ENS Cachan — **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation — **Année 2013/2014**

Topologie

Cyrille Hériveaux

Références

[B] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[BMP] V. Beck, J. Malick, and G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H-K, 2005.

[C] G. Choquet. *Cours de topologie.* Masson, 1992.

[CLF] A. Chambert-Loir and S. Fermigier. *Exercices de maths pour l'agrégation.* Masson, 1996.

[CM] M. Crouzeix and A.-L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson, 1982.

[F] A. Faisant. *TD et TP de topologie générale.* Hermann, 1988.

[G] X. Gourdon. *Les maths en tête, Analyse.* Ellipses, 1994.

[H] B. Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques.* Ellipses, 2007.

[HL] F. Hirsch and G. Lacombe. *Elements d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[Ro] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2003.

[Ru] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1975.

[ZQ] C. Zuily and H. Queffélec. *Elements d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.

Définition 1. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.
On dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une **base d'ouverts** si tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Définition 2. Soit E un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.
On dit que $\mathcal{T}_1$ est **moins fine** que $\mathcal{T}_2$ si tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ est ouvert pour $\mathcal{T}_2$, *i.e.* si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Exemple 1. Topologie **grossière** : $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$
Topologie **fine** : $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, associée à la **distance discrète** définie par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } & x \neq y \\ 0 \text{ si } & x = y \end{cases}$$

Théorème 1. ***(Construction de topologie)*** *Soit E un ensemble, et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de E contenant E et $\emptyset$. On suppose de plus* ***l'une des deux*** *conditions suivantes :*

1. *$\mathcal{B}$ est stable par intersection finie.*
2. *$\forall (B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subset B_1 \cap B_2$*

Alors, on peut définir une topologie $\mathcal{T}$ par :

$$\mathcal{T} = \{\omega \subset E, \forall x \in \omega, \exists B \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{B} \subset \omega\}$$

Les ouverts de cette topologie sont les unions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$.
Il s'agit de la topologie la moins fine contenant $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.

Exemple 2. La topologie d'un espace métrique a bien été construite comme ceci, en prenant pour $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules ouvertes, qui vérifie la condition 2. Les boules ouvertes forment donc une base d'ouverts.

Corollaire 1. *Soit E un ensemble et $\mathcal{G}$ un ensemble de parties de E contenant E et $\emptyset$.*
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{G}$.
Alors $\mathcal{B}$ vérifie la condition 1 du théorème 1, et on peut donc construire une topologie sur E comme précédemment.
On dit alors que $\mathcal{G}$ est une ***prébase*** *ou* ***système générateur*** *de cette topologie.*

Remarque 1. (Moyen mnémotechnique) "**IFO** (s'en souvenir)" est un moyen mnémotechnique permettant de se souvenir qu'une **I**ntersection **F**inie d'**O**uverts est un ouvert, et qu'une union quelconque (non nécessairement dénombrable) d'ouverts est encore un ouvert.

Définition 3. (Propriété de Borel-Lebesgue) Soit E un espace topologique.
On dit que $K \subset E$ est compact s'il est **séparé** et que pour tout recouvrement de K par des ouverts $(O_i)_{i \in I}$:

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exercice 1.1. (Vrai-Faux) Indiquer avec une brève justification si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux. E désigne un espace topologique.

1. Si E est $(\star)$, alors tout espace homéomorphe à E l'est aussi.
 a. métrisable
 b. compact
 c. connexe
 d. complet (on suppose dans ce cas que les espaces sont métriques).

2. Deux topologies engendrant les mêmes parties connexes sont égales.

3. Si une suite converge dans E, alors sa limite est unique.

4. Si $a \in E$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E, alors il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers a.

5. Si $a \in E$ est la limite d'une sous-suite de $(u_n)_n$, alors a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

6. $A \subset E$ est dense dans E si et seulement tout élément de E est limite d'une suite à valeurs dans A.

7. Si une suite admet une unique valeur d'adhérence l, alors cette suite converge vers l.

8. Un compact de E est nécessairement fermé.

On suppose dans toute la suite que E est un espace métrique.

9. Une boule ne peut être incluse dans une boule de rayon strictement plus petit.

10. Une boule ouverte est ouverte, et une boule fermée fermée.

11. L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée correspondante.

Exercice 1.2. (Topologie et matrices)[G, BMP]

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

2. Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré p. Montrer que les racines de P sont toutes dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\max\left(1, \sum_{0\leq i\leq p-1} |a_i|\right)$.

3. En déduire que l'ensemble des polynômes de degré p unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$?

5. Quel est l'intérieur des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que l'adhérence des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang p est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que A est nilpotente si et seulement si 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude (On pourra utiliser le lemme 3 ci-dessous).

b. Montrer que A est scalaire si et seulement sa classe de similitude est bornée (On pourra utiliser le fait que A est scalaire si et seulement (u, Au) est liée pour tout $u \in \mathbb{C}^n$).

c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée (on pourra remarquer que si A est diagonalisable, alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est "diagonalisable et a la même liste de valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité" si et seulement si B est semblable à A)

Remarque 2. Pour montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels et scindés sur $\mathbb{R}$ est fermé, on peut aussi montrer le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n. P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\mathcal{I}m(z)|^n \tag{1}$$

Lemme 3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire de diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(P_q)_{q\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que :*

$$P_q^{-1} M P_q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{2}$$

où $Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Exercice 1.3. [F, C] On considére $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$ muni de la topologie de la convergence simple.

1. Trouver un système générateur de cette topologie.

2. On appelle fonction simple toute fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ nulle en dehors d'un nombre fini de points.
Montrer que l'ensemble des fonctions simples est dense dans $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$.

3. Montrer qu'une fonction non nulle sur une infinité non dénombrable de points n'est pas limite de fonctions simples.

4. En déduire que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$ n'est pas métrisable.

Définition 4. Deux distances d_1 et d_2 d'un espace topologique E sont dites :

- **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie.
- **uniformément équivalentes** si l'identité de (E, d_1) dans (E, d_2) est uniformément continue et sa réciproque aussi.
- **Lipschitz-équivalentes** s'il existe des constantes strictement positives k et K telles que : $kd_1 \leq d_2 \leq Kd_1$

Remarque 3. Chaque propriété ci-dessus est strictement plus forte que la précédente.
En effet, si l'on munit $\mathbb{R}$ des distances :

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= |x-y| \\ d_2(x,y) &= |x^3 - y^3| \\ d_3(x,y) &= \min(1, d_1(x,y)) \end{aligned}$$

Alors on peut vérifier que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes mais pas uniformément équivalentes, et que d_1 et d_3 sont uniformément équivalentes mais pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 1.4. Sur $\mathbb{R}$, on note $d(x,y) = |x-y|$ la distance usuelle. Pour toute fonction injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on considère la distance $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Montrer que :

1. Les distances d et d_f sont topologiquement équivalentes si et seulement si f est une application continue.

2. Les distances sont uniformément équivalentes si et seulement si f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même uniformément continu et d'inverse uniformément continu.

3. Les suites de Cauchy pour d et d_f sont les mêmes si et seulement si f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
4. $\mathbb{R}$ muni de la distance d_f est complet si et seulement si $f(\mathbb{R})$ est fermé.
Exercice 1.5. (Cas d'un evn) Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

1. Montrer que :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \ \text{ (la topologie } \mathcal{T}_1 \text{ est moins fine que } \mathcal{T}_2\text{)} \\
&\Leftrightarrow \exists k > 0,\ \|\cdot\|_1 \leq k\|\cdot\|_2 \\
&\Leftrightarrow \exists k > 0,\ B_2(0,1) \subset B_1(0,k)
\end{aligned}$$

2. En déduire que les trois propriétés de la définition 4 sont équivalentes dans le cas d'un espace vectoriel normé.
Les deux normes sont simplement dites **équivalentes** si elles vérifient l'une des trois propriétés.

