And by (5.2.5), (5.2.9) and (5.2.19) (see [GP10]):

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\| \left(A - \sum_{r=0}^{N} A_r \right) |\mu,\nu\rangle \right\| &= \sum_{p=0}^{\frac{N+1}{2}} \hbar^p O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}-p} \right) \\ &= O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}} \right). \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

This concludes the proof. ☐

The following lemma will be crucial for our computations.

Lemma 5.2.6. *Let F and G be PO(r) and PO(r') respectively then $\frac{[F,G]}{i\hbar}$ is PO($r + r' - 2$).*

Proof. The proof of Lemma 5.2.6 will be a direct consequence of the two following lemmas, whose proof will be given at the end of this proof.

Lemma 5.2.7. *Any monomial operator of order r, that is of the form $\alpha(t)\hbar^p b_1 \dots b_l D_t^m$, where:*
- *for $j \in [\![1,l]\!]$, $b_j \in \{a_1, a_1^*, \dots, a_n, a_n^*\}$*
- *$2p + l + 2m = r$*

is PO(r).

Lemma 5.2.8. *If F and G are monomials of order r and r' respectively, then $\frac{[F,G]}{i\hbar}$ is PO($r + r' - 2$)*

Indeed, any PO(r) is a finite sum of monomials of the same order, hence if F and G are PO(r) and PO(r') respectively, then $\frac{[F,G]}{i\hbar}$ is a finite sum of quantities of type $\frac{[\widetilde{F},\widetilde{G}]}{i\hbar}$ where $\widetilde{F}$ and $\widetilde{G}$ are monomials of order r and r' respectively. Any of those quantities are PO($r + r' - 2$) by Lemmas 5.2.7 and 5.2.8, and a finite sum of PO($r + r' - 2$) is PO($r + r' - 2$). Lemma 5.2.6 is proved. ☐

Let us prove now Lemmas 5.2.7 and 5.2.8:

Proof of Lemma 5.2.7. Since for any $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, a_i and a_i^* commute with both a_j and a_j^*, it is sufficient to prove that any ordered product $b_1 \dots b_l$, where $l \geq 1$ and for any $j \in [\![1, l]\!]$, $b_j \in \{a_1, a_1^*\}$, is PO(r). For any such ordered product, let us introduce the integer $k(b_1 \dots b_l) = \sharp\{m \in [\![1, l]\!], b_m = a_1^*\}$.

We will proceed by induction on l. Let us define for any positive integer l the following assertion

(A_l): "Any ordered product $b_1 \dots b_l$, where for any $j \in [\![1, l]\!]$, $b_j \in \{a_1, a_1^*\}$, is the sum of the operator $\mathrm{Op}^W(z_1^{l-k}\bar{z}_1^k)$ (where $k = k(b_1 \dots b_l)$ and of a linear combination of the operators $\hbar^p \mathrm{Op}^W(z_1^j \bar{z}_1^m)$ with $p \geq 1$, $2p + j + m = l$ and $j - m = l - 2k$".

If $l = 1$, there is nothing to prove since $a_1 = \mathrm{Op}^W(z_1)$ and $a_1^* = \mathrm{Op}^W(\bar{z}_1)$.

If $l = 2$,

$$\begin{cases} a_1^2 = \mathrm{Op}^W(z_1^2) \\ a_1^{*2} = \mathrm{Op}^W(\bar{z}_1^2) \\ a_1 a_1^* = P_1 + \frac{\hbar}{2} = \mathrm{Op}^W(z_1\bar{z}_1) + \frac{\hbar}{2} \\ a_1^* a_1 = \mathrm{Op}^W(z_1\bar{z}_1) - \frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

and therefore, the assertion is proved for $l = 2$.

Now, let l be a positive integer, and let us assume (A_k) up to order $k = l$. Let $B = b_1 \dots b_{l+1}$ be an ordered product, where for any $j \in [\![1, l+1]\!]$, $b_j \in \{a_1, a_1^*\}$. If for any $j \in [\![1, l]\!]$, $b_j = b_{j+1}$, then $B = \mathrm{Op}^W(z_1^{l+1})$ or $B = \mathrm{Op}^W(\bar{z}_1^{l+1})$. Otherwise, one can assume that $b_1 = a_1$, and that $j_0 = \max\{j \in [\![1, l+1]\!], b_j = a_1\}$ satisfies: $1 \leq j_0 \leq l$. Then, we have: $[a_1^{j_0}, a_1^*] = j_0 \hbar a_1^{j_0 - 1}$, so that:

$$b_1 \dots b_{l+1} = a_1^{j_0} a_1^* b_{j_0+2} \dots b_{l+1} = a_1^* a_1^{j_0} b_{j_0+2} \dots b_{l+1} + \hbar j_0 a_1^{j_0-1} b_{j_0+2} \dots b_{l+1} \tag{5.2.21}$$

Therefore, if one sets $k := k(b_1 \dots b_{l+1})$, since $\binom{l+1}{k} = \binom{l}{k} + \binom{l}{k-1}$:

$$\begin{aligned} \binom{l+1}{k} b_1 \dots b_{l+1} = & \binom{l}{k} a_1^{j_0} a_1^* b_{j_0+2} \dots b_{l+1} + \binom{l}{k-1} a_1^* a_1^{j_0} b_{j_0+2} \dots b_{l+1} \\ & + \hbar \binom{l}{k-1} j_0 a_1^{j_0-1} b_{j_0+2} \dots b_{l+1} \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

(A_{l-1}) gives us that $a_1^{j_0-1} b_{j_0+2} \dots b_{l+1}$ is a linear combination of the operators $\hbar^p \mathrm{Op}^W(z_1^j \bar{z}_1^m)$ with $2p + j + m = l - 1$ and $j - m = l + 1 - 2k$.

Let us now observe that the $\binom{l+1}{k} \mathrm{Op}^W(z^{l+1-k}\bar{z}^k)$ is a sum of $\binom{l+1}{k}$ ordered monomials, which we divide in two parts: the $\binom{l}{k}$ ordered monomials whose first term is a_1, whose sum forms precisely $\binom{l}{k} a_1 Op^W(z^{l-k}\bar{z}^k)$ and the $\binom{l}{k-1}$ others, who forms $\binom{l}{k-1} a_1^* Op^W(z^{l+1-k}\bar{z}^{k-1})$. More precisely:

$$\binom{l+1}{k} Op^W(z^{l+1-k}\bar{z}^k) = \binom{l}{k} a_1 Op^W(z^{l-k}\bar{z}^k) + \binom{l}{k-1} a_1^* Op^W(z^{l+1-k}\bar{z}^{k-1}) \tag{5.2.23}$$

so that (A_l), for ordered products $a_1^{j_0-1}a_1^* b_{j_0+2}\dots b_{l+1}$ and $a_1^{j_0}b_{j_0+2}\dots b_{l+1}$, gives us, by equation that $\binom{l+1}{k}b_1\dots b_{l+1}$ is the sum of $\binom{l}{k}a_1 Op^W(z^{l-k}\bar{z}^k)+\binom{l}{k-1}a_1^* Op^W(z^{l+1-k}\bar{z}^{k-1}) = \binom{l+1}{k}Op^W(z^{l+1-k}\bar{z}^k)$ and a linear combination of the operators $\hbar^p \mathrm{Op}^W(z_1^j\bar{z}_1^m)$ with $p \geq 1$, $2p+j+m = l+1$ and $j-m = l+1-2k$ $\square$

Proof of Lemma 5.2.8. It is sufficient to remark that if F and G are of the form:

$$F = \alpha(t)b_1\dots b_l D_t^m \text{ and } G = \beta(t)b_1'\dots b_{l'}'D_t^{m'}$$

where:

- α and β are smooth
- $l+2m = r$, $l'+2m' = r'$
- For $j \in [\![1,l]\!]$, for $j' \in [\![1,l']\!]$, $b_j, b_{j'}' \in \{a_1, a_1^*\}$

then $\frac{[F,G]}{i\hbar}$ is a finite sum of monomials of order $r+r'-2$ since, by Lemma 5.2.7, each of them is $\mathrm{PO}(r+r'-2)$. With those assumptions on F and G, we get:

$$\begin{aligned}\frac{[F,G]}{i\hbar} =& \frac{[\alpha(t)b_1\dots b_l D_t^m, \beta(t)b_1'\dots b_{l'}'D_t^{m'}]}{i\hbar}\\ =&\alpha(t)\beta(t)\frac{[b_1\dots b_l, b_1'\dots b_{l'}']}{i\hbar}D_t^{m+m'} + \alpha(t)b_1\dots b_l\frac{[D_t^m,\beta(t)]}{i\hbar}b_1'\dots b_{l'}'D_t^{m'}\\ &-\beta(t)b_1'\dots b_{l'}'\frac{[D_t^{m'},\alpha(t)]}{i\hbar}b_1\dots b_l D_t^m\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Therefore it is sufficient to prove that $\frac{[b_1\dots b_l, b_1'\dots b_{l'}']}{i\hbar}$, $\frac{[D_t^m,\beta(t)]}{i\hbar}$ and $\frac{[D_t^{m'},\alpha(t)]}{i\hbar}$ are respectively: $\mathrm{PO}(l+l'-2)$, $\mathrm{PO}(2m-2)$ and $\mathrm{PO}(2m'-2)$ (with the convention that a $\mathrm{PO}(j)$ with $j<0$ is 0).
For the two last, it is quite obvious, since:

$$\frac{[D_t^m,\beta(t)]}{i\hbar} = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}(i\hbar)^{m-k-1}\beta^{(m-k)}(t)D_t^k \tag{5.2.25}$$

Now, for $j \in [\![1,l']\!]$, let us set $\epsilon_j = 1$ if $b_j' = a_1^*$, $\epsilon_j = -1$ otherwise. Since $[a_1,a_1^*] = \hbar$, we get:

$$\begin{aligned}b_1\dots b_l b_1'\dots b_{l'}' = b_1' b_1\dots b_l b_2'\dots b_{l'}' &+ \frac{\epsilon_1+1}{2}\hbar\sum_{\substack{k=1\\ b_k=a_1}}^{l} b_1\dots b_{k-1}b_{k+1}\dots b_l b_2'\dots b_{l'}'\\ &+\frac{\epsilon_1-1}{2}\hbar\sum_{\substack{j=1\\ b_k=a_1^*}}^{l} b_1\dots b_{k-1}b_{k+1}\dots b_l b_2'\dots b_{l'}'\end{aligned}$$

Hence by induction on $j \in [\![1, l']\!]$:

$$\begin{aligned}\frac{[b_1 \dots b_l, b'_1 \dots b'_{l'}]}{i\hbar} =& -i \sum_{j=1}^{l'} \frac{\epsilon_j + 1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ b_k = a_1}}^{l} b'_1 \dots b'_{j-1} b_1 \dots b_{k-1} b_{k+1} \dots b_l b'_{j+1} \dots b'_{l'} \\ & - i \sum_{j=1}^{l'} \frac{\epsilon_j - 1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ b_k = a_1^*}}^{l} b'_1 \dots b'_{j-1} b_1 \dots b_{k-1} b_{k+1} \dots b_l b'_{j+1} \dots b'_{l'}\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

The right-hand side of (5.2.26) is a finite sum of monomials of order $l + l' - 2$, hence it is PO$(l + l' - 2)$ by Lemma 5.2.7, and Lemma 5.2.8 is proved. □

Proposition 5.2.9. *Let G be PO(r).*

There exists F, PO(r), and $G_1 = G_1(P_1, \dots, P_n, D_t, \hbar)$ such that:

$$\frac{[H_0(P, D_t), F]}{i\hbar} = G + G_1 \tag{5.2.27}$$

Moreover, F is symmetric if G is symmetric, $G_1 = 0$ if r is odd, and G_1 is an homogeneous polynomial function of total order $\frac{r}{2}$ if r is even.

Remark 5.7. If $F = \sum_{2p+|j|+|k|+2m=r} \alpha_{pjkm}(t) \hbar^p \mathrm{Op}^W(z^j \bar{z}^k) D_t^m$, one can choose:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \alpha_{pjjm}(t) dt = 0 \tag{5.2.28}$$

Indeed, any $\mathrm{Op}^W(z^j \bar{z}^j) D_t^m$ commutes with $H_0(P, D_t, \hbar)$. It is the choice we will make through this article.

Proof of Proposition 5.2.9. Let us first assume that G is a monomial of order r: $G = \beta(t) b_1 \dots b_l D_t^m$ where:

- α is smooth
- $l + 2m = r$
- For $j \in [\![1, l]\!]$, $b_j \in \{a_1, a_1^*, \dots, a_n, a_n^*\}$

and let us look for F of the form: $F = \alpha(t) b_1 \dots b_l D_t^m$. We have:

$$\begin{aligned}\frac{[H_0, F]}{i\hbar} =& \frac{[H_0, \alpha(t) b_1 \dots b_l D_t^m]}{i\hbar} \\ =& \alpha(t) \sum_{s=1}^{n} \theta_s \frac{[P_s, b_1 \dots b_l]}{i\hbar} D_t^m + \frac{[D_t, \alpha(t)]}{i\hbar} b_1 \dots b_l D_t^m \\ =& \alpha(t) \sum_{s=1}^{n} \theta_s \frac{[P_s, b_1 \dots b_l]}{i\hbar} D_t^m + \alpha'(t) b_1 \dots b_l D_t^m\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

If we set, for $s \in [\![1, n]\!]$, $k_s = \sharp\{m \in [\![1, l]\!], b_m = a_s^*\}$ and $j_s = \sharp\{m \in [\![1, l]\!], b_m = a_s\}$, we deduce from (5.2.26) that:

$$\frac{[P_s, b_1 \dots b_l]}{i\hbar} = i(j_s - k_s) b_1 \dots b_l \tag{5.2.30}$$

Hence:

$$\frac{[H_0, F]}{i\hbar} = i\sum_{s=1}^{n} \theta_s(j_s - k_s)\alpha(t)b_1 \dots b_l D_t^m + \alpha'(t)b_1 \dots b_l D_t^m \tag{5.2.31}$$

$\frac{[H_0,F]}{i\hbar} = G$ admits a solution if there exists α such that:

$$i\sum_{s=1}^{n} \theta_s(j_s - k_s)\alpha(t) + \alpha'(t) = \beta(t) \tag{5.2.32}$$

If $(c_p(\alpha))_{p\in\mathbb{Z}}$ and $(c_p(\beta))_{p\in\mathbb{Z}}$ are the Fourier coefficients of α and β, it is sufficient that, for $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(\alpha)$ is solution of:

$$i\left(\sum_{s=1}^{n} \theta_s(j_s - k_s) + 2\pi p\right) c_p(\alpha) = c_p(\beta) \tag{5.2.33}$$

and

$$c_p(\alpha) \underset{p\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{|p|^\infty}\right) \tag{5.2.34}$$

If the n-tuples j and k are different, the non-degeneracy condition on the θ_is together with the fact that $c_p(\beta) \underset{p\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{|p|^\infty}\right)$ (because β is smooth), gives the existence of $c_p(\alpha)$ satisfying (5.2.33) and (5.2.34).
If r is odd, j and k can't be equal, hence Proposition 5.2.9 is proved in this case (r odd and G monomial)
If r is even, and $j = k$, there exists a family $(c_p(\alpha))_{p\in\mathbb{Z}^*}$ satisfying (5.2.33) and (5.2.34). Hence, if α is the smooth function with Fourier coefficients $c_p(\alpha)$ for $p \neq 0$ and $c_0(\alpha) = 0$, we get:

$$\frac{[H_0, F]}{i\hbar} = G + c_0(\beta)b_1 \dots b_l D_t^m \tag{5.2.35}$$

And from the proof of Lemma 5.2.7, we know that $c_0(\beta)b_1 \dots b_l D_t^m$ can be reordered as the sum: $G_1(P, D_t, \hbar) := c_0(\beta) \sum_{2p+2|k|=l} a_{p,k}\hbar^p P^k D_t^m$. Therefore, Proposition 5.2.9 is proved in the case where r is even and G is monomial.
The general case is easily deduced from the case where G is monomial, since G is a finite sum of monomials of the same order.
Also, the form of F allows us to conclude immediately that F is symmetric if G is so. □

Now we have everything we need for the proof by induction of Proposition 5.2.2.

