Polynômes de meilleure approximation

Cyrille Hériveaux

Références

[CLF] A. Chambert-Loir and S. Fermigier. *Exercices de maths pour l'agrégation.* Masson, 1996.

[CM1] M. Crouzeix and A.-L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson, 1982.

[CM2] M. Crouzeix and A.-L. Mignot. *Exercices d'analyse numérique des équations différentielles.* Masson, 1982.

[D] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[HL] F. Hirsch and G. Lacombe. *Elements d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[R] J.-E. Rombaldi. *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques.* EDP Sciences, 1999.

[SB] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis.* Springer Verlag, 1980.

Exercice 4.1. (Existence, unicité ?)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé tel que $\mathbb{C}_n[X] \subset E$.

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe $p_n \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\|f - p_n\| = \min\{\|f-p\|; p \in \mathbb{C}_n[X]\}$.
On dit que p_n est polynôme de meilleure approximation de f dans $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,2]$, $p(X) := \alpha X$ est pma dans $\mathbb{C}_1[X]$ pour $\|.\|_{L^\infty(]-1,1[,\mathbb{R})}$ de l'application sur définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

3. Montrer que, pour tout $\alpha \in [-1,1]$, $p(X) := \alpha$ est pma dans $\mathbb{C}_0[X]$ pour $\|.\|_{L^1((-1,1),\mathbb{R})}$ de f.

4. Justifiez l'unicité du pma lorsque E est un espace de Hilbert.

Proposition 1. ***(Rappel)*** *Soit* $]a,b[$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ *et* $w :]a,b[\to \mathbb{R}_+^*$ *une fonction continue telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n w(x) \in L^1(]a,b[,\mathbb{R})$. *L'espace vectoriel*

$$L_w^2 := \left\{ f :]a,b[\to \mathbb{C} \text{ mesurable} \; ; \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ *défini par :*

$$\forall (f,g) \in (L_w^2)^2, \; \langle f,g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)} w(x) dx,$$

est un espace de Hilbert.

Exercice 4.2. (Existence, unicité, récurrence, racines)

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, P_n est unitaire et P_n est orthogonal à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

2. Montrer que cette suite satisfait une relation de récurrence de la forme

$$P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} + \mu_n P_{n-2}.$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λ_n et μ_n sont des réels et à déterminer, et par convention $P_{-1} = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n est à coefficients réels, et que les racines de P_n sont réelles, simples et toutes dans $]a,b[$.

4. Le but de cette question est d'établir qu'entre deux racines de P_{n+1}, il y a exactement une racine de P_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n := \frac{P_n}{\|P_n\|_{L_w^2}}$ et γ_n le coefficient dominant de Q_n

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Q_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \left(X - \langle XQ_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \right) Q_{n-1}) + \frac{\gamma_n \gamma_{n-2}}{\gamma_{n-1}^2} Q_{n-2}.$$

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in [a,b]$ (formule de Darboux)

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i(x)Q_i(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)}{x-y}.$$

c. Que peut-on dire du signe de $Q'_{n+1}Q_n - Q'_n Q_{n+1}$?

d. Soient $x_{n,1} < ... < x_{n,n}$ les racines de Q_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et k compris entre 1 et n :

$$x_{n+1,k} < x_{n,k} < x_{n+1,k+1}$$

5. Soit $f \in L_w^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer le pma de f en fonction des $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1. Quelques exemples classiques :

1. Polynômes de Legendre : $]a,b[=]-1,1[$, $w \equiv 1$,
2. Polynômes de Chebyshev : $]a,b[=]-1,1[$, $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$,
3. Polynômes de Hermite : $]a,b[=\mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$,
4. Polynômes de Laguerre : $]a,b[=]0,+\infty[$, $w(x) = e^{-x}$.

Les polynômes orthogonaux classiques ont une **formule explicite** et sont des **solutions particulieres d'EDO** du 2nd ordre (voir par exemple [CM2])

Exercice 4.3. (Polynômes de Chebyshev)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction T_n sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) := \cos(n \arccos(x))$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynômiale et que la suite des polynômes associés vérifie :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

2. En déduire que $\left(P_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes orthogonaux pour $]a,b[=]-1,1[$ et $w : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Montrer que T_n est équi-oscillant entre $(n+1)$ points à déterminer (i.e. T_n vaut successivement plus ou moins le maximum de sa valeur absolue en ces points) . En déduire que

$$\|P_n\|_\infty = \min\{\|X^n + Q\|_\infty ; Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Indication : on pourra montrer que si P est un polynôme unitaire dont le maximum est strictement inférieur à $\frac{1}{2^{n-1}}$ alors $P - P_n$ admet au moins n racines.
4. Montrer que (série génératrice) :

$$\forall t \in]-1,1[, \forall x \in [-1,1], \sum_{n=0}^{+\infty} t^n T_n(x) = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$

Remarque 2. Le résultat de la question 3. permet de montrer que les points de Chebyshev (les racines de T_n) minimisent l'erreur dans l'interpolation de Lagrange, pour plus de détails voir par exemple [D], et également [CM1], [CM2] pour le phénomène de Runge en analyse numérique.
On peut d'ailleurs raffiner le résultat de la question 3. en montrant que P_n est l'unique polynôme qui réaliser ce minimum, en considérant, si P est un autre polynôme unitaire réalisant le minimum, l'interpolée de Lagrange L du polynôme $Q = P - P_n$ en les points x_k $(k = 0 \ldots n)$ en lesquels $|P_n|$ atteint son maximum :

$$L = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \prod_{j \neq k} (X - x_j)$$

où que les λ_k sont tous positifs (à déduire du fait que P réalise le minimum) et de somme nulle (à déduire du fait que $L = Q$ est de degré au plus $n-1$)

Exercice 4.4. (Bases Hilbertiennes ?)

1. Montrer que, si $-\infty < a < b < +\infty$ et si w est continue et strictement positive sur $[a,b]$ alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de L^2_w. (exemples : Legendre, Chebyshev)

2. Quand $]a,b[$ n'est pas borné, il peut arriver que $\mathbb{C}[X]$ ne soit pas dense dans L^2_w, donc $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forme pas une base hilbertienne de L^2_w :
Montrer que, pour $]a,b[=]0,+\infty[$ et $w(x) := x^{-\ln(x)}$ pour tout $x > 0$, la fonction définie par : $f(x) := \sin(2\pi\ln(x))$ pour tout $x > 0$ appartient à L^2_w et est orthogonale à $\mathbb{C}[X]$.

3. Le but de cette question est de monter que, s'il existe C, α deux réels strictement positifs tels que, pour tout $t \in]a,b[$, $w(t) \leqslant Ce^{-\alpha|t|}$, alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de L^2_w. (exemples : Laguerre, Hermite)

a. Soit $f \in L^2_w$ orthogonale à $\mathbb{C}[X]$. On prolonge f et w par zéro hors de $]a,b[$. Montrer que l'expression $F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t)e^{-zt}dt$ définit une fonction holomorphe sur

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C}; |\Re e(z)| < \alpha/2\}.$$

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = 0$. Conclure.

Remarque 3. Vous trouverez bien d'autres exemples des polynômes orthogonaux classiques dans les références ci-dessus (intégration numérique, fonctions de Hermite vecteurs de la transformée de Fourier, états propres de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique décrit par une équation de Schrödinger 1D etc...)