Autour du théorème de Baire

Exercice 1.6. (Théorème des fermés emboîtés) Soit (E,d) un espace métrique.
1. On suppose E complet. Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés bornés non vides, décroissante pour l'inclusion, et dont la suite des diamètres tend vers 0, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
2. Montrer la réciproque.

Remarque 4. Le théorème n'est pas vrai si l'on impose pas de condition sur la suite des diamètres (voir [H], Chap. 16)

Théorème 4. ***(Baire)*** *Soit X un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts de X denses dans X. Alors*

$$\Omega := \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$$

est dense dans X.
On dit que Ω est un $\mathcal{G}_\delta$ dense.

Corollaire 2. *Soit X un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fermés de X d'intérieur vide. Alors*

$$\Gamma := \cup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$$

est d'intérieur vide.

Définition 5. On dit que $A \subset X$ est **nulle-part dense** si l'intérieur de $\bar{A}$ est vide.
On dit que $A \subset X$ est **maigre** au sens de Baire ou **Baire-négligeable** si A est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides.
On dit qu'une propriété est vraie **Baire-presque partout** si elle est vraie en dehors d'un ensemble Baire-négligeable.

Corollaire 3. *Soit X un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fermés de X. Alors si*

$$\Gamma := \cup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$$

est d'intérieur non vide, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.

Définition 6. Plus généralement, on appelle **espace de Baire** tout espace topologique vérifiant la propriété de Baire.

Remarque 5. Tout ouvert d'un espace de Baire est encore un espace de Baire.

Remarque 6. Dans un espace de Baire, toute intersection dénombrable de $\mathcal{G}_\delta$ denses est encore un $\mathcal{G}_\delta$ dense.

Définition 7. Un espace **localement compact** est un espace topologique séparé admettant des voisinages compacts pour tous ses points.

Remarque 7. Tout espace localement compact est un espace de Baire.
$]0,1[$ muni de la distance usuelle est localement compact mais pas complet.
L'ensemble des applications continues bornées de $\mathbb{R}$ dans lui-même (muni de la norme sup) est complet mais pas localement compact.

Exercice 1.7. (Démonstration du théorème 4) Les deux corollaires 2 et 3 sont des conséquences immédiates du théorème 4.
Soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte quelconque.
Il faut et il suffit de montrer qu'on a : $B(x_0, r_0) \cap \Omega \neq \emptyset$.
1. Contruire une suite $(x_n, r_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $X \times \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_n \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

2. Conclure.

Remarque 8. Attention, la boule fermée $\bar{B}(x,r)$ contient toujours l'adhérence $\overline{B(x,r)}$ de la boule ouverte correspondante, mais l'inclusion peut être stricte (voir l'exercice 1.1).
En revanche, on a égalité dans un espace vectoriel normé.

Exercice 1.8. [G] Montrer qu'un evn admettant une base dénombrable (non finie) n'est pas complet.

Exercice 1.9. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces affines de $\mathbb{R}^m$ de dimension au plus $m-2$.
Montrer que $A = E \backslash \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \right)$ est un ensemble connexe par arcs.

Exercice 1.10. (Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense, [G])
1. Soient E et F deux espaces métriques.
On suppose E complet, et on considère une suite $(f_n)_n$ d'applications continues de E dans F, convergeant simplement vers f.

a. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E | \forall p \geq n,\, d(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E.

b. Montrer que

$$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon,\, \exists V \text{ voisinage de } x_0,\, \forall x \in V, \quad d(f(x_0), f(x)) \leq 3\varepsilon.$$

En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans E.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Remarque 9. Il existe aussi des fonctions partout dérivables à dérivée discontinue sur une partie dense (voir un exemple explicite construit comme la somme d'une série de fonctions dans [G], p. 233)

Exercice 1.11. (Les fonctions continues nulle part dérivables sont denses [G])
On pose $\mathcal{C} = C([0,1], \mathbb{R})$. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in \mathcal{C} | \, \forall x \in [0,1],\, \exists y \in [0,1],\, 0 < |y - x| < \varepsilon, \quad \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| > n \right\}.$$

1. Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert dense dans $\mathcal{C}$.

2. En déduire que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}$.

Remarque 10. Voir un exemple d'une telle fonction dans [ZQ], p. 261 (construit lui aussi comme somme d'une série de fonctions)

Remarque 11. Les fonctions du type $x \mapsto x^\alpha \sin(x^\beta)$ et $x \mapsto \delta \sin(Nx)$ permettent d'obtenir des amplitudes d'ordre de grandeur différent pour une fonction et sa dérivée.

Exercice 1.12. Un nombre réel x est dit de Liouville si, pour tout entier n, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ $(q \geq 2)$ tel que :

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Montrer que l'ensemble des nombre de Liouville est un $\mathcal{G}_\delta$ dense de mesure de Lebesgue nulle.

Définition 8. Un espace topologique est dit **séparable** s'il admet un sous-ensemble dénombrable et dense.

Remarque 12. Ne pas confondre avec un espace topologique **séparé**, dans lequel deux points distincts ont des voisinages disjoints.

Définition 9 (Espace polonais). Un espace topologique X est un **espace polonais** si sa topologie est séparable, métrisable et admet une distance compatible complète.

Définition 10. Soit X un espace topologique.
On dit que $x \in X$ est un **point isolé** si $\{x\}$ est ouvert dans X.
$A \subset X$ est dit **parfait** si A est une partie fermée sans points isolés.
On dit que $x \in X$ est un **point de condensation** si tout ouvert contenant x est non dénombrable, et on note X^* l'ensemble des points de condensation.

Théorème 5 (Cantor-Bendixon). *Soit X un espace polonais.*
Alors X s'écrit de maniére unique $X = P \cup D$, où P est parfait et D est ouvert dénombrable.

Exercice 1.13. (Démonstration) Soit X un espace polonais.

1. Montrer qu'un espace métrisable est séparable si et seulement s'il admet une base dénombrable d'ouverts.

2. Posons $P = X^*$ et $D = X \backslash P$.
  a. Montrer D est ouvert et dénombrable.
(Indication : on cherchera à définir D à partir d'une base dénombrable d'ouverts de X)
  b. Montrer que P est parfait.

3. On cherche à montrer l'unicité d'une telle décomposition. Soit $X =: P_1 \cup D_1$ une décomposition comme dans l'énoncé du théorème.
  a. Montrer que $D_1 \subset D$
  b. Montrer que si un espace polonais Y a un ouvert dénombrable U, alors U contient un point isolé.
(Indication : on pourra utiliser le théorème de Baire)
  c. En déduire que $P_1 \subset P$.
  d. Conclure.

Le théorème de Banach-Steinhaus

Définition 11. Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 1. *Soit L une application linéaire de E dans F. Alors $L \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si :*

$$\exists C > 0, \forall x \in E, \|L(x)\| \leq C\|x\|$$

Dans ce cas, la meilleure constante est notée :

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\|$$

Proposition 2. *$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.*
Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ aussi.

Exercice 1.14. Démontrer les propositions 1 et 2.