Proof of Proposition 5.2.2. Microlocally near $x = \xi = \tau = 0$, $H(x, \hbar D_x)$ satisfies, in the sense of Definition 5.2.5,

$$H := H(x, \hbar D_x) \sim H_0(P_1, \dots, P_n, D_t) + \sum_{q\geq 3} H_q, \quad H_q := \lfloor H(x, \hbar D_x)\rfloor_q \tag{5.2.36}$$

Let us set $W_{\leq 2} = 0$, and construct by induction $(W_q)_{q\geq 3}$ and $(H^q)_{q\geq 3}$, such that:

– for $q \geq 3$, W_q is PO(q) and H^q is zero if q is odd, an homogeneous polynomial function of total order $\frac{q}{2}$ if q is even.
– and for any $q \geq 3$:

$$\frac{i}{\hbar}[W_q, H_0] + H_q + \left\lfloor \frac{i}{\hbar}[W_{\leq q-1}, H - H_0] + \sum_{l\geq 2} \frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{W_{\leq q-1}, \dots, W_{\leq q-1}}^{l \text{ times}}, H] \right\rfloor_q$$
$$= H^q(P, D_t, \hbar)$$

The existence of such a family is garanteed by Proposition 5.2.9.

Let us set, for any $N \geq 3$, $\widetilde{W}_{\leq N} := \sum_{q=3}^{N} W_q + (|D_t|^2 + \sum_{i=1}^{n} P_i)^{\frac{N+1}{2}}$. As for any $q \geq 2$ H^{2q} is an homogeneous polynomial function of total order q, we can choose, by Borel's lemma, a smooth function h such that, for any $N \geq 2$ and in a neighborhood of $p = \tau = 0$:

$$\left| h(p, \tau, \hbar) - H_0(p, \tau) - \sum_{q=2}^{N} H^{2q}(p, \tau, \hbar) \right| = O\left((|p| + |\tau| + |\hbar|)^{N+1} \right) \tag{5.2.37}$$

We have, for any $N \geq 3$:

$$e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \sim H + \frac{i}{\hbar}[\widetilde{W}_{\leq N}, H] + \sum_{l\geq 2} \frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{\widetilde{W}_{\leq N}, \dots, \widetilde{W}_{\leq N}}^{l \text{ times}}, H]$$
$$\sim H + \frac{i}{\hbar}[W_{\leq N}, H_0] + \frac{i}{\hbar}[W_{\leq N}, H - H_0] + \sum_{l\geq 2} \frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{\widetilde{W}_{\leq N}, \dots, \widetilde{W}_{\leq N}}^{l \text{ times}}, H]$$
$$+ \frac{i}{\hbar}[\widetilde{W}_{\leq N} - W_{\leq N}, H]$$

Since for any $q \leq N$, W_q is PO(q) and H_0 is PO(2), Lemma 5.2.6 gives us that:

$$\left\lfloor \frac{i}{\hbar}[W_{\leq N}, H_0] \right\rfloor_q = \frac{i}{\hbar}[W_q, H_0] \tag{5.2.38}$$

Since the expansion of $H - H_0$ in PO(r) contains no term of order less or equal to 2, Lemma 5.2.6 also gives for $q \leq N$:

$$\left\lfloor \frac{i}{\hbar}[W_{\leq N}, H - H_0] \right\rfloor_q = \lfloor \frac{i}{\hbar}[W_{\leq q-1}, H - H_0] \rfloor_q \tag{5.2.39}$$

Lemma 5.2.6 finally gives us, that since the expansion of $H(x, \hbar D_x)$ in PO(r) contains no term of order less or equal to 1 and the one of $\widetilde{W}_{\leq N}$ no term of order less or equal to 2 for $q \leq N$:

$$\left\lfloor \sum_{l\geq 2} \frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{\widetilde{W}_{\leq N}, \dots, \widetilde{W}_{\leq N}}^{l \text{ times}}, H] \right\rfloor_q = \left\lfloor \sum_{l\geq 2} \frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{W_{\leq q-1}, \dots, W_{\leq q-1}}^{l \text{ times}}, H] \right\rfloor_q \tag{5.2.40}$$

and since the one of $\widetilde{W}_{\leq N} - W_{\leq N}$ contains no term of order less or equal to $N+1$:

$$\lfloor \frac{i}{\hbar}[\widetilde{W}_{\leq N} - W_{\leq N}, H]\rfloor_q = 0 \tag{5.2.41}$$

Therefore for any $q \leq N$:

$$\left\lfloor e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} \right\rfloor_q = H^q(P, D_t, \hbar) = \lfloor h(P, D_t, \hbar)\rfloor_q \tag{5.2.42}$$

Finally Proposition 5.2.4 gives us:

$$\left\| \left(e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} H e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} - h(P, D_t, \hbar)\right) |\mu, \nu\rangle \right\| = O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \tag{5.2.43}$$

which concludes the proof. □

5.2.2 Recovering the matrix elements from the Trace formula

The next result is the first inverse result needed for the proof of Theorem 5.2.1.

Proposition 5.2.10. *Let O be a pseudodifferential operator whose principal symbol vanishes on γ.*

1. *There exists a smooth function f vanishing at $(0,0,0)$ such that for any $N \geq 3$:*

$$\langle \mu, \nu | e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} O e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} |\mu, \nu\rangle = f\left((\mu + \frac{1}{2})\hbar, 2\pi\nu\hbar, \hbar\right) + O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N}{2}} \right) \tag{5.2.44}$$

Moreover let, for any integer l, ϕ_l be a Schwartz function whose Fourier transform is compactly supported in $(l-1, l+1)$ and let $(a_j^l(O))_{l\geq 0}$ provided by the trace formula (5.1.4)*. Then*

2. *The Taylor expansion of f up to order N is entirely determined by the family $(a_j^l(O))$, $0 \leq j \leq N$, $l \in \mathbb{N}$.*

Proof. Let us first prove point (1). Let us consider a monomial $G = \alpha(t) b_1 \dots b_l D_t^m$ where:

- α is smooth
- $l + 2m = r$
- For $j \in [\![1, l]\!]$, $b_j \in \{a_1, a_1^*, \dots, a_n, a_n^*\}$

Let us set for $i \in [\![1, n]\!]$, $k_i = \sharp\{m \in [\![1, l]\!], b_m = a_i^*\}$ and $j_i = \sharp\{m \in [\![1, l]\!], b_m = a_i\}$.

If $j \neq k$ or $\alpha \notin \mathbb{C}$, then: $\langle \mu, \nu | G | \mu, \nu\rangle = 0$ for any $(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}$.

If now $j = k$ and $\alpha \in \mathbb{C}$, then there exists complex numbers α_l ($0 \leq l_i \leq j_i$ for $i \in [\![1, n]\!]$), such that:

$$G = \sum_{0 \leq l_i \leq j_i} \alpha_l \hbar^{|l|} P_1^{j_1 - l_1} \dots P_n^{j_n - l_n} D_t^m, \ \alpha_0 = \alpha \tag{5.2.45}$$

Therefore for any $(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{Z}$:

$$\langle\mu,\nu|G|\mu,\nu\rangle=\sum_{0\leq l_i\leq j_i}\alpha_l\hbar^{|l|}\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\hbar\right)^{j-l}(2\pi\nu\hbar)^m \tag{5.2.46}$$

Hence, if G is PO(r), then for any $(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{Z}$:

- $\langle\mu,\nu|G|\mu,\nu\rangle=0$ if r is odd.
- If r is even, there exists an homogeneous polynomial function g of order $\frac{r}{2}$ such that:
$$\langle\mu,\nu|G|\mu,\nu\rangle=g\left((\mu+\frac{1}{2})\hbar,2\pi\nu\hbar,\hbar\right) \tag{5.2.47}$$

By Proposition 5.2.4 and Borel's lemma, we get that that for any operator A there exists a function g such that for any $(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{Z}$:

$$\langle\mu,\nu|A|\mu,\nu\rangle=g\left((\mu+\frac{1}{2})\hbar,2\pi\nu\hbar,\hbar\right)+O\left((|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^\infty\right) \tag{5.2.48}$$

Hence, the only point which remains to be proved, is that the function f in point (1) does not depend on N. It is therefore sufficient to prove that for any $q\leq N-1$,

$$\left\lfloor e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}Oe^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}\right\rfloor_q=\left\lfloor e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq q+1}}{\hbar}}Oe^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq q+1}}{\hbar}}\right\rfloor_q \tag{5.2.49}$$

But (5.2.49) is a direct consequence of Lemma 5.2.6. Indeed,

$$e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}Oe^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}\sim O+\sum_{l\geq 1}\frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{\widetilde{W}_{\leq N},\dots,\widetilde{W}_{\leq N}}^{l\text{ times}},O] \tag{5.2.50}$$

and since the principal symbol of O vanishes on γ, Lemma 5.2.6 gives us for any $l\geq 1$ and any $q\leq N-1$:

$$\left\lfloor\frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{\widetilde{W}_{\leq N},\dots,\widetilde{W}_{\leq N}}^{l\text{ times}},O]\right\rfloor_q=\left\lfloor\frac{i^l}{\hbar^l l!}[\overbrace{\widetilde{W}_{\leq q+1},\dots,\widetilde{W}_{\leq q+1}}^{l\text{ times}},O]\right\rfloor_q \tag{5.2.51}$$

Let us now move on to the proof of point (2).

Since $\hat{\phi}_l$ is supported near a single period of the flow, one can microlocalize the trace formula with observables near γ:

$$2\pi\mathrm{Tr}\left(O\phi_l\left(\frac{H-E}{\hbar}\right)\right)=\mathrm{Tr}\left(O\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho(P_1+\dots+P_n+|\zeta|)e^{it\frac{H-E}{\hbar}}dt\right)+O(\hbar^\infty) \tag{5.2.52}$$

where $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ is compactly supported and $\rho=1$ in a neighborhood of $p=\tau=0$. Therefore we can conjugate (5.2.52) by the microlocally unitary operator $e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}$:

$$2\pi \mathrm{Tr}\left(O\phi_l\left(\frac{H-E}{\hbar}\right)\right) =$$
$$= \mathrm{Tr}\left((e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}Oe^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho(P_1+\cdots+P_n+|\zeta|)e^{it\frac{e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}He^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}-E}{\hbar}}dt\right)+O(\hbar^\infty)$$

Thanks to Proposition 5.2.2, we can lighten the r.h.s. for any $(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho(P_1+\cdots+P_n+|\zeta|)e^{it\frac{e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}He^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}-E}{\hbar}}dt|\mu,\nu\rangle\\ &=\left(\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho\left((|\mu|+\frac{n}{2}+|2\pi\nu|)\hbar\right)e^{it\frac{h((\mu+\frac{1}{2})\hbar,\nu\hbar,\hbar)-E+O(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}})}{\hbar}}dt\right)|\mu,\nu\rangle\end{aligned}\tag{5.2.53}$$

As $\hat{\phi}_l$ is smooth and compactly supported, together with the non-degeneracy condition on the θ_is, we can assure that if we choose a sufficiently small support for ρ, we have for any $\eta>0$:

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho\left((|\mu|+\frac{n}{2}+|2\pi\nu|)\hbar\right)e^{it\frac{h((\mu+\frac{1}{2})\hbar,\nu\hbar,\hbar)-E+O(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}})}{\hbar}}dt\right)|\mu,\nu\rangle\\ &=\left(\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho\left((|\mu|+\frac{n}{2}+|2\pi\nu|)\hbar^\eta\right)e^{it\frac{h((\mu+\frac{1}{2})\hbar,\nu\hbar,\hbar)-E+O(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}})}{\hbar}}dt\right)|\mu,\nu\rangle+O(\hbar^\infty)\end{aligned}$$

Hence, choosing $\eta<\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}&2\pi\mathrm{Tr}\left(O\phi_l\left(\frac{H-E}{\hbar}\right)\right)+O(\hbar^\infty)\\ =&\sum_{\mu,\nu}\langle\mu,\nu|e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}Oe^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}}|\mu,\nu\rangle\times\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho\left((|\mu|+\frac{n}{2}+|\nu|)\hbar^\eta\right)e^{it(2\pi\nu+\theta.(\mu+\frac{1}{2}))}\dots\\ &\dots\exp\left(\frac{it}{\hbar}\sum_{1\leq q\leq N-2}H^q\left((\mu+\frac{1}{2})\hbar,\nu\hbar,\hbar\right)+O\left((|\mu|+|\nu|)^{\frac{N+1}{2}}\hbar^{\frac{N-1}{2}}\right)\right)dt\\ &=\sum_{\mu,\nu}\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_l(t)\rho\left((|\mu|+\frac{n}{2}+|2\pi\nu|)\hbar^\eta\right)e^{it(2\pi\nu+\theta.(\mu+\frac{1}{2})+\frac{H^2(0,0,\hbar)}{\hbar})}\\ &\left(1+\sum_{i\geq1}^{\frac{N-1}{2}}\hbar^iQ_i(\mu+\frac{1}{2},\nu,t)\right)\times\sum_{p\geq1}^{\frac{N+1}{2}}\sum_{|k|+m\leq p}b_{k,m,p-|k|-m}(\mu+\frac{1}{2})^k(2\pi\nu)^m\hbar^pdt+O(\hbar^{\frac{N+1}{2}})\end{aligned}$$

where for any $i\leq\frac{N-1}{2}$, Q_i is a determined polynomial function, of degree in $\left(\mu+\frac{1}{2},\nu\right)$ less or equal to $i+1$, which depends on the H^qs and the Taylor expansion of exp, and the $b_{k,m,s}$ $((k,m,s)\in\mathbb{N}^{n+2}\backslash\{0\})$ come from the Taylor expansion at $(0,0,0)$ of the function f defined in the first point of Proposition 5.2.10, *i.e.* for any $N \geq 1$:

$$f(x,y,z) = \sum_{1\leq |k|+m+s\leq N} b_{k,m,s} x^k y^m z^s + O\left((|x|+|y|+|z|)^{N+1}\right) \tag{5.2.54}$$

Now, let us set:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall \alpha \in (\mathbb{R}\backslash \frac{2\pi}{t}\mathbb{Z})^n, g(t,\alpha) := \frac{e^{i\frac{t}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}}{\prod_{i=1}^{n}(1-e^{it\alpha_i})} \tag{5.2.55}$$

By the non-degeneracy condition on the θ_is, g is well defined on the compact support of $\hat{\phi}_l$ around a single period, which is precisely l.