Théorème 6. ***(Banach-Steinhaus)*** *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que*

$$\forall x \in E,\ \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Proposition 3. ***(Version plus forte du théorème 6)*** *Avec les mêmes hypothèses que précédemment, si*

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} = +\infty.$$

Alors, il existe Ω un $\mathcal{G}_\delta$ dense tel que :

$$\forall x \in \Omega,\ \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = +\infty$$

Corollaire 4. *Soient E des espaces de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_n)_{n\in I}$ une suite d'opérateurs linéaires continus de E dans F tels que pour tout $x \in E$, $T_n(x)$ converge pour $n \to +\infty$ vers une limite notée $T(x)$. Alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Remarque 13. Le théorème est faux si E n'est pas un espace de Banach.
Soit E l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme sup.
Définissons, pour $n \in \mathbb{N}$, les opérateurs T_n de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall u \in E,\ T_n(u) = \sum_{p=0}^{n} u_p$$

Alors, on a :

$$\forall u \in E,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(u)\| < +\infty \text{ mais } \|T_n\| = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Exercice 1.15. (Démonstration du théorème 6)
1. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $A_n = \{x \in E, \forall i \in I, \|T_i(x)\| \leq n\}$.
Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\overset{\circ}{A}_{n_0} \neq \emptyset$
2. En déduire l'existence d'une boule ouverte $B(x_0, r)$, telle que :

$$\forall z \in B(x_0, r),\ \|T_i(z)\| \leq n_0$$

3. Conclure.
Exercice 1.16. Démontrer la proposition 3 à l'aide de la démonstration du théorème 6.

Proposition 4. *([Ru]) Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $C^0_{2\pi}$ telle que pour tout $f \in \Omega$, la série de Fourier de f diverge sur un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.17. (Démonstration) Pour $f \in C^0_{2\pi}$, on définit $c_n(f)$ et $S_n(f)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) := \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ S_nf(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt},$$

Puis, on définit pour $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda_n : C^0_{2\pi} \to \mathbb{C}$ par $\forall f \in C^0_{2\pi},\ \Lambda_n f := S_nf(0)$.
Enfin, on note $s^*(f,x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_nf(x)|$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Λ_n est une forme linéaire continue sur $C^0_{2\pi}$ de norme $\|D_n\|_1$ où D_n est la fonction de $C^0_{2\pi}$ définie par :

$$\forall t \in]0, 2\pi[,\ D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

2. Montrer que $\|D_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. a. En déduire qu'il existe Ω_0 un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $C^0_{2\pi}$, tel que : $\forall f \in \Omega_0,\ s^*(f,0) = +\infty$.
b. Généraliser cette propriété à tout $x \in \mathbb{R}$. On note Ω_x le $\mathcal{G}_\delta$ dense obtenu.

4. Soit X un ensemble dénombrable de réels. Montrer qu'il existe Ω_X un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $C^0_{2\pi}$ tel que :

$$\forall f \in \Omega_X, \forall x \in X,\ s^*(f,x) = +\infty$$

5. Montrer que si X est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $f \in \Omega_X$, $\{x \in \mathbb{R}, s^*(f,x) = +\infty\}$ est un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $\mathbb{R}$.

6. Conclure.

Remarque 14. On aurait pu s'arrêter à la question 4. pour montrer que tout ensemble dénombrable X dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $C^0_{2\pi}$ telle que la série de Fourier de chaque élément de ce $\mathcal{G}_\delta$ dense diverge sur X. L'intérêt de continuer réside dans la proposition 5 : un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Proposition 5. *([Ru]) Dans un espace métrique complet sans points, aucun ensemble dénombrable n'est un $\mathcal{G}_\delta$ dense.*

Exercice 1.18. (Démonstration de la proposition 5)
Soit $X = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un $\mathcal{G}_\delta$ dense et dénombrable.

1. Montrer que $O_n \backslash \{x_n\}$ est encore un ouvert dense.

2. Conclure.

Définition 12. Une mesure positive μ est dite σ-finie s'il existe une suite croissante (pour l'inclusion) de parties mesurables $(E_n)_n$ telle que :

- $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(E_n) < +\infty$

Exercice 1.19. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et q l'exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^q(\mathbb{N})$ la série $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_n \in l^p(\mathbb{N})$

2. Généraliser ce résultat dans $L^p(\mu)$ où μ est une mesure σ-finie et $1 \leq p < +\infty$: *i.e.* montrer que toute fonction réelle mesurable f telle que $fg \in L^1(\mu)$ pour tout $g \in L^q(\mu)$ est dans $L^p(\mu)$.

D'autres applications du théorème de Banach Steinhaus : (voir par exemple [CM])
- Non convergence de l'interpolation de Lagrange (Phénomène de Runge)
- Intégration numérique : Méthodes de Gauss, Théorème de Polya.

Les théorèmes de l'application ouverte et d'isomorphisme de Banach.

Définition 13. Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
On appelle isomorphisme de E dans F toute application linéaire continue bijective, et d'inverse continu, et on note $Isom(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

Proposition 6. *Soient E et F deux espaces de Banach.*
Alors $Isom(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$.

Exercice 1.20. (Démonstration de la proposition 6) Soit $L \in Isom(E,F)$ et $M \in \mathcal{L}(E,F)$. Il s'agit que L+M est bijectif d'inverse continu pour M de norme suffisamment petite.

1. se ramener au cas où $F = E$, et $L = Id_E$.

2. conclure.

Théorème 7. ***(Application ouverte)*** *Soient E, F des espaces de Banach, T un opérateur linéaire continu surjectif de E sur F. Alors il existe $c > 0$ tel que :*

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$$

Théorème 8. ***(Isomorphisme de Banach)*** *Soient E, F des espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu bijectif de E sur F. Alors $T \in Isom(E,F)$, i.e. T^{-1} est continu de F dans E.*

Remarque 15. On peut montrer (exercice) que le résultat du théorème 7 est équivalent à : l'image par L de tout ouvert de E est un ouvert de F. On dit qu'un telle application est **ouverte**, d'où le nom du théorème.

Remarque 16. Une application surjective continue (non linéaire) de $\mathbb{R}$ dans lui-même peut ne pas être ouverte : il suffit par exemple qu'elle soit constante sur un intervalle d'intérieur non vide.

Remarque 17. Si l'on ne fait pas d'hypothèse de complétude, le théorème est faux : en choisissant $E = F$ l'espace vectoriel normé des suites réelles nulles à partir d'un certain rang (muni de la norme sup), l'application linéaire continue qui à $(u_n)_n$ associe $(\frac{u_n}{n})_n$ est d'inverse non continu.

Exercice 1.21. (Démonstration du théorème 8) Montrer que le théorème 8 est une conséquence directe du théorème 7.

Exercice 1.22. (Démonstration du théorème 7)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = n\overline{T(B_E(0,1))}$.

a. Montrer qu'il existe $y_0 \in F$ et $c > 0$, tels que : $B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$

b. En déduire que $B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$

2. Soit $y \in B_F(0,c)$. Construire une suite $(z_n)_n \in E^{\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \|z_n\| < \frac{1}{2^n} \\ \|y - L(\sum_{k=1}^n z_k)\| < \frac{c}{2^n} \end{cases}$$

3. Conclure.

Exercice 1.23. Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, et complet pour ces deux normes.
On suppose de plus que :

$$\exists k > 0, \|\cdot\|_1 \leq k\|\cdot\|_2$$

Montrer que les deux normes sont équivalentes.