Therefore we get from the Poisson formula and the Riemann-Lebesgue lemma that the quantity $X_p(l)$ below can be computed recursively on $p \leq \frac{N+1}{2}$ from the $a_j^l(O)$, $j = 0, \ldots, p$:

$$\begin{aligned} X_p(l) &= \sum_{|k|+m\leq p} b_{k,m,p-|k|-m} \left[\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\hat{\phi}_l(t)\left(\frac{-i}{t}\right)^k \frac{\partial^k g}{\partial \alpha^k}(t,\alpha)\right)\right](l,\theta) \\ &= \sum_{|k|+m\leq p} b_{k,m,p-|k|-m} \left[\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(-i\frac{\partial}{t\partial \alpha}\right)^k g\right](l,\theta) \end{aligned} \tag{5.2.56}$$

since $\hat{\phi}_l$ is identically 1 around l.

Now, let us set, for any $i \in [\![1,n]\!]$, any $t \in \mathbb{R}$ and any $\alpha \in (\mathbb{R}\backslash\frac{2\pi}{t}\mathbb{Z})^n$, $x_i(t,\alpha) = e^{i\frac{t\alpha_i}{2}}$. and also define holomorphic function h on $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$ by $h(z) = \frac{z}{1-z^2}$ for $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$. We have for any $k \in \mathbb{N}^n$:

$$\left(-i\frac{\partial}{t\partial\alpha}\right)^k g = \prod_{i=1}^{n}\left(-i\frac{\partial}{t\partial\alpha_i}\right)^{k_i}(h\circ x_i) \tag{5.2.57}$$

For any $i \in [\![1,n]\!]$, an easy induction on $k_i \in \mathbb{N}$ leads to the following, since for any $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$, $h(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right)$, and $-i\frac{\partial x_i}{t\partial\alpha_i} = \frac{1}{2}x_i$:

$$\left(-i\frac{\partial}{t\partial\alpha_i}\right)^{k_i}(h\circ x_i) = \frac{k_i!}{2^{k_i+1}}\left(\frac{x_i}{(1-x_i)^{k_i+1}} + \frac{x_i}{(1+x_i)^{k_i+1}}\right) \tag{5.2.58}$$

Now, since $-i\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\alpha_i}{2}x_i$, an induction on $s_i \in \mathbb{N}$ shows that:

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_i}\left(-i\frac{\partial}{t\partial\alpha_i}\right)^{k_i}(h\circ x_i) = \frac{(k_i+s_i)!\alpha_i^{s_i}}{2^{k_i+s_i+1}}\left(\frac{x_i}{(1-x_i)^{k_i+s_i+1}} + \frac{x_i}{(1+x_i)^{k_i+s_i+1}}\right) \tag{5.2.59}$$

Let us now introduce for any n-tuple s such that $|s| = m$, the multinomial coefficient:

$$\binom{m}{s} = \frac{m!}{s_1! \dots s_n!}$$

We have:

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(-i\frac{\partial}{t\partial\alpha}\right)^k g = \sum_{|s|=m} \binom{m}{s} \prod_{i=1}^{n} \left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_i} \left(-i\frac{\partial}{t\partial\alpha_i}\right)^{k_i} (h \circ x_i) \qquad (5.2.60)$$

Let us use Kronecker theorem, whose hypothesis is precisely the non-degeneracy condition on the θ_is: for any n-tuple $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_1^n$, one can find a sequence of integers $(l_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, such that:

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j(l_p, \theta) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x_j$$

Therefore, setting, for any $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{S}_1 \backslash \{-1, 1\})^n$ and $(k, m) \in \mathbb{N}^{n+1}$:

$$u^{(k,m)} = \sum_{|s|=m} \binom{m}{s} \prod_{i=1}^{n} \frac{(k_i + s_i)!\theta_i^{s_i}}{2^{k_i+s_i+1}} \left(\frac{x_i}{(1 - x_i)^{k_i+s_i+1}} + \frac{x_i}{(1 + x_i)^{k_i+s_i+1}}\right) \qquad (5.2.61)$$

we have that (5.2.56), (5.2.59) and (5.2.60) together with Kronecker theorem allows us to conclude that $X_p := \sum_{|k|+m\leq p} b_{k,m,p-|k|-m} u^{(k,m)}$ is determined by the $a_j^l(O)$, $j = 0, \dots, p$.

Hence, the only thing which remains to be proved is that, if one chooses x_i tending to 1 in a way convenient to us, the $|u^{(k,m)}|$s will be neglectable in comparison to each other. More precisely, let x_i tend to 1 in such a way that:

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], |1 - x_i| = o\left(|1 - x_{i+1}|^p\right) \qquad (5.2.62)$$

we have that $s_1 = m$ gives the leading order in (5.2.61) and therefore:

$$(1 - x_1)^m u^{(k,m)} \sim C \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - x_i)^{k_i+1}} \qquad (5.2.63)$$

for some $C > 0$. Hence, if one sets $\widetilde{m} = (m, 0, \dots, 0)$:

$$u^{(k,m)} = o\left(u^{(k',m')}\right) \text{ if } k + \widetilde{m} < k' + \widetilde{m'} \qquad (5.2.64)$$

where $<$ is the lexicographical order on $\mathbb{N}^n$. Therefore, for any $p \in \mathbb{N}$ and $(k, m) \in \mathbb{N}^{n+1}$ such that $|k_0| + m_0 \leq p$, the following quantity can be recursively determined from X_p:

$$X_{k_0,m_0} = \sum_{k'+\widetilde{m'}=k+\widetilde{m}} b_{k,m,p-|k|-m} u^{(k,m)} \qquad (5.2.65)$$

Reversing for example the roles of $i = 1$ and $i = 2$ in (5.2.62), and observing that $k_2 + m \neq k_2' + m'$ if $k + \widetilde{m} = k' + \widetilde{m'}$ and $(k, m) \neq (k', m')$, one determines $b_{k,m,p-|k|-m}$ from (5.2.65) recursively on m. Finally, each $b_{k,m,s}$ with $|k| + m + s \leq N$ is determined by the $a_j^l(O)$, with $j = 0 \dots N$ and $l \in \mathbb{N}$ and the point (2) is proved, which ends the proof of Proposition 5.2.10.

□

5.2.3 Recovering the Hamiltonian from matrix elements

In order to finish the proof of Theorem 5.2.1 we will show how the knowledge of the diagonal matrix elements of a given known selfadjoint operator conjugated by a unitary one determines the latter (in the framework of asymptotic expansion).

Let $\widetilde{W}_{\leq N}$ as in Proposition 5.2.2 and O_{mnp}, O_p as in Theorem 5.2.1. By Proposition 5.2.10, there exists smooth functions f_{mnp} and f_p vanishing at $(0,0,0)$ if $(m,n) \neq (0,0)$ such that for any $N \geq 3$:

$$\langle \mu, \nu | e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} O_{mnp} e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} | \mu, \nu \rangle = f_{mnp}\left((\mu + \frac{1}{2})\hbar, 2\pi\nu\hbar, \hbar \right) + O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N}{2}} \right) \tag{5.2.66}$$

and

$$\langle \mu, \nu | e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} O_p e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq N}}{\hbar}} | \mu, \nu \rangle = f_p\left((\mu + \frac{1}{2})\hbar, 2\pi\nu\hbar, \hbar \right) + O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N}{2}} \right) \tag{5.2.67}$$

Proposition 5.2.11. *The Taylor expansions, at the origin, of the functions f_{mnp}, f_q up to order $N-1$, $N \geq 3$, for $(m,n,p,q) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z}^2$ satisfying conditions*

1. $0 < |m| + |n| \leq N$
2. $\forall j = 1 \ldots n,\ m_j = 0$ ***or*** $n_j = 0$
3. $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$

determine completely $W_{\leq N}$.

Proof of Proposition 5.2.11. Let us write

$$\begin{aligned} W_N = & \sum_{2l+|j|+|k|+2s=N} \alpha_{ljks}(t) \hbar^l \mathrm{Op}^W(z^j \bar{z}^k) D_t^s \\ := & \sum_{2l+|j|+|k|+2s=N} \sum_{d\in\mathbb{Z}} \alpha_{ljksd} \hbar^l e^{i2\pi dt} \mathrm{Op}^W(z^j \bar{z}^k) D_t^s \end{aligned} \tag{5.2.68}$$

where, for every α_{ljjs0} is chosen to be zero by the convention of remark 5.7.

Since $W_2 = 0$ we can proceed by induction on $N \geq 3$: let's assume $W_{\leq N-1}$ already determined.

Let $(m,n,p,q) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ be such that:

$$0 < |m| + |n| \leq N, \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ m_i n_i = 0 \tag{5.2.69}$$

Let us also state the following lemma, whose proof will be given after the end of the present proof.

Lemma 5.2.12. *Let $(j,k,s,d) \in \mathbb{N}^{2n+1} \times \mathbb{Z}$, such that: $|j| + |k| + 2s = N$.*
If $j + m = k + n$, then:

$$\begin{aligned} \langle \mu, \nu | [e^{i2\pi pt} Op^W(z^j \bar{z}^k) D_t^s, O_{mnp}] | \mu, \nu \rangle = & -\hbar g_{jks}\left(\left(\mu + \tfrac{1}{2}\right)\hbar, \nu\hbar \right) \\ & + O\left(\hbar^2 (|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|}{2}-2} + \hbar (|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}} \right) \end{aligned} \tag{5.2.70}$$

where:

$$g_{jks}\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\hbar,\nu\hbar\right)=(2\pi\nu\hbar)^s(\mu\hbar)^{\max(j,k)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_im_i-j_in_i}{\mu_i\hbar}+\frac{ps}{\nu\hbar}\right)$$

and $\max(j,k)=(\max(j_i,k_i))_{1\leq i\leq n}$.

If $j+m\neq k+n$ *or* $d\neq p$*, then:*

$$\begin{aligned}\langle\mu,\nu|[e^{i2\pi dt}Op^W(z^j\bar{z}^k)D_t^s,O_{mnp}]|\mu,\nu\rangle=&O\left(\hbar^2(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|}{2}-2}\right)\\&+O\left(\hbar(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}}\right)\end{aligned}\tag{5.2.71}$$

We also have, if $j=k$*:*

$$\begin{aligned}\langle\mu,\nu|[e^{i2\pi qt}Op^W(z^j\bar{z}^k)D_t^s,O_q]|\mu,\nu\rangle=&-2\pi\hbar q(1+s)\left((\mu+1/2)\hbar\right)^j(\nu\hbar)^s\\&+O\left(\hbar^2(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N-2}{2}}+\hbar(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}}\right)\end{aligned}\tag{5.2.72}$$

And if $j\neq k$ *or* $d\neq q$*:*

$$\langle\mu,\nu|[e^{i2\pi dt}Op^W(z^j\bar{z}^k)D_t^s,O_q]|\mu,\nu\rangle=O\left(\hbar^2(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N-2}{2}}\right)+O\left(\hbar(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+1}{2}}\right)\tag{5.2.73}$$

By equation (5.2.66), the Taylor expansion of function f_{mnp} up to order $N-1$ determines modulo $O\left((|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^N\right)$:

$$\langle\mu,\nu|e^{\frac{i\widetilde{W}_{\leq 2N}}{\hbar}}O_{mnp}e^{\frac{-i\widetilde{W}_{\leq 2N}}{\hbar}}|\mu,\nu\rangle-\langle\mu,\nu|O_{mnp}|\mu,\nu\rangle\tag{5.2.74}$$

Since $\widetilde{W}_{\leq 2N}$ is a sum of polynomial operators of order greater that 3, we get from Lemma 5.2.6 that :

$$\sum_{l\geq 2}\frac{i^l}{\hbar^l l!}\langle\mu,\nu|[\overbrace{\widetilde{W}_{\leq 2N},\dots,\widetilde{W}_{\leq 2N}}^{l\text{ times}},O_{mnp}]|\mu,\nu\rangle=O\left((|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}}\right)\tag{5.2.75}$$

Hence, using the notations of Lemma 5.2.12, (5.2.74) is equal, modulo known terms and $O\left((|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}}\right)+O\left(\hbar(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|}{2}-2}\right)$ to:

$$\sum_{\substack{|j|+|k|+2s=N+1\\ j+m=k+n}}i\alpha_{0jksp}g_{jks}\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\hbar,\nu\hbar\right)\tag{5.2.76}$$

Let us define the set $\Gamma=\{(j,k,s)\in\mathbb{N}^{2n+1}\mid |j|+|k|+2s=N,\ j+m=k+n\}$. Let us choose $\mu_1(\hbar),\dots\mu_n(\hbar),\nu(\hbar)$ such that, as $\hbar$ tends to 0:

$$\nu^{\frac{N-2}{N-1}}\ll\mu_1\ll\cdots\ll\mu_n\ll\nu\ll\hbar^{-\frac{1}{3}}\tag{5.2.77}$$

Let us also define $i_0 := \min\{i \in [\![1,n]\!], m_i \neq n_i\}$ (it exists since $(m,n) \neq (0,0)$ and for any $i \in [\![1,n]\!]$, $m_i n_i = 0$). Let us also remark $j_{i_0} n_{i_0} - k_{i_0} m_{i_0}$ never vanishes on Γ. We have by (5.2.77) that, for $(j,k,s) \in \Gamma$,

$$g_{jks}\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\hbar, \nu\hbar\right) \underset{\hbar\to 0}{\sim} \frac{j_{i_0} n_{i_0} - k_{i_0} m_{i_0}}{\mu_{i_0}\hbar}(2\pi\nu\hbar)^s \prod_{i=1}^{n}(\mu_i\hbar)^{\max(j_i,k_i)} \tag{5.2.78}$$

Let us now define a strict total order $\prec$ on Γ by:

$$\begin{gathered}(j,k,s) \prec (j',k',s') \\ \Updownarrow \\ (\max(j_1,k_1),\ldots,\max(j_n,k_n),s) < (\max(j'_1,k'_1),\ldots,\max(j'_n,k'_n),s')\end{gathered} \tag{5.2.79}$$

where $<$ is the lexicographical order on $\mathbb{N}^{n+1}$. $\prec$ is asymmetric since for $i \in [\![1,n]\!]$, the sign of $m_i - n_i$ determines whether $\max(j_i,k_i)$ is equal to j_i or k_i. (5.2.77) and (5.2.78) give that:

$$(j,k,s) \prec (j',k',s') \Rightarrow g_{jks}\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\hbar, \nu\hbar\right) \underset{\hbar\to 0}{\ll} g_{j'k's'}\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\hbar, \nu\hbar\right) \tag{5.2.80}$$

and for any $(j,k,s) \in \Gamma$:

$$O\left((|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}}\right) + O\left(\hbar(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|}{2}-2}\right) \ll g_{jks}\left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\hbar, \nu\hbar\right)$$

Therefore, the Taylor expansion up to order $N-1$ of the functions f_{mnp} determines the coefficients $(\alpha_{0jksp})_{|j|+|k|+2s=N, j+m=k+n}$ by induction on $(\Gamma, <)$.

Let (m,n,p) run over all the possible values in $\mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z}$ while satisfying condition (5.2.69). We claim that one can determine every function α_{0jks} with $|j|+|k|+2s = N$ and $j \neq k$. Indeed, for any $(j,k,s) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ such that $|j|+|k|+2s = N$ and $j \neq k$, let us choose for any $i \in [\![1,n]\!]$:

$$n_i = \max(j_i - k_i, 0) \text{ and } m_i = \max(k_i - j_i, 0) \tag{5.2.81}$$

then $j+m = k+n$ and $(m,n) \neq (0,0)$ while for any $i \in [\![1,n]\!]$, $m_i = 0$ or $n_i = 0$. Finally,

$$|m|+|n| = \sum_{i=1}^{n} |j_i - k_i| \leq |j|+|k| \leq N$$

Let us remark that condition $j \neq k$ is always satisfied if N is odd and $|j| + |k| + 2s = N$. If N is even, the Taylor expansion up to order $\frac{N}{2}$ of the function f_q determines modulo known terms and $O\left((|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N+2}{2}}\right) + O\left(\hbar(|\mu\hbar|+|\nu\hbar|)^{\frac{N-2}{2}}\right)$:

$$\sum_{2|j|+2s=N} i\alpha_{0jjsq} 2\pi q(1+s)\left((\mu+1/2)\hbar\right)^j (\nu\hbar)^s \tag{5.2.82}$$

Let us choose $\mu_1(\hbar), \dots \mu_n(\hbar), \nu(\hbar)$ such that, as $\hbar$ tends to 0:

$$\nu^{\frac{N-2}{N}} \ll \mu_1 \ll \cdots \ll \mu_n \ll \nu \ll \hbar^{-\frac{1}{2}} \tag{5.2.83}$$

We have, for any (j, s, q) such that $2|j| + 2s = N$:

$$O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+2}{2}}\right) + O\left(\hbar(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N-2}{2}}\right) \ll ((\mu + 1/2)\,\hbar)^j\,(\nu\hbar)^s$$

Thus, every α_{0jjsq} is determined by induction on the set $\{2|j|+2s = N\}$ ordered by the lexicographical order. Hence, letting q run over $\mathbb{Z}^*$, we finally determined every α_{0jksd} with $|j|+|k|+2s = N$ and $d \neq 0$ if $j = k$, hence the principal symbol of W_N.

Let us now choose $1 \leq l_0 < \frac{N}{2}$ and assume that we already determined the functions α_{ljks} with $2l+|j|+|k|+2s = N$ and $l < l_0$. Let $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ be such that:

$$0 < |m| + |n| \leq N - 2l_0, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \;\; m_i n_i = 0 \tag{5.2.84}$$

The Taylor expansion of f_{mnp} up to order $N - 1 - l_0$ determines

$$\sum_{\substack{2l_0+|j|+|k|+2s=N\\ j+m=k+n}} i\alpha_{l_0jksp}\hbar^{l_0} g_{jks}\left(\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\hbar, \nu\hbar\right)$$

modulo known terms $O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}}\right) + O\left(\hbar^{l_0+1}(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N-2l_0+|m|+|n|}{2}-2}\right)$.

Let us choose $\mu_1(\hbar), \dots \mu_n(\hbar), \nu(\hbar)$ such that, as $\hbar$ tends to 0:

$$\nu^{\frac{N-l_0-2}{N-l_0-1}} \ll \mu_1 \ll \cdots \ll \mu_n \ll \nu \ll \hbar^{-\frac{1}{2l_0+3}} \tag{5.2.85}$$

Then for any (j, k, s) such that $2l_0 + |j| + |k| + 2s = N$ and $j + m = k + n$, we have: $O\left((|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}}\right) + O\left(\hbar^{l_0+1}(|\mu\hbar| + |\nu\hbar|)^{\frac{N-2l_0+|m|+|n|}{2}-2}\right) \ll \hbar^{l_0} g_{jks}\left(\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\hbar, \nu\hbar\right)$. Therefore, every α_{l_0jksp} with $2l_0 + |j| + |k| + 2s = N$ and $j + m = k + n$ is determined just like before. Letting (m, n, p) run over all the possible values in $\mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z}$ while satisfying (5.2.84), we determined every α_{l_0jksp} with $2l_0 + |j| + |k| + 2s = N - 1$ and $j \neq k$. The Taylor expansion of f_q up to order $\frac{N}{2}$ determines the remaining α_{l_0jjsq}, and finally, every function α_{l_0jks} where (j, k, s) satisfies $2l_0 + |j| + |k| + 2s = N - 1$, which concludes our proof by induction. □

Proof of Lemma 5.2.12. The principal symbol of $\frac{1}{i\hbar}[e^{i2\pi dt}\mathrm{Op}^W z^j \bar{z}^k D_t^s, O_{mnp}]$ is:

$$\begin{aligned}\sigma_{jkds}(z, t, \bar{z}, \tau) &= \left\{e^{i2\pi dt} z^j \bar{z}^k \tau^s, \mathcal{O}_{mnp}\right\}\\ &= \left\{e^{i2\pi dt} z^j \bar{z}^k \tau^s, e^{-i2\pi pt} z^m \bar{z}^n\right\}\\ &\quad + O\left((|z|^2 + \tau)^{\frac{|m|+|n|+N-1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{5.2.86}$$

Hence:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{jkds}(z,t,\bar z,\tau) =& -i\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}(e^{i2\pi dt}z^j\bar z^k\tau^s)\frac{\partial}{\partial \bar z_i}(e^{-i2\pi pt}z^m\bar z^n)\\
&+i\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \bar z_i}(e^{i2\pi dt}z^j\bar z^k\tau^s)\frac{\partial}{\partial z_i}(e^{-i2\pi pt}z^m\bar z^n)\\
&-\frac{\partial}{\partial \tau}(e^{i2\pi dt}z^j\bar z^k\tau^s)\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i2\pi pt}z^m\bar z^n)\\
&+O\left((|z|^2+\tau)^{\frac{|m|+|n|+N-1}{2}}\right)\\
=& -ie^{i2\pi(d-p)t}z^{j+m}\bar z^{k+n}\tau^s\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{j_in_i-k_im_i}{z_i\bar z_i}-\frac{2\pi ps}{\tau}\right)\\
&+O\left((|z|^2+\tau)^{\frac{|m|+|n|+N-1}{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.2.87}
$$

Let us remark that if $j+m=k+n$, then $j+m=k+n=\max(j,k)$. Let us also remark that if $j_in_i-k_im_i\neq 0$, then $j_i+m_i\neq 0$ and $k_i+n_i\neq 0$. Therefore, the last line in (5.2.87) can be reduced to a polynomial expression modulo $O\left((|z|^2+\tau)^{\frac{|m|+|n|+N-1}{2}}\right)$. $\frac{1}{\hbar}[e^{i2\pi dt}\mathrm{Op}^W z^j\bar z^kD_t^s, O_{mnp}]$ has the same principal symbol as the polynomial operator obtained when replacing each z_i by a_i, $\bar z_i$ by a_i^*, τ by D_t in this polynomial expression. Since the expansion in PO $\frac{1}{\hbar}[e^{i2\pi dt}\mathrm{Op}^W z^j\bar z^kD_t^s, O_{mnp}]$ starts at order $N+|m|+|n|-2$, we can hence conclude that the asymptotic expansions (5.2.70) and (5.2.71) are verified.

Now, the principal symbol of $\frac{1}{i\hbar}[e^{i2\pi dt}\mathrm{Op}^W z^j\bar z^kD_t^s, O_q]$ is, modulo $O\left((|z|^2+\tau)^{\frac{N+1}{2}}\right)$:

$$
\begin{aligned}
\tilde\sigma_{jkds}(z,t,\bar z,\tau) =& \left\{e^{i2\pi dt}z^j\bar z^k\tau^s,\mathcal{O}_q\right\}\\
=& \left\{e^{i2\pi dt}z^j\bar z^k\tau^s,e^{-i2\pi qt}\tau\right\}\\
=& \frac{\partial}{\partial t}(e^{i2\pi dt}z^j\bar z^k\tau^s)\frac{\partial}{\partial \tau}(e^{-i2\pi qt}\tau)\\
&-\frac{\partial}{\partial \tau}(e^{i2\pi dt}z^j\bar z^k\tau^s)\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i2\pi qt}\tau)\\
=& i2\pi(d+sq)e^{i2\pi(d-q)t}z^j\bar z^k\tau^s
\end{aligned}
\tag{5.2.88}
$$

Hence, (5.2.72) and (5.2.73) are verified just as before.

□

Theorem 5.2.1 is, as it has already been said, a direct consequence of Propositions 5.2.10 and 5.2.11.

5.2.4 “Bottom of a well”

In this subsection, we treat the “Bottom of a well” analogs of Theorem 5.1.4, namely Theorems 5.1.8 and 5.1.11. The proof of Theorem 5.1.8 is a line by line analog of the proof of Proposition 5.2.11: we omit it here. However, Theorem 5.1.11, that needs less assumptions in the particular case of a Schrödinger operator, deserves a proper proof.

Proof of Theorem 5.1.11. In a system of Fermi coordinates, the (principal and total) symbol of our Schrödinger operator can be written as:

$$H(x,\xi) = V(q_0) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + R(x), \quad R(x) = O(x^3) \tag{5.2.89}$$

Let $H_0(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2}$. Let us state the following lemma, which is a classical analog of Proposition 5.2.9 (we therefore omit its proof) and uses the hypothesis of rational independance of the θ_is.

Lemma 5.2.13. *Let $G \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ be an homogeneous polynomial of degree $k \geq 3$. There exists a unique couple of functions $G_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ such that*

$$\forall (x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n), \ \{H_0, F\}(x,\xi) = G(x,\xi) - G_1(p) \tag{5.2.90}$$

*and F is polynomial with no diagonal term when written as a function of $(z,\bar{z})$ (*i.e. *of the form $z^l \bar{z}^l$)*

Moreover:

1. *F is an homogeneous polynomial of degree k and is entierely determined by the extradiagonal termes of G,* i.e. *of the form $z^l \bar{z}^m$ $(l \neq m)$ with $z = (x+i\xi)/\sqrt{2}$*
2. *G_1 is an homogeneous polynomial of degree $\frac{k}{2}$ if k is even, zero otherwise. Moreover, $G_1(z\bar{z})$ is equal to the sum of the diagonal terms of G.*

Just like in the proof of Proposition 5.2.2, one shows recursively, using Lemma 5.2.13, the existence of a family of real numbers $(\alpha_{lm})_{l,m\in\mathbb{N}}$ such that if the functions $(F_N)_{N\geq 3}$ are defined for $N \geq 3$ by:

$$F_N(z,\bar{z}) = \sum_{|l|+|m|=N} \alpha_{lm} z^l \bar{z}^m \tag{5.2.91}$$

there exists homogeneous polynomials $H^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ of degree i satisfying, for $N \geq 3$:

$$H \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} H^i(p) + O((x,\xi)^{N+1}) \tag{5.2.92}$$

Here $p = p(x,\xi) = (\frac{x_i^2+\xi_i^2}{2})_{1\leq i\leq n}$, $F_{\leq N} = \sum_{k=1}^{N} F_k$ and $\chi_{F_{\leq N}}$ is the vector field:

$$\chi_{F_{\leq N}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{\leq N}}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial F_{\leq N}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i} \tag{5.2.93}$$

$\sum\limits_{i=1}^{+\infty} H^i$ (well defined modulo a flat function) is the classical Birkhoff normal form of H.

Let us also define for $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \geq 3$, $a_k = \frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}R}{\partial x^k}(0)$. We observe that, for $k \in \mathbb{N}^n$:

$$x^k = \left(\frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{2}^{|k|}} \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^n \\ l+m=k}} \prod_{j=1}^{n} \binom{k_j}{m_j} z^l \bar{z}^m \tag{5.2.94}$$

Let us define $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{N}^n, |k| \geq 3\} \setminus 2\mathbb{N}^n$. By lemma 5.2.13, there exists a unique homogeneous polynomial of degree $|k| \geq 3$ with no diagonal terms, such that:

$$\{H_0, I_k\}(x,\xi) = \begin{cases} x^k & \text{if } k \in \mathcal{K} \\ x^k - \frac{1}{\sqrt{2}^{|k|}} \prod\limits_{j=1}^{n} \binom{k_j}{k_j/2} |z|^k & \text{if } k \in 2\mathbb{N}^n \end{cases} \tag{5.2.95}$$

Functions $(F_N)_{N\geq 3}$ and $(H^i)_{i\geq 1}$ are constructed recursively as follows: let $N \geq 2$ and let us assume that we already constructed $F_3, \ldots, F_N$ ($F_2 = 0$), and $H_1, \ldots, H^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$ ($H_1(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i p_i$). Let us set:

$$G_{N+1}(x,\xi) = H \circ \exp \chi_{F_{\leq N}}(x,\xi) - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} H^i(p) + O(||(x,\xi)||^{N+1}) \tag{5.2.96}$$

and defined F_{N+1} and, if N is odd, $H^{\frac{N+1}{2}}$ by Lemma 5.2.13:

$$\{H_0, F_{N+1}\}(x,\xi) = \begin{cases} G_{N+1}(x,\xi) & \text{if } N \text{ is even} \\ G_{N+1}(x,\xi) - H^{\frac{N+1}{2}}(p) & \text{if } N \text{ is odd} \end{cases} \tag{5.2.97}$$

We remark that, in our case, $(x,\xi) \mapsto G_{N+1}(x,\xi) - \sum\limits_{|k|=N+1} a_k x^k$ is a sum of terms that depend only on $F_{\leq N}$, $(H^i)_{1\leq i \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$ and $(a_k)_{|k|\leq N}$. Therefore, we get by induction that the function(s):

$$F_{N+1} - \sum_{|k|=N+1} a_k I_k \ \text{ and when } N \text{ is odd, } H^{\frac{N+1}{2}}(p) - \sum_{|l|=\frac{N+1}{2}} \frac{a_{2l}}{2^{|l|}} \prod_{j=1}^{n} \binom{2l_j}{l_j} p^l \tag{5.2.98}$$

depend only on $(a_k)_{|k|\leq N}$.

Now, let us define, for $k \in \mathbb{N}^n$, $(l_k, m_k) \in \mathbb{N}^{2n}$ by their components : for $i \in [\![1,n]\!]$, $(l_k)_i = \lfloor \frac{k_i}{2} \rfloor$, $(m_k)_i = k_i - \lfloor \frac{k_i}{2} \rfloor$. $k \mapsto (l_k, m_k)$ is a bijective correspondence between $\mathcal{K}$ and the set Λ defined by:

$$\Lambda = \{(l,m) \in \mathbb{N}^{2n} \mid m - l \in \{0,1\}^n \setminus \{0\}, |l| + |m| \geq 3\} \tag{5.2.99}$$

Moreover, for $k \in \mathcal{K}$, I_k is entirely determined by (5.2.95) and is equal in $z, \bar{z}$ coordinates to:

$$I_k(z,\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}^{|k|}} \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^n \\ l+m=k}} \frac{\prod_{j=1}^{n} \binom{k_j}{m_j}}{\theta.(l-m)}\ z^l \bar{z}^m \tag{5.2.100}$$

Therefore, if $k \in \mathcal{K}$, $|k| = N+1$, we get by (5.2.98) that:

$$\alpha_{l_k m_k} - \frac{a_k}{\sqrt{2}^{|k|}} \frac{\prod_{j=1}^{n} \binom{k_j}{\lfloor k_j/2 \rfloor}}{\theta.(l_k - m_k)} \tag{5.2.101}$$

depends only on $(a_k)_{|k|\le N}$.