Proposition 7. ***([Ru])*** *L'application linéaire $\mathcal{F}: L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ définie par :*

$$\mathcal{F}(f) := (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est continue, injective, mais pas surjective.

Remarque 18. On peut construire explicitement une série trigonométrique convergente qui n'est pas une série de Fourier (voir par exemple les exercices de [ZQ]).

Exercice 1.24. (Démonstration de la proposition 7)

1. Supposons que $\mathcal{F}$ est surjective. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \geqslant \delta \|f\|_1$.

2. Obtenir une contradiction en considérant les fonctions D_n.

Théorème du point fixe

Théorème 9. ***(Point fixe de Banach, méthode itérative de Picard, [Ro])*** *Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante, i.e.*

$$\exists k \in [0, 1[, \forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$$

Alors f admet un unique point fixe $a \in E$ ($f(a) = a$).
De plus, pour tout x_0, la suite des itérés de x_0 par f, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ converge géométriquement vers a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Exercice 1.25. (Démonstration et nécessité des hypothèses du théorème 9)

1. Montrer le théorème 9 par la méthode itérative de Picard.

2. Trouver des contre-exemples dans les cas suivants (avec les mêmes notations que dans l'énoncé du théorème 9) :

a. $f : E \to E$ est contractante mais n'admet pas de point fixe parce que E n'est pas complet.

b. E métrique complet, mais $f : E \to E$ n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle verifie : $\forall (x, y) \in E^2,\ d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

c. E métrique complet, $f : E \to E$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.

3. Soit E un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (f composée p fois) est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe a dans E, et que, pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers a.

Remarque 19. Il existe de nombreux théorèmes de point fixe, avec des hypothèses plus fortes sur E (par exemple E compact) et plus faibles sur f ou encore une version avec paramètre (voir [Ro]).

Remarque 20. Ce théorème a de nombreuses applications (méthode de Newton, théorème des fonctions implicites, Cauchy-Lipschitz...). Voir le TD de calcul différentiel pour quelques-unes d'entre elles.

Compacité

Définition 14. (Propriété de Borel-Lebesgue) Soit E un espace topologique.
On dit que $K \subset E$ est compact s'il est **séparé** et que pour tout recouvrement de K par des ouverts $(O_i)_{i \in I}$:

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Définition 15. (Précompact) Un espace métrique (E, d) est dit précompact si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in E^n,\ E = \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, \epsilon)$$

Proposition 8. *Tout espace métrique précompact est séparable.*

Théorème 10. ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Soit (E, d) un espace métrique.*
Alors $K \subset E$ est compact si et seulement si de toute suite à valeurs dans K, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exercice 1.26. (Démonstration)

1. Supposons K compact et $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans K.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x_p, p \geq n\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ est non vide. En déduire l'implication $\Rightarrow$ (condition nécessaire).

2. Montrons la réciproque. On suppose que toute suite vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.
Soit $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ un recouvrement de K par des ouverts.

a. Montrer la propriété suivante :

$$\exists \epsilon > 0, \forall a \in K, \exists i \in I,\ B(a, \epsilon) \subset O_i$$

b. Montrer que K est précompact.

c. Conclure.

Cette démonstration nous invite à énoncer la propriété suivante :

Proposition 9. *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

Remarque 21. Munis de la distance usuelle :
$\mathbb{R}$ est complet mais ni compact, ni précompact.
$[0, 1[$ est précompact mais ni compact, ni complet.

Exercice 1.27. (Démonstration de la proposition 9) La condition nécessaire est facile.
Soit (E, d) un espace métrique précompact et complet, et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.

1. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite de Cauchy.

2. Conclure.

Exercice 1.28. (jauge, [Ro])

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $N : E \mapsto \mathbb{R}_+$ une application telle que :

1. $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,

3. la boule unité $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Montrer que N est une norme.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit K une partie de E. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) K est compact, convexe, symétrique par rapport à 0_E et 0_E est intérieur à K.

(ii) Il existe une norme N sur E pour laquelle K est la boule unité fermée : $K = \{x \in E | N(x) \leq 1\}$.

Exercice 1.29. (distance de Hausdorff)

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non vides de $\mathbb{C}$. Pour $F \in \mathcal{K}$ et $\epsilon > 0$, on note $V_\epsilon(F) = \{z \in \mathbb{C} | d(z, F) \leq \epsilon\}$ (ϵ-voisinage de F). Pour F et $G \in \mathcal{K}$, on pose :

$$\delta(F, G) = \min\{\epsilon \geq 0 | F \subset V_\epsilon(G) \text{ et } G \subset V_\epsilon(F)\}.$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathcal{K}$.

2. Soit (G_n) une suite d'éléments de $\mathcal{K}$, décroissante pour l'inclusion. Montrer qu'on a : $G_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \cap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ dans $(\mathcal{K}, \delta)$.

3. Montrer que $(\mathcal{K}, \delta)$ est un espace métrique complet.

(Indication : si $(F_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(\mathcal{K}, \delta)$, on pourra considérer la suite $(G_p)_p$ définie par $G_p = \overline{\bigcap_{n \geq p} F_n}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Remarque 22. Ne pas confondre la distance de Hausdorff, avec la distance entre deux parties de $\mathbb{C}$ définies par : $d(A_1, A_2) = \inf\{d(x, A_2), x \in A_1\}$. En effet :

$$d(\{0\}, \bar{B}(0,1)) = 0 \text{ mais } \delta(\{0\}, \bar{B}(0,1)) = 1$$

De plus, l'exemple précédent montre que d n'est pas une distance sur $\mathcal{K}$.

Définition 16. (Topologie produit) Soit $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques, et $E = \prod_{i \in I} E_i$.

On note, pour $i \in I$, $\pi_i : E \to E_i$ la projection sur E_i.

On appelle topologie produit la topologie engendrée par les $\pi_i^{-1}(\omega_i),\ i \in I,\ \omega_i \in \mathcal{T}_i$.

C'est la **topologie initiale** associée aux projections π_i, *i.e.* la topologie la moins fine les rendant continues. Une base de cette topologie est formée par les intersections finies de la prébase $(\pi_i^{-1}(\omega_i))_{i \in I, \omega_i \in \mathcal{T}_i}$: les rectangles ouverts, *i.e.* les ensembles de la forme :

$$\prod_{i \in J} \omega_i \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i \text{ avec } J \text{ partie finie de } I \text{ et } \forall i \in J,\ \omega_i \in \mathcal{T}_i$$

Proposition 10. *Avec les mêmes notations que dans la définition 16,*

- *si X un espace topologique, une application $f : X \to E$ est continue si et seulement si $\forall i \in I, \pi_i \circ f$ est continue (il suffit de remarquer que l'on peut utiliser la caractérisation de la continuité sur une prébase).*

- *Une suite* $(x^n) \in E^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $y \in E$ *au sens de la topologie produit si et seulement* $\forall i \in I,\ x_i^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_i$. *Lorsque tous les* E_i *sont égaux, les éléments de* E *sont les applications de* I *dans* E_0 *(d'où la notation* E_0^I*), et la topologie produit est la topologie de la convergence simple.*
- *La topologie produit sur* E *est séparée si et seulement chacune des topologie est séparée.*

Théorème 11. ***(Tychonoff)*** *Un produit d'espaces topologiques muni de la topologie produit est compact si et seulement si chacun des espaces du produit est compact.*

La démonstration de ce théorème utilise l'axiome du choix. On le montre ici dans le cas métrique et dénombrable :