If now $k \in 2\mathbb{N}^n$, $|k| = N+1$, and if we write $H^{\frac{N+1}{2}}(p) = \sum_{|l|=\frac{N+1}{2}} b_l p^l$ we get by (5.2.98) that:

$$b_{k/2} - \frac{a_k}{\sqrt{2}^{|k|}} \prod_{j=1}^{n} \binom{k_j}{k_j/2} \tag{5.2.102}$$

depends only on $(a_k)_{|k|\le N}$.

Therefore we get by (5.2.101) and (5.2.102) that the family $(a_k)_{|k|=N+1}$ can be determined from the terms of order $N+1$ in the Taylor expansion of the classical Birkhoff normal form, the family $(\alpha_{l_k m_k})_{|k|=N+1}$ and the family $(a_k)_{|k|\le N}$.

So we just proved, by induction, that for any $N \ge 3$, $(a_k)_{|k|\le N}$ is determined by the Taylor expansion of the classical Birkhoff normal form up to order N and the family $(\alpha_{lm})_{(l,m)\in\Lambda, |l|+|m|\le N}$.

As shown in [GPU07, GU07], the Taylor expansion of the classical Birkhoff normal form is determined by the spectrum of $H(x,\hbar D_x)$ in $[V(q_0), V(q_0)+\epsilon]$, $\epsilon > 0$. In fact it is obvious that one can take ϵ in the $\hbar$-dependent form given in Theorem 5.1.11 (and Theorem 5.1.8) since the proof goes along the trace formula argument, and eigenvalues above this value of ϵ gives a $\hbar^\infty$ contribution to the trace formula.

Moreover we have for $N \ge 2$ and $m \in \{0,1\}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{m0} \circ \exp \chi_{F_{\le N+1}}(x,\xi) &= \mathcal{O}_{m0}(x,\xi) + \{F_{\le N+1}, \mathcal{O}_{m0}\}(x,\xi) + O((x,\xi)^{N+|m|}) \\
&= z^m - \sum_{\substack{(l,k)\in\Lambda \\ |l|+|k|=N+1 \\ k-l=m}} \alpha_{lk} |z|^{2l} \sum_{i=1}^{n} k_i m_i + \cdots + O((x,\xi)^{N+|m|})
\end{aligned}$$

where $\ldots$ stands for extradiagonal terms and terms which depends only on $(\alpha_{lk})_{(l,k)\in\Lambda,|l|+|m|\le N}$. Therefore, the diagonal matrix elements of an observable O_{m0} is equal, modulo terms depending only on $(\alpha_{lk})_{(l,k)\in\Lambda,|l|+|k|\le N}$, to

$$\sum_{\substack{(l,k)\in\Lambda \\ |l|+|k|\le N+1 \\ k-l=m}} \alpha_{lk} |\mu\hbar|^l \sum_{i=1}^{n} k_i m_i + O(\hbar) + O(|\mu\hbar|^{\frac{N+|m|}{2}}) \tag{5.2.103}$$

This shows, as in the proof of Theorem 5.2.1, that the α_{lm}, $(l,m) \in \Lambda$, are all determined, so the full Taylor expansion of R, hence of V, near q_0, is completely determined. □

5.3 Explicit construction of Fermi coordinates

In this section we prove Theorems 5.1.3, 5.1.7, and 5.1.10, using Lemmas A.1, A.2 and A.4 on linear and bilinear algebra. We start by the "bottom of a well", toy model for the periodic trajectory case.

5.3.1 General "Bottom of a well" case

Proof of Theorem 5.1.7. Let $(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ be a system of Darboux coordinates centered at z_0. $d^2H_p(z_0)$ is a positive bilinear form on $T_{z_0}(T^*\mathcal{M})$, therefore, by lemma A.1, there exists a local change of variable ϕ, symplectic and linear in the Darboux coordinates, such that:

$$H_p \circ \phi(x,\xi) = H_p(z_0) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} + O(||(x,\xi)||^3). \tag{5.3.1}$$

We will prove that the diagonal matrix elements of the family of pseudodifferential operators P^k in the system of eigenvectors corresponding to eigenvalues of $H(x,\hbar D_x)$ in $[H_p(z_0), H_p(z_0)+\epsilon(\hbar)]$ provides an explicit construction of such a symplectomorphism ϕ (which is not unique).

We first start with the case where the family $(\mathcal{P}^k)_{1\leq k\leq 2n^2+n}$ is realized by the example (5.1.12).

Let S be the matrix of $d\phi_{z_0}$ in the basis $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_n})$. We have for $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ and $s \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^s_{i,j} \circ \phi(x,\xi) &= \left(\sum_{k=1}^{n} S_{i^s,2k-1}x_k + S_{i^s,2k}\xi_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} S_{j^s,2k-1}x_k + S_{j^s,2k}\xi_k\right)\\
&= \sum_{k,k'=1}^{n} S_{i^s,2k-1}S_{j^s,2k'-1}x_kx_{k'} + \sum_{k,k'=1}^{n} S_{i^s,2k}S_{j^s,2k'-1}\xi_kx_{k'}\\
&\quad + \sum_{k,k'=1}^{n} S_{i^s,2k-1}S_{j^s,2k'}x_k\xi_{k'} + \sum_{k,k'=1}^{n} S_{i^s,2k}S_{j^s,2k}\xi_k\xi_{k'}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[S_{i^s,2k-1}S_{j^s,2k-1} + S_{i^s,2k}S_{j^s,2k}\right] z_k\bar{z}_k + R,
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

where, for $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i^s = \begin{cases} 2i-1 & \text{if } s \in \{1,2\} \\ 2i & \text{if } s=3 \end{cases}$ and $j^s = \begin{cases} 2j & \text{if } s \in \{1,3\} \\ 2j-1 & \text{if } s=2 \end{cases}$,

and R is a linear combination of terms of the form $z_kz_{k'}$ $((k,k') \in [\![1,n]\!])$ and $z_k\bar{z}_{k'}$ $((k,k') \in [\![1,n]\!],\ k \neq k')$.

Let A_ϕ be any Fourier integral operator implementing locally $d\phi_{z_0}$ and $|\mu\rangle$ defined by (5.2.7). The condition that $A_\phi^{-1}|\mu\rangle$ belongs to the spectral interval defined in Theorem 5.1.7 reads as $|\mu\hbar| \leq \epsilon$. We get from (5.3.2) that:

$$\langle\mu|A_\phi Q^s_{i,j} A_\phi^{-1}|\mu\rangle = \sum_{k=1}^{n} \left[S_{i^s,2k-1}S_{j^s,2k-1} + S_{i^s,2k}S_{j^s,2k}\right]\left(\mu_k + \frac{1}{2}\right)\hbar + O(\hbar) \quad (5.3.3)$$

the term $O(\hbar)$ coming form the subsymbols contribution (let us recall we are microlocalized in a bounded neighborhood of z_0). Therefore (5.3.3) for $|\mu\hbar| \leq \epsilon$ with the condition $\hbar = 0(\epsilon)$ determine the values of $S_{i,2k-1}S_{j,2k-1} + S_{i,2k}S_{j,2k}$ for $(i,j) \in [\![1,2n]\!]^2$ and $k \in [\![1,n]\!]$.

As claimed by Lemma A.2, the preceding quantities are independent of the choice of a symplectic matrix S satisfying (5.3.1). Since, as we already said, such a matrix S is not unique, it is not possible to determine S out of the preceeding matrix elements. However, by Lemma A.2, the family $(S_{i,2k-1}S_{j,2k-1} + S_{i,2k}S_{j,2k})_{(i,j)\in[\![1,2n]\!]^2, k\in[\![1,n]\!]}$ (determined by the preceding matrix elements) allows us to construct explicitly a suitable matrix S, hence a suitable symplectomorphism ϕ.

This ends the proof in the case where the family $(\mathcal{P}^k)_{1\leq k\leq 2n^2+n}$ is realized by the example (5.1.12). Let us now consider the general case. The family of Hessian matrices $(d^2\mathcal{P}^k(z_0))_{1\leq k\leq 2n^2+n}$, forms a basis of the space of $2n\times 2n$ symmetric matrices. Hence, each $d^2Q^s_{i,j}(z_0)$ for $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ and $s \in \{1,2,3\}$ is a linear combination of the matrices $d^2\mathcal{P}^k(z_0)$, $1 \leq k \leq 2n^2+n$. Since $\mathcal{P}^k(z_0) = \nabla\mathcal{P}^k(z_0) = 0$, there exists a family $(\lambda^k_{ijs})_{(i,j,s,k)\in[\![1,n]\!]^2\times\{1,2,3\}\times[\![1,2n^2+n]\!]}$ of complex numbers such that for any $(i,j,s) \in [\![1,n]\!]^2 \times \{1,2,3\}$:

$$\mathcal{Q}^s_{i,j}(x,\xi) = \sum_{m=1}^{2n^2+n} \lambda^k_{ijs}\mathcal{P}^k(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^3) \quad (5.3.4)$$

and therefore:

$$\langle\mu|A_\phi Q^s_{i,j}A_\phi^{-1}|\mu\rangle = \sum_{k=1}^{2n^2+n} \lambda^k_{ijs}\langle\mu|A_\phi P^k A_\phi^{-1}|\mu\rangle + O(\hbar) + O(|\mu\hbar|^2) \quad (5.3.5)$$

Hence, the family $(S_{i,2k-1}S_{j,2k-1} + S_{i,2k}S_{j,2k})_{(i,j)\in[\![1,2n]\!]^2,k\in[\![1,n]\!]}$ is determined just as before, and this ends the proof in the general case. □

5.3.2 The"Schrödinger case"

Proof of Theorem 5.1.10. Let $x \in \mathbb{R}^n$ be **any** system of local coordinates centered at $q_0 \in \mathcal{M}$, and $(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ the corresponding Darboux coordinates centered at $(q_0,0) \in T^*\mathcal{M}$. $d^2V(q_0)$ being a positive bilinear form on $T_{q_0}\mathcal{M}$, there exists, by Lemma A.4, a local change of variable u, linear and orthogonal in the Darboux coordinates, such that:

$$V \circ u(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2 + O(x^3) \quad (5.3.6)$$

where the θ_i^2s are the eigenvalues of $d^2V(q_0)$.

Let us denote by U the matrix of du_{q_0} written in the basis $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, and define a symplectomorphism ϕ locally by its expression in the Darboux coordinates: $\phi(x,\xi) = (Ux, U\xi)$.

If ϕ_0 is the symplectomorphism sending (x,ξ) to $(\frac{x_1}{\sqrt{\theta_1}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{\theta_n}}, \sqrt{\theta_1}\xi_1, \dots, \sqrt{\theta_i}\xi_n)$, and H is the (principal and total) symbol of the considered Schrödinger operator then:

$$H \circ \phi \circ \phi_0(x,\xi) = V(q_0) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} + O(x^3) \tag{5.3.7}$$

Just as in proof of Theorem 5.1.7, the diagonal matrix elements of the family of the pseudodifferential operators $(Q_{ij}^2)_{1\leq i,j\leq n}$ in the system of eigenvectors corresponding to eigenvalues of $H(x,\hbar D_x)$ in $[V(q_0), V(q_0)+\epsilon(\hbar)]$ determine the family $(U_{ik}U_{jk})_{1\leq i,j,k\leq n}$. An orthogonal matrix U such that (5.3.7) is verified is not unique, therefore it is not possible to determine the matrix U from the preceeding diagonal matrix elements. However, by Lemma A.4, the family $(U_{ik}U_{jk})_{1\leq i,j,k\leq n}$ does not depend on the suitable matrix U (*i.e.* orthogonal and satisfying (5.3.7)), and as we just saw it is determined by the preceeding matrix elements. Therefore, one can determine the absolute values of the coefficients of any suitable matrix U, and also, for any $k \in [\![1,n]\!]$, an index $i_k \in [\![1,n]\!]$, such that $U_{i_k k} \neq 0$. The choice of the sign of $U_{i_k k}$ then determines the sign of every other coefficient of the k-th column. Therefore, one can determine the 2^n suitable matrices, corresponding to n choices of signs, as claimed by Lemma A.4. Choosing one of them determines (explicitely) a suitable symplectomorphism ϕ.

□

5.3.3 The periodic trajectory case

Proof of Theorem 5.1.3. Let $X, H(x,\hbar D_x), E, \gamma$ be as in Theorem 5.1.3. We first recall [Gui96, GP10, Wei77, Zel97] that there exists a (non unique) symplectomorphism ϕ from a neighborhood of $\mathbb{S}^1$ in $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ in a neighborhood of γ in $T^*(X)$ such that

$$H_p \circ \phi(x,t,\xi,\tau) = H_0 + H_2 \text{ and } \gamma(t) = \phi(0,t,0,0). \tag{5.3.8}$$

with H_0 and H_2 as in is defined as in (5.2.3) and (5.2.2). Expressing ϕ in a system a local coordinates (x',ξ',t',τ') near γ such that $\gamma = \{x' = \xi' = \tau' = 0\}$, one can assume that:

$$\phi(x,t,\xi,\tau) = \phi_S(x,t,\xi,\tau) = (S(t)(x,\xi), t, \tau + q_S(t,x,\xi)) \tag{5.3.9}$$

Here, for any $t \in \mathbb{S}^1$, $S(t)$ is a linear symplectic change of variable (identified with its matrix in our system of coordinates), $q_S(t,\cdot,\cdot)$ is quadratic, $q_S(t,0,0) = 0$ and the differential form of q_S with respect to x,ξ is equal to :

$$dq_S = \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{L}_{i+n}(t).(x,\xi) L_i(t) - \dot{L}_i(t).(x,\xi) L_{i+n}(t) \right).(dx, d\xi) \tag{5.3.10}$$

where for $i \in [\![1,2n]\!]$ and $t \in \mathbb{S}^1$, $L_i(t)$ is the i-th line of the matrix $S(t)$, $\dot{L}$ the derivation with respect to t, and for two line vectors of size $2n$, $u.v$ is their canonical scalar product.

For $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p \in \mathbb{Z}$ and $s \in \{1,2,3\}$, let A_S be any Fourier integral operator implementing ϕ_S. We have

$$\langle \mu,\nu | A_S P_p^k A_S^{-1} | \mu,\nu\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_p\left(S^\sigma_{i^s,2k-1}S^\sigma_{j^s,2k-1} + S^\sigma_{i^s,2k}S^\sigma_{j^s,2k}\right)\left(\mu_k + \frac{1}{2}\right)\hbar + O(\hbar) \tag{5.3.11}$$

where $c_p(\cdot)$ maps a function to its p-th Fourier coefficient, σ is the permutation defined by (A.5), S^σ is defined by conjugation by the permutation matrix associated to σ just as in (A.6), and where, for $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$i^s = \begin{cases} 2i-1 & \text{if } s \in \{1,2\} \\ 2i & \text{if } s = 3 \end{cases}$, and $j^s = \begin{cases} 2j & \text{if } s \in \{1,3\} \\ 2j-1 & \text{if } s = 2 \end{cases}$.