Théorème 12. ***(Tychonoff dénombrable,[ZQ]))*** *Soit* $(E_n, d_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'espaces métriques et* E *leur produit muni de la topologie produit* $\mathcal{T}$. *Alors :*

1. *La topologie* $\mathcal{T}$ *est associée à une métrique d, définie par :*

$$\forall (x,y) \in E,\ d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n} d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

2. (E, d) *est complet si et seulement pour tout* $n \geq 1$, (E_n, d_n) *est complet.*
3. (E, d) *est compact si et seulement pour tout* $n \geq 1$, (E_n, d_n) *est compact.*

Exercice 1.30. (Démonstration du théorème 12)
1. Montrer que $\delta_n = \frac{d_n}{1+d_n}$ est une distance topologiquement équivalente à d_n, et que la topologie associée à d est bien la topologie produit.
2. Montrer 2.
3. Soit $(x^p)_p \in E^{\mathbb{N}}$.
a. Montrer que si pour tout $n \geq 1$, il existe une extractrice ϕ_n et $x_n \in E_n$, tels que $x_n^{\phi_n(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x_n$, alors il existe une extractrice ϕ telle que : $x^{\phi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
b. Conclure.

Remarque 23. Pour montrer qu'une distance induit une topologie, il ne suffit pas de montrer les deux topologies ont les mêmes suites convergentes. En revanche, c'est suffisant pour montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes (caractérisation des fermés par les suites).

Remarque 24. La technique utilisée dans la dernière question est l'**extraction diagonale**. On la retrouvera notamment dans la démonstration du théorème d'Ascoli.

Théorème 13. ***(Banach-Alaoglu)*** *Soit* E *un espace vectoriel réel ou complexe normé et* ***séparable****, et* E' *son dual topologique. Alors la boule unité de* E' *est métrisable et compacte pour la topologie faible-*$\star$.

Remarque 25. Ce théorème est une conséquence du théorème 12. La point 2. reste vrai sans l'hypothèse de séparabilité en utilisant le théorème 11. La séparabilité est en revanche nécéssaire au point 1. (voir les applications du théorème de Hahn-Banach).

Exercice 1.31. (Démonstration du théorème 13) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_n, d_n) = (B_{\mathbb{K}}(0,1), |\cdot|)$, et X le produit des X_n muni de la topologie produit. On le munit de la distance d définie dans le théorème 12.
Soit enfin $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans la boule unité fermée de E, dense dans celle-ci.

1. Montrer que l'application $j : \bar{B}_{E'} \to X$ définie par $\forall \phi \in \bar{B}_{E'},\ j(\phi) = (\phi(x_n))_{n\leq 1}$ est bien définie et injective.

2. Montrer que $j(\bar{B}_{E'})$ est fermé dans (X, d).

3. Montrer que la distance δ sur $\bar{B}_{E'}$ définie par : $\forall \varphi, \psi \in \bar{B}_{E'}, \delta(\varphi, \psi) = d(j(\varphi), j(\psi))$ induit bien la topologie de la convergence faible$-\star$ de $\bar{B}_{E'}$ (on trouvera au préalable une prébase de la topologie de la convergence faible-$\star$.

4. Conclure.

Proposition 11. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Remarque 26. En effet, on voit facilement que tout segment est précompact et complet, donc compact.
On pourrait déduire cette proposition du résultat suivante : **de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone** (pour le démontrer, si $(u_n)_n$ est la suite considérée, distinguer les cas $\{\sup_{k\geq n} u_k, n \in \mathbb{N}\}$ fini et infini)
Enfin, on pourrait aussi montrer que la liminf (resp. limsup) d'une suite bornée est sa plus petite (resp. plus grande) valeur d'adhérence.

Théorème 14. *Soit E un espace vectoriel normé réel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Exercice 1.32. (Démonstration du théorème 14)

1. Supposons E de dimension finie. Soit N une norme sur E. Montrons qu'elle est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$

- **a.** Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $N(\cdot) \leq k\|\cdot\|_\infty$.
- **b.** Montrer que la sphère unité pour $\|\cdot\|_\infty$ est compacte.
- **c.** Conclure.

2. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

3. On suppose maintenant que toutes les normes sur E sont équivalentes.

- **a.** Montrer qu'alors toutes les formes linéaires sont continues.
- **b.** Montrer qu'en dimension infinie, il existe toujours une forme linéaire non continue.
- **c.** Conclure.

Remarque 27. Ainsi, tout espace vectoriel normé réel de dimension n est égal à $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie produit à isomorphisme bicontinu près.

Définition 17. (Relativement compact) On dit qu'une partie A d'un espace topologique séparé est relativement compacte si son adhérence est compacte.

Théorème 15. ***(Théorème de Riesz)*** *Soit E un espace vectoriel normé réel. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) E est de dimension finie.

(ii) Toute partie bornée de E est relativement compacte.

(iii) E est localement compact.

(iv) La boule unité fermée de E est compacte.

Remarque 28. Cet énoncé s'applique aussi aux espaces vectoriels normés complexes puisqu'ils sont des espaces vectoriels normés réels par oubli de structure.
Cependant, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel normé de dimension infinie, mais sa boule unité fermée est compacte.
$\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel normé de dimension 1, mais sa boule unité fermée n'est pas compacte.

Lemme 16. ***(Lemme de Riesz, [B])*** *Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel fermé, et $\epsilon \in]0,1[$. Alors si $F \neq E$, il existe $u \in E$ tel que :*

$$\|u\| = 1 \text{ et } d(u, F) \geq 1 - \epsilon$$

Exercice 1.33. (Démonstration du théorème 15)

1. Montrer que (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes.

2. Démontrer le lemme 16.

3. Conclure.

Théorème d'Ascoli

Définition 18. (équicontinuité) Soient K un espace topologique, et F un espace métrique, et soit $\mathcal{A}$ une partie de $C^0(K, F)$. On dit que $\mathcal{A}$ est équicontinue en $a \in K$ si, en notant $\mathcal{T}_a$ l'ensemble des ouverts contenant a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \omega_a \in \mathcal{T}_a, \forall y \in K, \forall f \in \mathcal{A}, (y \in \omega_a \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

Définition 19. (équicontinuité uniforme) Avec les mêmes notations que dans la définition 18, en supposant de plus K métrique, on dit que $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in K^2, \forall f \in \mathcal{A}, (d_K(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

Remarque 29. Toute famille uniformément équicontinue est équicontinue en tout point de l'espace de départ.

Exemple 3.

- Toute famille finie d'applications continues au point $a \in K$ (resp. uniformément continues) est équicontinue au point $a \in K$ (resp. uniformément équicontinue).
- Toute famille d'applications $K-$lipschitziennes est uniformément équicontinue (et a fortiori équicontinue en tout point).
- La famille des translatés ($\tau_a f = f(\cdot - a)$) d'une fonction continue f est uniformément équicontinue.

Proposition 12. *Si K est métrique compact, une famille équicontinue en tout point de K est uniformément équicontinue.*

Remarque 30. Cette proposition rappelle bien évidemment le théorème de Heine. On laisse la démonstration en exercice.

Théorème 17. ***(Ascoli)*** *Soient K et F deux espaces métriques. On suppose K compact et F complet.*
Soit $\mathcal{A}$ une partie de $C^0(K,F)$. Alors $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $C^0(K,F)$ si et seulement si :

- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de K.*
- *pour tout $x \in K$, $\mathcal{A}_x := \{f(x); f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans F.*

Remarque 31. Il existe de très nombreuses versions du théorèmes d'Ascoli (voir par exemple [ZQ]) Nous en citons une plus forte ci-dessous.