Now, just as in the proof of Proposition 5.2.10, the coefficients $\left(a_1^l(P_p^k)\right)_{l\in\mathbb{Z}}$ determine $c_p\left(S^\sigma_{i^s,2k-1}S^\sigma_{j^s,2k-1} + S^\sigma_{i^s,2k}S^\sigma_{j^s,2k}\right)$ for any $k \in [\![1,n]\!]$. Therefore, if the coefficients $a_1^l(P_p^k)$ are given for any $l \in \mathbb{Z}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p \in \mathbb{Z}$ and $s \in \{1,2,3\}$, then the functions

$$A_{i,j,k} := S^\sigma_{i,2k-1}S^\sigma_{j,2k-1} + S^\sigma_{i,2k}S^\sigma_{j,2k} \tag{5.3.12}$$

are determined for any $(i,j) \in [\![1,2n]\!]^2$ and $k \in [\![1,n]\!]$.

An easy adaptation of the proof of Lemma A.2 shows that, once the set of functions $(A_{i,j,k})_{(i,j)\in[\![1,2n]\!]^2, k\in[\![1,n]\!]}$ is given, one can construct explicitely a particular smooth function $\mathbb{S}^1 \ni t \mapsto S_0(t)$ with values in the set of symplectic matrices, such that equality (5.3.12) holds. We also get that any matrix S^σ such that equality (5.3.12) holds is related to S_0 by the equality $S^\sigma = S_0^\sigma U$ where $t \mapsto U(t)$ is a smooth function that takes its values in the set of block diagonal matrices whose diagonal blocks are 2 by 2 rotations.

Now let us consider this particular S_0 and let U be any smooth function that takes his values in the set of block diagonal matrices whose diagonal blocks are 2 by 2 rotations. Let us finally define S by the relation $S^\sigma = S_0^\sigma U$. Since for any $t \in \mathbb{S}^1$, $q_S(t,\cdot,\cdot)$ is quadratic, we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p^0 \circ \phi_S(x,t,\xi,\tau) &= e^{-2i\pi pt}\tau + e^{-2i\pi pt} q_S(t,x,\xi) \\ &= e^{-2i\pi pt}\tau + e^{-2i\pi pt}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 q_S}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 q_S}{\partial \xi_k^2}\right)(t) z_k \bar{z}_k + R \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

where R is a linear combination of terms of the form $e^{-2i\pi pt} z_k z_{k'}$ ($(k,k') \in [\![1,n]\!]$) and $e^{-2i\pi pt} z_k \bar{z}_{k'}$ ($(k,k') \in [\![1,n]\!]$, $k \neq k'$).

Just as before, the coefficients $\left(a_1^l(P_p^0)\right)_{l,p\in\mathbb{Z}}$ determine the family of functions (of t only) $\left(\frac{\partial^2 q_S}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 q_S}{\partial \xi_k^2}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

Now, we get from equation (5.3.10) that, for $k \in [\![1, n]\!]$ and $t \in \mathbb{S}^1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q_S}{\partial x_k^2}(t) + \frac{\partial^2 q_S}{\partial \xi_k^2}(t) = &\sum_{i=1}^{n} \dot{S}_{i+n,k}(t) S_{i,k}(t) + \dot{S}_{i+n,k+n}(t) S_{i,k+n}(t) \\ &- \sum_{i=1}^{n} \dot{S}_{i,k}(t) S_{i+n,k}(t) + \dot{S}_{i,k+n}(t) S_{i+n,k+n}(t)\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

For $k \in [\![1, n]\!]$ and $t \in \mathbb{S}^1$, let us denote by $U_k(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_k(t) & -\sin\theta_k(t) \\ \sin\theta_k(t) & \cos\theta_k(t) \end{pmatrix}$ the k-th diagonal block of $U(t)$. Then, for $j \in [\![1, 2n]\!]$, $k \in [\![1, n]\!]$ and $t \in \mathbb{S}^1$:

$$\begin{pmatrix} S_{j,k}(t) \\ S_{j,k+n}(t) \end{pmatrix} = {}^tU_k(t) \begin{pmatrix} S_{0,j,k}(t) \\ S_{0,j,k+n}(t) \end{pmatrix} \tag{5.3.15}$$

Therefore:

$$\begin{pmatrix} \dot{S}_{j,k}(t) \\ \dot{S}_{j,k+n}(t) \end{pmatrix} = {}^tU_k(t) \begin{pmatrix} \dot{S}_{0,j,k}(t) \\ \dot{S}_{0,j,k+n}(t) \end{pmatrix} + {}^t\dot{U}_k(t) \begin{pmatrix} S_{0,j,k}(t) \\ S_{0,j,k+n}(t) \end{pmatrix} \tag{5.3.16}$$

Let us now observe that for $k \in [\![1, n]\!]$, and any $t \in \mathbb{S}^1$:

$$\dot{U}_k(t)\ {}^tU_k(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.17}$$

Therefore, since for any $k \in [\![1, n]\!]$ and $t \in \mathbb{S}^1$ $U_k(t)$ is an orthogonal matrix and $S_0(t)$ is a symplectic matrix, we get from equations (5.3.16) and (5.3.17):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q_S}{\partial x_k^2}(t) + \frac{\partial^2 q_S}{\partial \xi_k^2}(t) = &\frac{\partial^2 q_{S_0}}{\partial x_k^2}(t) + \frac{\partial^2 q_{S_0}}{\partial \xi_k^2}(t) \\ &+ 2\dot{\theta}_k(t)\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Since the function $t \mapsto \frac{\partial^2 q_S}{\partial x_k^2}(t) + \frac{\partial^2 q_S}{\partial \xi_k^2}(t)$ has been determined above, and the function $t \mapsto \frac{\partial^2 q_{S_0}}{\partial x_k^2}(t) + \frac{\partial^2 q_{S_0}}{\partial \xi_k^2}(t)$ is entirely determined by the explicitely contructed function $t \mapsto S_0$, equation (5.3.18) then determines the function $\dot{\theta}_k$. Therefore, the function $t \mapsto U(t)$, hence the function $t \mapsto S^\sigma(t)$, is determined up to right multiplication by a constant block diagonal matrix U_0 whose diagonal block matrices are 2 by 2 rotations. It is now sufficient to observe that if two functions $t \mapsto S_1(t)$ and $t \mapsto S_2(t)$ are related by the equation:

$$S_2^\sigma = S_1^\sigma U_0 \tag{5.3.19}$$

where U_0 is a constant matrix, then

$$\phi_{S_2} = \phi_{S_1} \circ \phi_{U_0^{\sigma}{}^{-1}} \tag{5.3.20}$$

and, if U_0 is a constant block diagonal matrix whose diagonal block matrices are 2 by 2 rotations:

$$H^0 \circ \phi_{U_0^{\sigma}{}^{-1}} = H_0 \tag{5.3.21}$$

Finally, the choice of U_0 in the determination of $t \mapsto S(t)$ does not change the validity of equation (5.3.8) for $\phi = \phi_S$, and Theorem 5.1.3 is proved. $\square$

5.4 Classical analogs

In this section we prove a classical result, analog to our preceeding quantum ones, and motivated by the following straightforward lemma.

Lemma 5.4.1. *Let O be a polynomial operator on $L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1)$ whose Weyl symbol, expressed in polar and cylindrical coordinates is the function $\mathcal{O}(A,\tau,\varphi,\tau)$. Then*

$$\langle \mu,\nu|O|\mu,\nu\rangle = \int_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{S}^1}\mathcal{O}(\mu\hbar,\nu\hbar,\varphi,t)d\varphi dt + O(\hbar). \tag{5.4.1}$$

where for any $j=1\dots n$, $x_j+i\xi_j=\sqrt{A_j}e^{i\varphi_j}$.

We concatenate analogs of Theorems 5.1.3 and 5.1.4 in the following

Theorem 5.4.2. *Let γ be a non-degenerate elliptic periodic trajectory of the Hamiltonian flow generated by a proper smooth Hamiltonian function H. Let $\mathcal{P}^k_p$ be functions satisfying in a local symplectic system of coordinates $(x,t,\xi,\tau)\in T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1)$ such that $\gamma=\{x=\xi=\tau=0\}$:*

$$\mathcal{P}^0_p(x,t,\xi,\tau)=e^{-2i\pi pt}\tau \quad \textit{and} \quad \mathcal{P}^k_p(x,t,\xi,\tau)=e^{-2i\pi pt}\mathcal{R}^k(x,\xi),\ k=1,\dots,2n^2+n \tag{5.4.2}$$

with the property that $\mathcal{R}^k(0)=\nabla\mathcal{R}^k(0)=0$ ***and the Hessians*** *$d^2\mathcal{R}^k(0)$* ***are linearly independent****.*

Let Φ be the formal (unknown a priori) symplectomorphism which leads to the Birkhoff normal form near γ and (A,τ,φ,t) the corresponding (formal and also unknown a priori) action-angle coordinates such that $\gamma=\{A=\tau=0\}$. Let us define near $A=\tau=0$ the following "average" quantities

$$\overline{\mathcal{P}^k_p}(A,\tau):=\int_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{S}^1}\mathcal{P}^k_p\circ\Phi(A,\tau,\varphi,t)d\varphi dt. \tag{5.4.3}$$

Then the knowledge of $\nabla\overline{\mathcal{P}^k_p}(0,0)$ for $k=1,\dots,2n^2+n$, determines (in a constructive way) an explicit system of Fermi coordinates near γ.

Moreover, let now $(x,t,\xi,\tau)\in T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^1)$ be ***any*** *system of Fermi coordinates near γ and let for $(m,n,p)\in\mathbb{N}^{2n}\times\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_{mnp}$, $\mathcal{O}_p$ be functions satisfying in a neighborhood of γ:*

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{mnp}(x,t,\xi,\tau) &= e^{-i2\pi pt}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j+i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{m_j}\left(\frac{x_j-i\xi_j}{\sqrt{2}}\right)^{n_j}+O\left((|A|+|\tau|)^{\frac{|m|+|n|+1}{2}}\right)\\ \mathcal{O}_p(x,t,\xi,\tau) &= e^{-i2\pi pt}\tau+O\left((|A|+|\tau|)^{\frac{3}{2}}\right)\end{cases} \tag{5.4.4}$$

Then the knowledge of the Birkhoff normal form near γ and of the Taylor expansion at $A=\tau=0$ up to order N of $\overline{\mathcal{O}}_{mnp}$, $\overline{\mathcal{O}}_q$, defined as in (5.4.3) for

1. $0<|m|+|n|\leq N$

2. $\forall j = 1 \dots n,\ m_j = 0$ ***or*** $n_j = 0$
3. $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$

determines the Taylor expansion of the "true" Hamiltonian H up to the same order in the picked-up system of Fermi coordinates.

Proof. Let us first prove the second part of Theorem 5.4.2. Let $(x, t, \xi, \tau) \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1)$ be a system of Fermi coordinates near γ. Let, for $N \geq 3$, F_N be the principal symbol of W_N. With the notations of Proposition 5.2.2 we write

$$F_N(z, t, \bar{z}, \tau) = \sum_{|j|+|k|+2s=N} \alpha_{0jks}(t) e^{2i\pi pt} z^j \bar{z}^k \tau^s \tag{5.4.5}$$

Let F satisfy

$$F \sim \sum_{N=3}^{+\infty} F_N \tag{5.4.6}$$

With the notations of the proof of Proposition 5.2.2, we have:

$$H \circ \exp(\chi_F)(x, t, \xi, \tau) \sim h(p, \tau, 0) \tag{5.4.7}$$

Let $N \geq 3$, $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ and $(j, k, s) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ satisfy:

$$0 < |m| + |n| \leq N, \quad m_i n_i = 0\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ |j| + |k| + 2s = N \tag{5.4.8}$$

Then, as it has been seen in the proof of Lemma 5.2.12, if σ^1_{jks} and σ^2_{jks} are the symbols of $\{\alpha_{0jks}(t)e^{2i\pi pt} z^j \bar{z}^k \tau^s, \mathcal{O}_{mnp}\}$ and $\{\alpha_{0jks}(t)e^{2i\pi pt} z^j \bar{z}^k \tau^s, \mathcal{O}_q\}$ respectively, we have, if $j + m = k + n$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1} \sigma^1_{jks}(A, \tau, \varphi, t) d\varphi dt =& i c_p(\alpha_{0jks}) A^{\max(j,k)} \tau^s \left(\sum_{i=1}^n \frac{k_i m_i - j_i n_i}{A_i} + \frac{2\pi ps}{\tau} \right) \\ &+ O\left((|A| + |\tau|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}} \right)\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

and if $j + m \neq k + n$,

$$\int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1} \sigma^1_{jks}(A, \tau, \varphi, t) d\varphi dt = O\left((|A| + |\tau|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}} \right) \tag{5.4.10}$$

We also have, if $j = k$:

$$\int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1} \sigma^2_{jks}(A, \tau, \varphi, t) d\varphi dt = i c_q(\alpha_{0jks}) 2\pi q (1 + s) A^j \tau^s + O\left((|A| + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \tag{5.4.11}$$

and if $j \neq k$:

$$\int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1} \sigma^2_{jks}(A, \tau, \varphi, t) d\varphi dt = O\left((|A| + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}} \right) \tag{5.4.12}$$

Now, let us set $F_2 = 0$ and assume that the function $F_{\leq N-1}$ has been determined for some $N \geq 3$. Then for $l \geq 2$, $\{\overbrace{F_{\leq N}, \{\dots, \{F_{\leq N}}^{l \text{ times}}, \mathcal{O}_{mnp}\}\}\}$ and $\{\overbrace{F_{\leq N}, \{\dots, \{F_{\leq N}}^{l \text{ times}}, \mathcal{O}_q\}\}\}$ are determined modulo $O\left((|A| + |\tau|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}} \right)$ and $O\left((|A| + |\tau|)^{\frac{N+1}{2}} \right)$ respectively.

Therefore, by (5.4.9) and (5.4.10), $\overline{\mathcal{O}}_{mnp}(A,\tau)$ is equal, modulo $O\left((|A|+|\tau|)^{\frac{N+|m|+|n|-1}{2}}\right)$ and known terms to:

$$\sum_{\substack{|j|+|k|+2s=N\\ j=m=k+n}} ic_p(\alpha_{0jks})A^{\max(j,k)}\tau^s\left(\sum_{i=1}^n \frac{k_im_i-j_in_i}{A_i}+\frac{2\pi ps}{\tau}\right) \tag{5.4.13}$$

and by (5.4.11) and (5.4.12), $\overline{\mathcal{O}}_q(A,\tau)$ is equal, modulo known terms and $O\left((|A|+|\tau|)^{\frac{N+1}{2}}\right)$ to:

$$\sum_{2|j|+2s=N} ic_q(\alpha_{0jjs})2\pi q(1+s)A^j\tau^s \tag{5.4.14}$$

Thus, just as in the proof of Proposition 5.2.11, let $(m,n,p,q)\in\mathbb{N}^{2n}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ run over all possible values under condition (5.4.8), we determine every function α_{0jks}, $|j|+|k|+2s=N$, hence F_N, which concludes the proof of the second part of Theorem 5.4.2.