Théorème 18. ***(Ascoli)*** *Soient K un espace topologique compact et F un espace métrique. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $C^0(K,F)$.*
Alors on a la même équivalence que précédemment.

Remarque 32. (Nécessité des hypothèses)

- $\mathcal{A}(x)$ relativement compact : $\mathcal{A} = (Id_{[0,1]}+n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ uniformément équicontinue, mais elle n'admet pas de sous suite uniformément convergente dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
- $\mathcal{A}$ équicontinue en tout point de K : $\mathcal{A} = (\sin(nx))_n$ est une famille de $C^0([0,1],[0,1])$, mais elle n'admet pas de sous suite uniformément convergente dans $C^0([0,1],[0,1])$.
- K compact : Soit $f \in C^0_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction continue à support compact non nulle : la suite $(\tau_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue et bornée dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais elle n'admet aucune sous-suite uniformément convergente dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 1.34. (Démonstration du théorème 17) On cherche à montrer dans un premier temps à vérifier la condition suffisante.

1. Montrer qu'il existe $D \subset K$ dénombrable et dense dans K.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe une extraction ψ telle que, pour tout $d \in D$, $(f_{\psi(n)}(d))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers une limite notée $f(d)$.

3. Montrer que f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue sur K, toujours notée f.

4. Montrer que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur K et conclure.

5. Montrer la réciproque.

Remarque 33. Une propriété remarquable utilisée dans cette démonstration est la suivante : toute application uniformément continue sur une partie dense de son ensemble de départ et à valeurs dans un espace complet est prolongeable par continuité (de manière unique, et la prolongement est uniformément continu).
Cette propriété n'a plus de sens si K n'est pas métrique, et de plus K n'est plus nécessairement séparable. Il va falloir adapter la démonstration pour prouver le théorème 18

Exercice 1.35. (Démonstration du théorème 18)

Ici aussi, on montre d'abord le sens direct.

1. Montrer l'existence d'une famille $(a_i^k)_{k\in\mathbb{N},i\in I(k)}$ d'éléments de K (où pour chaque k, $I(k)$ est un ensemble fini non vide), et de voisinages ouverts $(w_i^k)_{i,k}$ de ces éléments, tels que :

$$\forall k, \forall i \in I(k), \forall f \in \mathcal{A}, \forall y \in w_i^k, d(f(y), f(a_i^k) < \frac{1}{k+1} \text{ et } \forall k, K = \cup_{i\in I(k)} w_i^k$$

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$.

a. Reprendre la question 2 de la démonstration du théorème 17 avec pour D l'ensemble des éléments a_i^k.

b. Montrer que pour tout $x \in K$, $(f_{\psi(n)}(x))_n$ admet une unique valeur d'adhérence notée $f(x)$.

c. Montrer que f est continue et que la convergence est uniforme.

3. Montrer la réciproque.

Remarque 34. Noter que cette fois-ci, D n'est pas nécessairement dense.
On a utilisé la propriété remarque suivante : une suite à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 1.36. [HL]

Soient X, Y des compacts de $\mathbb{R}^n$ et $K \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$.
Pour $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, on définit $Tf : Y \to \mathbb{R}$ par :

$$Tf(y) := \int_X K(x,y)f(x)dx$$

Montrer que T envoie $C^0(X, \mathbb{R})$ dans $C^0(Y, \mathbb{R})$ et que T est un opérateur compact.

Exercice 1.37. On considère l'ensemble $E = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ muni de la métrique d définie par :

$$\forall f, g \in E, d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\min(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|)}{2^k}$$

1. Montrer qu'une suite $(f_n)_n$ à valeurs dans E converge vers $f \in E$ si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N},\ f_n^{(k)} \underset{n\to+\infty}{\to} f^{(k)}$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

2. En utilisant le théorème d'Ascoli, vérifier que les compacts de (E,d) sont exactement les ensembles fermés qui sont bornés dans le sens suivant : $F \subset E$ est borné si pour tout $\lambda > 0$ il existe $\beta > 0$ tel que $F \subset \beta B_d(0,\lambda)$.

3. Montrer que si la topologie sous-jacente à (E,d) était normable alors la boule unité fermée de E (pour cette norme) serait compacte. Conclure.

Exercice 1.38. Soit F un sev fermé de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la convergence uniforme. On suppose que tous les éléments de F sont dérivables sur $[0,1]$.

1. On fixe $y_0 \in [0,1]$. Pour $f \in F$ et $y \neq y_0$ dans $[0,1]$, on pose :

$$\Lambda_y(f) = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$$

A l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall f \in F,\ \sup_{y\neq y_0} |\Lambda_y(f)| \leq M\|f\|_\infty$$

2. En déduire que la boule unité de F est équicontinue en y_0.

3. Au moyen du théorème d'Ascoli, montrer que la boule unité fermée de F est compacte.

4. Que peut-on en conclure sur la dimension de F ?

Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème 19. ***(Stone-Weierstrass)*** *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C^0(K,\mathbb{R})$ où K est un espace métrique compact.*
On suppose que :
- *$\mathcal{A}$ sépare les points : $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y, \exists f \in \mathcal{A},\ f(x) \neq f(y)$.*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C^0(K,\mathbb{R})$.

Exemple 4. (applications)
- Les polynômes sont denses dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$.
- Une fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques (ceci ne prouve pas qu'une fonction continue est somme de sa série de Fourier, cf. proposition 4)
- Les fonctions à variables séparées de $C^0(K_1 \times K_2,\mathbb{R})$ (où K_1 et K_2 sont deux espaces métriques compacts, *i.e* l'espace vectoriel engendré par les fonctions produits de la formes $(x,y) \mapsto f_1(x)f_2(y)$ avec $f_i \in C^0(K_i,\mathbb{R})$ pour $i = 1,2$) sont denses dans $C^0(K_1 \times K_2,\mathbb{R})$.
- $C^0(K,\mathbb{R})$ est séparable si K est un espace métrique compact (considérer la $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par la fonction constante égale à 1 et les fonctions distances à chaque partie d'un ensemble dénombrable dense de K).

Exercice 1.39. (Démonstration du théorème 19)
1. On définit une suite $(P_n)_n$ de polynômes par :

$$P_0 = 0 \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = P_n(X) + \frac{1}{2}(X - P_n(X)^2).$$

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sqrt{\cdot}$ sur $[0,1]$. En déduire que pour tout $R > 0$, $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[-R, R]$.

2. Soit $(f, g) \in \mathcal{A}^2$. Montrer que $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont dans $\bar{\mathcal{A}}$.

3. Soient $a \neq b$ deux éléments de X. Soient α et β deux réels. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

4. Soit $f \in C^0(K, \mathbb{R})$. Soit $\epsilon > 0$.

a. Soit $x \in K$.

Montrer qu'il existe $g \in \bar{\mathcal{A}}$ telle que : $g(x) = f(x)$ et $\forall y \in K,\ g(y) \leq f(y) + \epsilon$.

b. Montrer qu'il existe $h \in \bar{\mathcal{A}}$ telle que $f - \epsilon \leq h \leq f + \epsilon$. Conclure.

Remarque 35. A la place de la première question, on aurait aussi pu démontrer que la fonction $\sqrt{1-\cdot}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ des sommes partielles de sa série de Taylor (il suffit de montrer que cette converge converge normalement, sa somme sera aussitôt $\sqrt{1-\cdot}$ par unicité de la limite simple).

Proposition 13. *Le théorème 19 reste vrai dans le cas complexe si l'on suppose de plus que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison.*

Proposition 14. *Toute limite uniforme de polynômes dans $C^0(\mathbb{R})$ est un polynôme.*

Remarque 36. En particulier, les polynômes ne sont pas denses dans $C^0(\mathbb{R})$. L'hypothèse de compacité sur K est nécessaire.

Théorème de Hahn-Banach

Définition 20. (semi-norme) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit qu'une application $p : E \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \text{ homogénéité)}$$
$$\forall (x, y) \in E^2, p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ (sous-additivité)}$$

Théorème 20. ***(Hahn-Banach réel analytique)*** *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p une semi-norme sur E, F un sous-espace vectoriel de E et enfin f une forme linéaire sur F vérifiant :*

$$\forall x \in F, |f(x)| \leq p(x)$$

Alors f admet un prolongement linéaire à E encore noté f et vérifiant :

$$\forall x \in E, |f(x)| \leq p(x)$$

Remarque 37. Le théorème est encore vrai **sans les valeurs absolues** si l'on suppose seulement que p est une **sous-norme** (i.e.**positivement** homogène et sous-additive)

Théorème 21. ***(Hahn-Banach réel géométrique)*** *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, A et B deux convexes disjoints, tels que :*

(i) (séparation large) A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.

(ii) (séparation stricte) A est compact et B fermé. Alors il existe $f \in E'$, telle que :

$$\inf_{a \in A} f(a) > \sup_{b \in B} f(b).$$

*Autrement dit, il existe un hyperplan affine qui sépare **strictement** A et B.*

Remarque 38. Un hyperplan vectoriel est fermé si et seulement il est le noyau d'une forme linéaire continue. Sinon, il est dense.
Un hyperplan affine d'équation $f = \alpha$ sépare strictement deux parties de E s'il existe $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ tels que l'une des parties est incluse dans le demi-espace fermé $\{f \leq \alpha_1\}$ et l'autre dans le demi-espace $\{f \geq \alpha_2\}$.

Remarque 39. Les théorèmes d'Hahn-Banach ont de nombreuses versions, et découlent du lemme de Zorn, voir [B].
En revanche, on va montrer en exercice que le théorème 21 se déduit sans trop de difficultés de la version mentionnée dans la remarque 37 du théorème 20.

Corollaire 5. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et $x \neq 0$ un élément de E.*

(i) Il existe une forme linéaire continue de norme 1 telle que $f(x) = \|x\|$.

(ii) $f \in E' \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ est forme linéaire continue de norme $\|x\|$ (et donc E s'injecte isométriquement dans E'').

(iii) E' sépare les points de E.

Corollaire 6. *Soit E un espace vectoriel normé réel, et F un sous-espace vectoriel.*

(i) Si $f \in F'$, alors f admet un prolongement $g \in E'$ tel que $\|g\| = \|f\|$.

(ii) $x \in \bar{F} \Leftrightarrow \big(\forall g \in E', g_{|F} = 0 \Rightarrow g(x) = 0\big)$

(iii) F est dense si et seulement si toute forme linéaire continue qui s'annule sur F est nulle.

Exercice 1.40. (Démonstration du théorème d'Hahn-Banach géométrique à partir de sa version analytique)

1. Supposons (i) montré (séparation large). Soient A et B deux convexes disjoints tels que A est compact et B fermé.

a. Montrer que $d = d(A, B) > 0$ et que $A + B(0, \frac{d}{3})$ et $B + B(0, \frac{d}{3})$ sont deux convexes ouverts disjoints.

b. En déduire (ii).

2. Montrons (i). Soit A et B deux convexes disjoints. On suppose A ouvert, et on choisit deux éléments x_0 et y_0 appartenant respectivement à A et B. On note $z_0 = y_0 - x_0$.

a. Montrer $C = z_0 + (A - B)$ est un convexe ouvert contenant 0.

b. Montrer que la jauge j du convexe C est une sous-norme (on n'oubliera pas de vérifier que j ne prend que des valeurs finies) et que : $\forall x \in E, (x \in C \Leftrightarrow j(x) < 1)$

c. Soit f la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}z_0$ par $f(z_0) = 1$. Montrer qu'on a : $f \leq j$ sur $\mathbb{R}z_0$.

d. Conclure à l'aide de la remarque 37 (on n'oubliera pas de vérifier que l'hyperplan de séparation est fermé. Grâce à la remarque 38, il suffit de vérifier qu'il n'est pas dense. Une autre méthode consiste à trouver une constante $C > 0$ telle que $j \leq C\| \cdot \|$).

Exercice 1.41. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrer qu'une suite faiblement convergente est bornée.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.

Remarque 40. Réciproquement, d'après le théorème de Banach-Alaoglu (théorème 13), toute suite bornée dans un espace de Banach réflexif (par exemple un espace de Hilbert) admet une sous-suite faiblement convergente.

Exercice 1.42. (Démonstration de la remarque 25)

Soit E un espace vectoriel normé réel. Supposons qu'il existe une distance d sur la boule unité de E' qui induise la topologie faible-$\star$, et montrons qu'alors E est séparable.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe F_n une partie finie de E et $\epsilon_n > 0$ tels que :

$$\{l \in \bar{B}_{E'}(0,1), \forall x \in F_n,\ |l(x)| < \epsilon_n\} \subset \{l \in \bar{B}_{E'}(0,1), d(0,l) < \frac{1}{n+1}\}$$

2. En déduire que l'espace vectoriel engendré par $\cup_n F_n$ est dense dans E

3. Conclure.

Remarque 41. En revanche, la topologie faible-$\star$ sur E' est métrisable si et seulement si E admet un base algébrique au plus dénombrable, ce qui est impossible pour un espace de Banach de dimension infinie (conséquence du théorème de Baire).

Théorème 22. ***(Lax-Milgram)*** *Soient H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire qui est :*

1. *continue sur H^2, i.e. $\exists C > 0, \forall (u,v) \in H^2, |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$*
2. *coercive sur H, i.e. $\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$*

Alors :

$$\forall \varphi \in H', \exists! u \in H, a(u,.) = \varphi$$

De plus, si a est symétrique, u est l'unique élément qui minimise la fonction $J :\ H \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall v \in H, J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)$

Lemme 23. *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ une application linéaire continue et coercive, i.e vérifiant : $\exists \alpha > 0, \forall v \in H,\ < A(v), v > \geq \alpha\|v\|^2$. Alors $A \in Isom(H)$*

Exercice 1.43. (Démonstration du théorème 22)

1. Montrer, avec les notations du lemme 23, que :

a. $A(H)$ est fermé.

b. $A(H)$ est dense.

Indication : on pourra utiliser le corollaire 6.

2. En déduire le lemme 23

3. Montrer, à l'aide du théorème de Fréchet-Riesz, qu'avec les notations du théorème 22, il existe un unique $A \in \mathcal{L}(H)$ et un unique $f \in H$ tels que :

$$\forall (u,v) \in H^2, a(u,v) =< A(u), v > \text{ et } \varphi(v) =< f, v > .$$

4. En déduire la première partie du théorème 22.

5. On suppose de plus que a est symétrique. Remarquer qu'alors on a, avec les notations du théorème 22, $\forall v \in H, J(u) - J(v) \leq 0$ avec égalité si et seulement $v = u$.

Remarque 42. Ce théorème a des applications en EDP. C'est notamment l'un des fondements de la méthode des éléments finis.