The proof of the first part of the Theorem follows the same strategy with respect to Theorem 5.1.3 than the proof of the second part with respect to Proposition 5.2.11. □

The last result of this paper will be the classical analog of Theorems 5.1.8 and 5.1.11.

Let us remind, [GU07], that in the case where $H(x,\xi)=\xi^2+V(x)$ the classical normal form determines the Taylor expansion of the potential when the latter is invariant by the symmetry $x_i\to -x_i$ for each $i\in[\![1,n]\!]$. In the general case the Taylor expansion of the averages, in the sense of (5.4.3), of a finite number of classical observables are necessary to recover the full potential.

Let us assume $H\in\mathcal{C}^\infty(T^*\mathcal{M},\mathbb{R})$ has a global minimum at $z_0\in T^*\mathcal{M}$, and let $d^2H_p(z_0)$ be the Hessian of H at z_0. Let us define the matrix Ω defined by $d^2H_p(z_0)(\cdot,\cdot)=:\omega_{z_0}(\cdot,\Omega^{-1}\cdot)$ where $\omega_{z_0}(\cdot,\cdot)$ is the canonical symplectic form of $T^*\mathcal{M}$ at z_0. The eigenvalues of Ω being purely imaginary, we denote them by $\pm i\theta_j$ with $\theta_j>0,\ j\in[\![1,n]\!]$. Let us assume that $\theta_j, j\in[\![1,n]\!]$ are rationally independent.

Theorem 5.4.3. *The statement of Theorem 5.4.2 remains valid verbatim by replacing γ by z_0 and ignoring the variables t,τ.*

Let us now enunciate the classical analog of Theorem 5.1.11 in the case of a Schrödinger operator with potential $V\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M},\mathbb{R})$:

Theorem 5.4.4. *Let q_0 be a global non-degenerate minimum of V on $\mathcal{M}$. Let us assume that the square roots of the eigenvalues of $d^2V(q_0)$ are linearly independent over the rationals.*

Let $\mathcal{P}^k, k=1\dots\frac{n(n+1)}{2}$, be smooth functions on $\mathcal{M}$ such that $\mathcal{P}^k(q_0)=\nabla\mathcal{P}^k(q_0)=0$ ***and the Hessians $d^2\mathcal{P}^k(q_0)$ are linearly independent*** *(an example of such potentials is the family $\mathcal{Q}_{ij}(x)=x_ix_j$ in a local system of coordinates centered at q_0).*

Then the knowledge of the Birkhoff normal form near q_0 *and of the Taylor expansion at* $A = 0$ *up of the (finite number of) "average"* $\overline{\mathcal{P}^k}(A)$ *determines (in a constructive way) an explicit system of Fermi coordinates.*

Moreover, let $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ *be any system of Fermi coordinates centered at* $(q_0, 0)$ *and* $\mathcal{O}_{m0}$ *defined in Theorem 5.1.11.*

Then the knowledge of the Taylor expansion at $A = 0$ *up to order* $N \geq 3$ *of the (finite number) "average" quantities* $\overline{\mathcal{O}_{m0}}$ *as in* (5.4.3) *together with the Bikhoff normal form itself, determines the Taylor expansion up to order* N *of* V *at* q_0 *in the picked-up system of coordinates.*

In the line of the proof of Theorem 5.4.2 the proofs of Theorem 5.4.4 and 5.4.3 are easy adaptations of the proofs of Theorem 5.1.11 and 5.1.8. We omit them here.

A Lemmas on linear and bilinear algebra

Lemma A.1. *Let* q *be a positive quadratic form on* $\mathbb{R}^{2n}$*. Then there exists a canonical endomorphism* ϕ *on* $\mathbb{R}^{2n}$*, and a* n*-tuple of positive real numbers* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*, defined as the imaginary part of the eigenvalues of positive imaginary part of the endomorphism defined by:*

$$\langle \cdot ; a(\cdot) \rangle_q = \omega(\cdot, \cdot) \tag{A.1}$$

where $\langle \cdot ; \cdot \rangle_q$ *be the scalar product associated to* q *and* ω *the canonical symplectic form on* $\mathbb{R}^{2n}$*, and such that:*

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \; q(\phi(x, \xi)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i^2 + \xi_i^2) \tag{A.2}$$

Moreover, if the real numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *are pairwise different, and* ϕ' *is an endomorphism of* $\mathbb{R}^{2n}$*. Then* ϕ' *is canonical and satisfies* (A.2) *if and only there exists an orthogonal isomophism* u *on* $\mathbb{R}^{2n}$ *whose restriction to the plane spanned by* $(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_i})$ *(for any* $i \in [\![1, n]\!]$*) is a rotation, such that* $\phi' = \phi \circ u$*.*

Proof of Lemma A.1. a is antisymmetric with respect to q, and therefore there exists a q-orthonormal basis of $\mathbb{R}^{2n}$ $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ and a n-tuple of positive real numbers $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ such that, for $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\lambda_j a(u_j) = -v_j \text{ and } \lambda_j a(v_j) = u_j \tag{A.3}$$

Now let us set, for $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\tilde{u}_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \text{ and } \tilde{v}_j = \sqrt{\lambda_j} v_j \tag{A.4}$$

Then, $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ is a q-orthogonal basis of $\mathbb{R}^{2n}$ satisfying, for $j \in [\![1, n]\!]$, $q(\tilde{u}_j) = \lambda_j$ and $q(\tilde{v}_j) = \lambda_j$, and the preceeding properties together with (A.1) implies that it is also a symplectic basis, which concludes the proof of the first part of Lemma A.1.

To prove the second part of Lemma A.1, let us consider another symplectic and orthogonal basis $(u'_1, \dots, u'_n, v'_1, \dots, v'_n)$ where, for $j \in [\![1, n]\!]$, the q-norm of u'_j and v'_j is λ_j. Then, by (A.2), for any $j \in [\![1, n]\!]$, $a(u'_j)$ is orthogonal to any vector of the basis but v'_j and $\langle v'_j, a(u'_j)\rangle_q = w(v'_j, u'_j) = -1$, therefore $\lambda_j a(u'_j) = -v'_j$, and by the same argument, $\lambda_j a(v'_j) = u'_j$.

Therefore, the plane spanned by (u_j, v_j) and the plane by (u'_j, v'_j) are both the kernel of $a^2 + \lambda_j^2$ (2-dimensional since we made the additional assumption the λ_is are pairwise different). Therefore, if ϕ and ϕ' are the endomorphisms which send the canonical basis of $\mathbb{R}^{2n}$ to basis $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ and basis $(u'_1, \dots, u'_n, v'_1, \dots, v'_n)$ respectively, then the restriction of $\phi^{-1} \circ \phi'$ to any plane spanned by $(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_i})$ (for any $i \in [\![1, n]\!]$) is an orthogonal symplectomorphism from the plane to itself, that is a rotation. $\square$

Let σ be the permutation of $[\![1, 2n]\!]$ defined by:

$$\forall i \in [\![1, 2n]\!],\ \sigma(i) = \begin{cases} 2i - 1 & \text{si } i \leq n \\ 2(i - n) & \text{si } i \geq n + 1 \end{cases} \tag{A.5}$$

and M_σ be the associated permutation matrix (*i.e.* for any $(i, j) \in [\![1, 2n]\!]^2$, $(M_\sigma)_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$.

Now, let us set, for any matrix $S \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$:

$$S_\sigma = M_\sigma^{-1} S M_\sigma. \tag{A.6}$$

Let us also, for $(i, k) \in [\![1, 2n]\!] \times [\![1, n]\!]$, denote by $L_{S,i,k}$ the vector of $\mathbb{R}^2$ defined by $L_{S,i,k} = \begin{pmatrix} (S_\sigma)_{i,2k-1} \\ (S_\sigma)_{i,2k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Then, for $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathfrak{s}_{i,k}$ will be the matrix of size 2 whose first line is ${}^tL_{S,2i-1,k}$ and second line ${}^tL_{S,2i,k}$.

Lemma A.2. *Let A be a positive matrix of size $2n$. Let $\mathcal{S}$ be the (non-empty by lemma A.1) set of symplectic matrices satisfying*

$${}^tSAS = \left(\begin{array}{c|c} D_\lambda & 0 \\ \hline 0 & D_\lambda \end{array}\right) \tag{A.7}$$

where D_λ is the diagonal matrix with $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ as n-tuple of positive diagonal elements, which we assume pairwise different. Then:

1. *The family $(\langle L_{S,i,k}; L_{S,j,k}\rangle)_{i,j) \in [\![1,2n]\!]^2, k \in [\![1,n]\!]}$ is independent of matrix $S \in \mathcal{S}$.*
2. *Once the preceeding invariants of $\mathcal{S}$ given, one can construct explicitely a particular matrix of $\mathcal{S}$ (hence all of them by Lemma A.1).*

Proof of Lemma A.2. Let us first prove the first point. Let $(S,T) \in \mathcal{S}^2$. By Lemma A.1, there exist n matrices belonging to $SO_2(\mathbb{R})$ and denoted by $O_1, \dots, O_n$, such that:

$$T_\sigma = S_\sigma \begin{pmatrix} O_1 & & \\ & \ddots & \\ & & O_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_{1,1}O_1 & \cdots & \mathfrak{s}_{1,n}O_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{s}_{n,1}O_1 & \cdots & \mathfrak{s}_{n,n}O_n \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

and (A.8) is equivalent to:

$$\forall (i,k) \in [\![1,2n]\!] \times [\![1,n]\!], L_{T,i,k} = {}^tO_k L_{S,i,k} \tag{A.9}$$

Hence $(\langle L_{S,i,k}; L_{S,j,k}\rangle)_{i,j)\in[\![1,2n]\!]^2, k\in[\![1,n]\!]}$ does not depend on the matrix $S \in \mathcal{S}$ and the first point of Lemma A.2 is proven.

Now, let $S \in \mathcal{S}$, and let $(a_{ijk})_{(i,j)\in[\![1,2n]\!]^2,k\in[\![1,n]\!]}$ be the family defined by:

$$\forall (i,j) \in [\![1,2n]\!]^2,\ \forall k \in [\![1,n]\!], a_{ijk} = \langle L_{S,i,k}; L_{S,j,k}\rangle \tag{A.10}$$

Let us assume that this family is given. Two vectors u and v of $\mathbb{R}^2$ are independent if and only if: $\langle u;v\rangle^2 < \langle u;u\rangle\langle v;v\rangle$. Since matrix S is invertible, on can choose, for any $k \in [\![1,n]\!]$, a couple of indices $(i_k,j_k) \in [\![1,2n]\!]^2$ such that:

$$a_{i_kj_kk}^2 < a_{i_ki_kk}a_{j_kj_kk} \tag{A.11}$$

Let $k \in [\![1,n]\!]$ Let us choose a vector v_{i_kk}, whose norm is $\sqrt{a_{i_ki_kk}} > 0$. The following system of equations with unknown $v \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle v_{i_kk}; v\rangle & = a_{i_kj_kk} \\ \langle v; v\rangle & = a_{j_kj_kk} \end{array} \right. \tag{A.12}$$

admits exactly two solutions (by (A.11)), denoted by $v_{j_kk}^+$ et $v_{j_kk}^-$ obtained from one another by orthogonal symmetry R_k of axis the line spanned by v_{i_kk}.

Let us set $v_{i_kk}^- = v_{i_kk}^+ = v_{i_kk}$. Since the families $(v_{i_kk}^+, v_{j_kk}^+)$ et $(v_{i_kk}^-, v_{j_kk}^-)$ are two basis of $\mathbb{R}^2$, for any $i \in [\![1,2n]\!] \setminus \{i_k, j_k\}$, each one of the two systems:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle v_{i_kk}; v\rangle & = a_{i_kik} \\ \langle v_{j_kk}^+; v\rangle & = a_{j_kik} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \langle v_{i_kk}; v\rangle & = a_{i_kik} \\ \langle v_{j_kk}^-; v\rangle & = a_{j_kik} \end{array} \right. \tag{A.13}$$

admits exactly one solution denoted respectively by v_{ik}^+ and v_{ik}^-, and satisfying relation $v_{ik}^- = R_k v_{ik}^+$.

We are now able to construct 2^n matrices $(T_A)_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}$ defined, for $A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$, by:

$$\forall (i,k) \in [\![1,2n]\!] \times [\![1,n]\!], L_{T_A,i,k} = \left\{ \begin{array}{ll} v_{ik}^+ & \text{if } \ k \in A \\ v_{ik}^- & \text{if else} \end{array} \right. \tag{A.14}$$

In order to prove the second point of Lemma A.2, it is sufficient to prove the following assertions:

1. There exists at least one set $A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$, such that: $T_A \in \mathcal{S}$.
2. There is at most one set $A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$, such that T_A is symplectic.

Indeed, once those two assertions proved, there will be exactly one set $A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$ such that T_A is symplectic, and it will be an element of $\mathcal{S}$, constructed from the values of family $(a_{ijk})_{(i,j)\in[\![1,2n]\!]^2,k\in[\![1,n]\!]}$ only.

Let us prove the first assertion. Let, for any $k \in [\![1,n]\!]$, O_k be the unique element of $SO_2(\mathbb{R})$ such that: $L_{S,i_k,k} = O_k v_{i_k k}$ (where S is a particular matrix of $\mathcal{S}$).

The system (A.12) is equivalent to:

$$\begin{cases} \langle L_{S,i_k,k}; O_k v\rangle & = a_{i_k j_k k} \\ \langle O_k v; O_k v\rangle & = a_{j_k j_k k} \end{cases} \tag{A.15}$$

which admits exactly two solutions: $v^+_{j_k k}$ et $v^-_{j_k k}$. Hence, for any $k \in [\![1,n]\!]$:

$$L_{S,j_k,k} = O_k v^+_{j_k k} \text{ or } L_{S,j_k,k} = O_k v^-_{j_k k} \tag{A.16}$$

Let us define the set A by:

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid L_{S,j_k,k} = O_k v^+_{j_k k}\} \tag{A.17}$$

Since each system (A.13) admits a unique solution, we obtain:

$$\begin{aligned} \forall (i,k) \in [\![1,2n]\!] \times [\![1,n]\!], L_{S,i,k} &= \begin{cases} O_k v^+_{ik} & \text{if } k \in A \\ O_k v^-_{ik} & \text{if else} \end{cases} \\ &= O_k L_{T_A,i,k} \end{aligned} \tag{A.18}$$

that is:

$$T_{A,\sigma} = S_\sigma \begin{pmatrix} O_1 & & \\ & \ddots & \\ & & O_n \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

and $T_A \in \mathcal{S}$ by Lemma A.1.