Remarque 43. On peut aussi montrer le théorème de Lax-Milgram à l'aide du théorème du point fixe en montrant que pour tout $f \in H$, l'application $T_f : u \in H \mapsto u - r(A(u) - f) \in H$ est contractante pour $r > 0$ suffisamment petit.

Exercice 1.44. (Caractérisation des convexes fermés) Montrer que tout convexe fermé d'un espace vectoriel normé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. En déduire qu'un convexe est fortement fermé si et seulement s'il est faiblement fermé.

Remarque 44. La topologie faible est moins fine que la topologie forte (égale en dimension finie, strictement moins fine en dimension infinie comme on le démontre dans l'exercice suivant). On a donc le résultat contre-intuitif suivant : un fermé pour la topologie faible est toujours fermé pour la norme. Être fermé pour la topologie faible est une condition plus forte qu'être fermé pour la topologie forte !

Exercice 1.45. (Topologie faible et topologie forte) Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Soit $x_0 \in E$. Donner un base de voisinages de x_0 pour la topologie faible.

2. On note S (resp. B) la sphère unité (resp. la boule unité fermé).

a. Montrer que l'adhérence de S pour la topologie faible est incluse dans B.

b. Soit $x \in B$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ un n-uplet de formes linéaires continues. Montrer qu'il existe $y \in S$, tel que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(x) = f_i(y)$. En déduire que x est dans l'adhérence de S.

c. Qu'a-t-on démontré ?

3. Que dire si E est de dimension finie ?

Un peu de théorie spectrale

Exercice 1.46. (Rayon spectral,[CLF])

Soit A une algèbre de Banach complexe unitaire, et A^* l'ensemble des éléments inversibles de A. Soit $x \in A$, on définit le spectre de x par :

$$\mathrm{Sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}, x - \lambda.1 \notin A^*\} \tag{1}$$

et son rayon spectral par :

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(x)\} \tag{2}$$

1. Soit $x \in A^*$, et $y \in A$. Montrer que si $\|x^{-1}\|\|y\| < 1$, alors $x - y$ est inversible. En déduire que A^* est ouvert.

2. Soit $x \in A$. Montrer que $\mathrm{Sp}(x)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$, incluse dans $B(0, \|x\|)$.

3. Soit $x \in A$. Montrer que l'*application résolvante* définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(x),\ R_x(\lambda) = (x - \lambda.1)^{-1} \tag{3}$$

est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(x)$.

4. Montrer que si $\mathrm{Sp}(x)$ est vide, alors R_x est bornée sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\mathrm{Sp}(x)$ est non vide.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$, tel que : $|\lambda| > \rho(x)$. Montrer qu'il existe $C > 0$, tel que : $\|x^n\| \leq C|\lambda|^n$

6. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in A$, $\mathrm{Sp}(x^n) = \{\lambda^n, \lambda \in \mathrm{Sp}(x)\}$. En déduire que $\rho(x) \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

7. En déduire la formule du rayon spectral :

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(x) \tag{4}$$

8. Soit H un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. Montrer que $\|u^2\| = \|u\|^2$ et en déduire que :

$$\rho(u) = \|u\| \tag{5}$$

Soit maintenant $v \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que :

$$\|v\| = \sqrt{\rho(u^*u)} \tag{6}$$

Remarque 45. Si E est un espace de Banach, $A = \mathcal{L}(E)$, et $u \in A$ alors $Sp(u)$ est bien le spectre de u au sens usuel, à ne pas confondre avec l'ensemble des valeurs propres, inclus dans le spectre.

Remarque 46. La théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach est essentiellement la même que celle des fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{C}$: l'idée étant de rendre le problème scalaire via des formes linéaires continues et de revenir au cas vectoriel à l'aide du théorème d'Hahn-Banach (ou plus précisément ses corollaires).

Définition 21. (**opérateur compact**) Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et T un opérateur de E dans F. On dit que T est compact si l'image de la boule unité de E par T est relativement compacte.

Exercice 1.47. (Alternative de Fredholm, [B]) Soient E un espace vectoriel normé et T un opérateur compact de E. Montrer que :

1. Ker$(Id - T)$ est de dimension finie.

2. Im$(Id - T)$ est fermé et Im$(Id - T)$ =Ker$(Id - T^*)^\perp$.
(On admettra dans un premier temps la conséquence du théorème de Hahn-Banach suivante : pour A un opérateur de E, $\overline{Im(A)} = Ker(A^*)^\perp$)

3. Ker$(Id - T) = \{0\} \Leftrightarrow$ Im$(Id - T) = E$.

4. dim Ker$(Id - T)$ =dim Ker$(Id - T^*)$.

Remarque 47. Le point 3. exprime le fait que les perturbations compactes de l'identité sont injectives si et seulement si elles sont surjectives. Propriété toujours vraie en dimension finie, elle est remarquable en dimension infinie.

Remarque 48. (Explication du nom du théorème) Ce théorème peut aussi s'exprimer ainsi :

- ou bien pour tout $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ admet une unique solution.
- ou bien l'équation homogène $u - Tu = 0$ possède $d = \dim\ker(Id - T)$ solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie d conditions d'orthogonalité correspondant à $f \in \ker(Id - T^*)^\perp$.

Exercice 1.48. (Opérateurs compacts et opérateurs de rang fini), [CLF]. Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant faiblement vers $x \in H$. Montrer que $(T(x_n))_n$ tend fortement vers $T(x)$.

2. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Déduire de la question précédent que la suite $(\lambda_n)_n$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \lambda_n = \sup\{\|T(x)\|, x \in \{e_1, \dots, e_n\}^\perp \text{ et } \|x\| = 1\} \tag{1}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. En déduire que T est limite d'opérateurs de rang fini.

4. Réciproquement, montrer que l'espace des opérateurs compacts est fermé, et en déduire qu'une limite d'opérateurs de rang fini est compacte.

Remarque 49. Un espace de Hilbert admet une base hilbertienne dénombrable si et seulement s'il est séparable.

Remarque 50. Attention, un opérateur compact n'est pas limite d'opérateurs de rang fini en général dans un espace vectoriel normé quelconque (par contre, les résultats de la première et la dernière question restent vrais si E est un espace de Banach)

Remarque 51. Par ailleurs, la réciproque du résultat de la question 1. est vraie dans un espace vectoriel normé réflexif comme conséquence du théorème de Banach-Alaoglu (voir par exemple [CLF]) et en particulier dans un espace de Hilbert.

Exercice 1.49. (Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints) Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint.

1. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(T)$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre réelle de T (on pourra utiliser l'alternative de Fredholm), que l'espace propre associé à λ est de dimension finie, que deux vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes sont nécessairement orthogonaux, et que et que λ n'est pas un point d'accumulation de $\mathrm{Sp}(T)$ (autrement dit, l'ensemble des éléments non nuls de $\mathrm{Sp}(T)$ est soit vide, soit fini, soit une suite qui tend vers 0).

3. Déduire de l'exercice sur le rayon spectral qu'il une base hilbertienne de vecteurs propres de T.

Remarque 52. Le résultat sur le spectre de T (à part le fait qu'il est nécessairement réel et que deux vecteurs propres sont orthogonaux) reste vrai même si T n'est pas auto-adjoint (et même si H est un espace vectoriel normé quelconque d'ailleurs), voir le poly de G. Carlier (pour le cas quelconque) et [CLF] (pour le cas Hilbert mais T supposé compact uniquement).