In order to prove the second assertion, let us use the following lemma:

Lemma A.3. *For any symplectic matrix B of size $2n$, we have:*

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \ \sum_{i=1}^{n} \det(\mathfrak{b}_{i,k}) = 1 \tag{A.20}$$

If A_1 and A_2 are two parts of $[\![1,n]\!]$, we get from (A.14) and relation $v^-_{ik} = R_k v^+_{ik}$ that:

$$\forall (i,k) \in [\![1,2n]\!] \times [\![1,n]\!], L_{T_{A_2},i,k} = \begin{cases} R_k L_{T_{A_1},i,k} & \text{if } k \in A_1 \Delta A_2 \\ L_{T_{A_1},i,k} & \text{if else} \end{cases} \tag{A.21}$$

where $A_1 \Delta A_2$ is the symmetric difference of A_1 and A_2: $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$. Hence:

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} \det\left((\mathfrak{t}_{A_2})_{i,k}\right) = \epsilon_k \sum_{i=1}^{n} \det\left((\mathfrak{t}_{A_1})_{i,k}\right) \tag{A.22}$$

where, for $k \in [\![1,n]\!]$, $\epsilon_k = -1$ if $k \in A_1 \Delta A_2$, $\epsilon_k = 1$ if else. Since $A_1 \Delta A_2 = \emptyset$ if and only if $A_1 = A_2$, there exists at most one part A of $[\![1,n]\!]$ such T_A is symplectic. The second assertion, hence the second point of Lemma A.3, is proven. □

Proof of Lemma A.3. Since B is a symplectic matrix, matrix B_σ satisfies:

$$^{t}B_\sigma J_\sigma B_\sigma = J_\sigma \tag{A.23}$$

It is sufficient, for $k \in [\![1,n]\!]$, to read equality (A.23) at line $2k$ and column $2k-1$ to obtain:

$$\sum_{i=1}^{n} \det(\mathfrak{b}_{i,k}) = 1 \tag{A.24}$$

□

Lemma A.4. *Let $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ be a positive matrix whose eigenvalues are pairwise different. Let D a diagonal matrix, similar to A. Then there exists exactly 2^n orthogonal matrices conjugating A to D, and they are obtained one from another by a possible change of the sign of each column.*

Proof of Lemma A.4. As A is positive, there exists an orthogonal matrix Q_1 such that:

$$Q_1^{-1} A Q_1 = {}^{t}Q_1 A Q_1 = D \tag{A.25}$$

Let $Q_2 \in GL_n(\mathbb{R})$. Then Q_2 is orthogonal and satisfies: $Q_2^{-1} A Q_2 = D$ if and only if $Q_2^{-1} Q_1$ is an orthogonal matrix which commutes to D, that is, because the diagonal elements of D are pairwise different, if and only if $Q_2^{-1} Q_1$ is an orthogonal diagonal matrix. Finally, Q_2 is orthogonal and satisfies: $Q_2^{-1} A Q_2 = D$ if and only if $Q_2^{-1} Q_1$ is diagonal and its elements belong to $\{-1, 1\}$, that is if Q_2 is obtained from Q_1 by a possible change of the sign of each column. □

B Realizing the Poincaré angles

B.1 The periodic trajectory case

In this section we indicate how different systems of Fermi coordinates and different Birkhoff normal forms exist for any realization of the Poincaré angles as real numbers and we show how those normal forms are linked to each other. Thus, our results are independent of this ambiguity.

Proposition B.1. *Under the hypothesis of Theorem 5.1.4, the knowledge of the coefficients of the trace formula determines the quantities* $e^{i\theta_i}, i = 1 \dots n$. *Moreover, let us denote by* $\mathcal{B}_{\theta_1,\dots,\theta_n}(x,\xi,\tau) = E + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{x_i^2+\xi_i^2}{2} + \tau + O((x^2+\xi^2+|\tau|)^2)$ *the Birkhoff normal form of* H_p *associated to a given choice of angles* θ_i. *For* $k \in \mathbb{Z}^n$, *let* $h_k(x,\xi) = \sum \pi k_i(x_i^2+\xi_i^2)$ *and let* Φ_k *be the symplectomorphism defined, with the notation of* (5.2.93), *by*

$$\Phi_k(x,\xi,t,\tau) = \left(\exp(t\chi_{h_k})(x,\xi), t, \tau + \pi \sum k_i(x_i^2+\xi_i^2)\right) \tag{B.1}$$

Then $\mathcal{B}_{\theta_1,\dots,\theta_n} \circ \Phi_k = \mathcal{B}_{\theta_1+2k_1\pi,\dots,\theta_n+2k_n\pi}$

Proof. The first part of the assertion belongs to Fried [Fri88]. The fact that Φ_k is a symplectomorphism can be checked directly. Moreover one sees immediatly that it conjugates the quadratic in (x,ξ)/linear in τ part of $\mathcal{B}_{\theta_1,\dots,\theta_n}$ to the one of $\mathcal{B}_{\theta_1+2k_1\pi,\dots,\theta_n+2k_n\pi}$. Moreover $\mathcal{B}_{\theta_1,\dots,\theta_n} \circ \Phi_k$ is a function of τ and $x_i^2+\xi_i^2$ only and it is easy to verify that the algorithmic constructions of the two normal froms are covariantly conjugated by Φ_k. Therefore, it is equal to $\mathcal{B}_{\theta_1+2k_1\pi,\dots,\theta_n+2k_n\pi}$. □

B.2 The "bottom of the well" case

Proposition B.2. *Under the hypothesis of Theorems 5.1.8 and 5.1.11, the knowledge of the spectrum of* $H(x,\hbar D_x)$ *in* $[H_p(z_0), H_p(z_0)+\epsilon]$, $\hbar = o(\epsilon)$, *determines the* θ_i*s up to permutation.*

Proof. By the quantum normal Birkhoff form construction we know that the bottom part of the spectrum is $\{H_p(z_0) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\mu_i+1/2)\hbar + O(\hbar^2), |\mu\hbar| = O(\epsilon)\}$. Therefore, the bottom part of the spectrum determines the set $\Lambda = \{\sum_{i=1}^{n} \theta_i(\mu_i+1/2), \mu \in \mathbb{N}^n\}$. Let us now assume that the θ_is are arranged in increasing order. $\theta_1/2$ is then equal to the minimum of Λ. By induction, if $\theta_1,\dots,\theta_k$ are known for some k, $1 \le k < n$, let us define $\Lambda_k = \{\sum_{i=1}^{k} \theta_i(\mu_i+1/2)\}$. Let us set $\lambda_{k+1} := \min \Lambda \cap \Lambda_k^c$. We easily see that $\theta_{k+1} = 2\lambda_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \theta_i$, which concludes the proof. □

Bibliographie

[AD10] M. Audin et M. Damian : *Théorie de Morse et homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.

[AG91] S. Alinhac et P. Gérard : *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. EDP Sciences, 1991.

[Ali85] M.K. Ali : The quantum normal form and its equivalents. *J. Math. Phys.*, 26:2565–2572, 1985.

[AM78] A. Abraham et J.E. Marsden : *Foundations of Mechanics*. The Benjamin-Cummings publishing company, 1978.

[Arn63] V.I. Arnold : Proof of a theorem by A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russian Math. Surveys*, 18:9–36, 1963.

[Arn67] V.I. Arnold : Characteristic class entering in quantization conditions. *Funct. Anal. and its Appl.*, 1:1–14, 1967.

[Arn89] V.I. Arnold : *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate Text in Mathematics. Springer, 1989.

[BB70] R. Balian et C. Bloch : Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain I. *Ann. of Physics*, 60, 1970.

[BB71] R. Balian et C. Bloch : Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain II. *Ann. of Physics*, 64, 1971.

[BB72] R. Balian et C. Bloch : Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain III. *Ann. of Physics*, 69, 1972.

[BHJ26] M. Born, Heisenberg et P. Jordan : Zur Quantenmechanik II. *Zeitschrift für Physik*, 35:557–615, 1926.

[Bir27] G.D. Birkhoff : *Dynamical Systems*. AMS, 1927.

[BJ25] M. Born et P. Jordan : Zur quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 34:858–888, 1925.

[BPU95] R. Brummelhuis, T. Paul et A. Uribe : Spectral estimates around a critical level. *Duke Math. J.*, 78(3):477–530, 1995.

[CdV73] Y. Colin de Verdière : Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. *Compos. Math.*, 27:83–106, 1973.

[CdV93] Y. Colin de Verdière : *Méthodes semi-classiques et Théorie Spectrale*. "Cours en cours de rédaction", 1993.

[CdV11] Y. Colin de VERDIÈRE : A semiclassical inverse problem II : recovering the potential. *Proc. Duistermaat conf.*, 2011.

[CdVG11] Y. Colin de VERDIÈRE et V. GUILLEMIN : A semiclassical inverse problem I : Taylor expansions. *Proc. Duistermaat conf.*, 2011.

[Cha74] J. CHAZARAIN : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24:65–82, 1974.

[CRL90] S. C. CREAGH, J. M. ROBBINS et R. G. LITTLEJOHN : Geometrical properties of maslov indices in the semiclassical trace formula for the density of states. *Phys. Rev. A*, 42:1907–1922, Aug 1990.

[CRR99] M. COMBESCURE, J. RALSTON et D. ROBERT : A proof of the Gutzwiller semiclassical trace formula using coherent states decomposition. *Comm. in Math. Phys.*, 202:463–480, 1999.

[CV71] A.P. CALDERÓN et R. VAILLANCOURT : On the boundedness of pseudo-differential operators. *J. Math. Soc. Japan*, 23:374–378, 1971.

[DG75] J.J. DUISTERMAAT et V. GUILLEMIN : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29:39–79, 1975.

[dG07] M.A. de GOSSON : Explicit calculation of the Maslov-type index occurring in Gutzwiller's trace formula : The final word ? *Max Planck Institute for Mathematics preprint server : Preprint MPIM2007-151*, 2007.

[DS99] M. DIMASSI et J. SJÖSTRAND : *Spectral asymptotics in the semi-classical limit.* London Math Society Lectures Note Series 268, 1999.

[Eck86] B. ECKHARDT : Birkhoff-Gustavson normal form in classical and quantum mechanics. *J. Phys. A*, 19:2961–2972, 1986.

[Fol89] G. B. FOLLAND : *Harmonic Analysis in Phase Space.* Princeton University Press, 1989.

[Fri88] D. FRIED : Cyclic resultants of reciprocal polynomials. *Holomorphic Dynamics, Lectures Notes in Mathematics*, 1345:124–128,, 1988.

[GP10] V. GUILLEMIN et T. PAUL : Some remarks about semiclassical trace invariants and quantum normal forms. *Communication in Mathematical Physics*, 294:1–19, 2010.

[GPU07] V. GUILLEMIN, T. PAUL et A. URIBE : Bottom of the well semi-classical trace invariants. *Mathematical Research Letters*, 14:711–719, 2007.

[GU89] V. GUILLEMIN et A. URIBE : Circular symmetry and the trace formula. *Invent. Math.*, 96:385–423, 1989.

[GU07] V. GUILLEMIN et A. URIBE : Some inverse spectral results for semi-classical Schrödinger operators. *Math. Res. Lett.*, 14(4):623–632, 2007.

[Gui96] V. GUILLEMIN : Wave-trace invariants. *Duke Math. Journal*, 83:287–352, 1996.

[Gus66] F.G. GUSTAVSON : On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point. *Astronomical Journal*, 71, 1966.

[Gut71] M. Gutzwiller : Periodic orbits and classical quantization conditions. *J. Math. Phys.*, 12:343–358, 1971.

[GWW92] C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert : Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Inventiones mathematicae*, 110:1–22, 1992.

[Hei25] W. Heisenberg : Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33:879–893, 1925.

[HP12] C. Hériveaux et T. Paul : Recovering the Hamiltonian from spectral data. *hal-00673107*, 2012.

[Hör71] L. Hörmander : Fourier integral operators. *Acta Math.*, 127, 1971.

[Hör90] L. Hörmander : *The analysis of linear partial differential operators*, volume I-IV. Springer, 1983-90.

[ISZ02] A. Iantchenko, J. Sjöstrand et M. Zworski : Birkhoff normal forms in semi-classical inverse problems. *Math. Res. Lett.*, 9:337–362, 2002.

[Kac66] M. Kac : Can one hear the shape of a drum ? *Amer. Math. Monthly*, 73:1–23, 1966.

[Kel76] J.B. Keller : Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, 83:107–118, 1976.

[KF94] A.N. Kolmogorov et S.V. Fomine : *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1994.

[Kol54] A.N. Kolmogorov : On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 98:527–530, 1954.

[Kro84] L. Kronecker : *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen*. S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1884.

[Lab09] O. Lablée : Une vue panoramique sur l'analyse semi-classique. *arXiv :0906.4535*, 2009.

[Mar01] A. Martinez : *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Springer, 2001.

[Mei92] E. Meinrencken : Semiclassical principal symbols and Gutzwiller's trace formula. *Reports on Mathematical Physics*, 31:279–295, 1992.

[Mil64] J. Milnor : Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds, 51 : 542, 1964. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1964.

[Mos62] J. Moser : On invariant curves of area preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Gött., Math. Phys. Kl.*, pages 1–20, 1962.

[MZ05] J. Moser et E. J. Zehnder : *Notes on Dynamical Systems*. Courant lectures notes, No. 12. American Mathematical Society, Courant Institute of Mathematical Sciences, 2005.

[Pau97] T. Paul : Semiclassical methods with an emphasis on coherent states. *In Quasiclassical methods*. B. Simon et J. Rauch, eds., IMA Series, Springer Verlag, 1997.

[PU91] T. Paul et A. Uribe : Sur la formule semi-classique des traces. *C.R. Acad. Sci Paris*, 313(I):217–222, 1991.

[PU95] T. Paul et A. Uribe : The semi-classical trace formula and propagation of wave packets. *J.Funct. Analysis*, 132:192–249, 1995.

[Rob87] D. Robert : Autour de l'approximation semi-classique. *Birkhäuser*, 1987.

[RS75] M. Reed et B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 1975.

[Sch28] E. Schrödinger : *Collected Papers on Wave Mechanics*. Blackie and Son Limited, 1928.

[Sel56] A. Selberg : Harmonic analysis and discountinuous groups in weakly symmectric Riemannian spaces with applications to dirichlet series. *J. Indian Math. Soc.*, 20:47–87, 1956.

[Ser01] D. Serre : *Les matrices*. Dunod, Masson Sciences, 2001.

[Shu87] M.A. Shubin : *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

[Sjö92] J. Sjöstrand : Semi-excited states in nondegenerate potential wells. *Asymptotic Analysis*, 6:29–43, 1992.

[vN55] J. von Neumann : Mathematical foundation of quantum mechanics. *Princeton University Press*, 1955.

[VuN06] S. Vũ Ngọc : *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*. Société mathématique de France, 2006.

[Wei71] A. Weinstein : Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in Mathematics*, 6:329–346, 1971.

[Wei77] A. Weinstein : Lectures on symplectic manifolds. *AMS*, 1977.

[Wei81] A. Weinstein : Neighborhood classification of isotropic embeddings. *J. Differential Geom.*, 16, 1981.

[Zel97] S. Zelditch : Wave invariants at elliptic closed geodesics. *Geom. Funct. Anal.*, 7:145–213, 1997.

[Zel98] S. Zelditch : Wave invariants at non-degenerate closed geodesics. *Geom. Funct. Anal.*, 8:179–217, 1998.

[Zel00] S. Zelditch : Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plain domains. *Geom. And Func. Ana.*, 10:628–677, 2000.