ENS Cachan | **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation | **Année 2013/2014**

Analyse de Fourier

Cyrille Hériveaux

Références

[CLF] A. Chambert-Loir and S. Fermigier. *Exercices de maths pour l'agrégation.* Masson, 1996.

[E] D. Euvrard. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique.* Masson, 1994.

[G] X. Gourdon. *Les maths en tête, Analyse.* Ellipses, 1994.

[K] Y. Katznelson. *Introduction to harmonic analysis.* John Wiley and sons, 1968.

[R] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1975.

[ZQ] C. Zuily and H. Queffélec. *Elements d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.

I Séries de Fourier

I.1 Premières définitions et propriétés

Définition-propriété 1. Soit $k \in \mathbb{N}$, et $p \in [1, +\infty]$.

1. $C^k_{2\pi}$ désigne l'ensemble des fonctions 2π-périodiques de $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. C'est un espace de Banach une fois muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_k$.
2. $C^\infty_{2\pi}$ désigne l'ensemble des fonctions 2π-périodiques de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Rappelons (cf. cours-TD de topologie) que sa topologie usuelle (convergence uniforme de toutes les dérivées) est métrisable, mais pas normable. C'est alors un espace métrique complet.
3. $L^p_{2\pi}$ désigne l'ensemble des fonctions 2π-périodiques de $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. C'est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cdot|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
4. $c_0(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $u_n \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est une algèbre de Banach munie de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$.
5. $\mathcal{P}$ désigne le sous-espace vectoriel de $C^0_{2\pi}$ engendré par les $e_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int} \in \mathbb{C}$. Un élément de $\mathcal{P}$ est une combinaison linéaire finie des e_n, et s'appelle un polynôme trigonométrique.

Définition 1. Soit $f \in L^1_{2\pi}$, et $n \in \mathbb{Z}$. On définit le n-ième coefficient de Fourier de f par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Proposition 1. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, et $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$.*

1. $c_n(f(-\cdot)) = c_{-n}(f)$
2. $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
3. $c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$ *où* $\tau_a f = f(\cdot + a)$
4. $c_n(fe_k) = c_{n-k}(f)$
5. $c_n(e_k) = \delta_{k,n}$
6. $f \star e_n = c_n(f)e_n$
7. *Si* $f \in C^k_{2\pi} \cap C^{k+1}_{pm}$, *alors* $f^{k+1} \in L^1_{2\pi}$ *et* $c_n(f^{(k+1)}) = (in)^{k+1}c_n(f)$

Exercice 2.1. (Démonstration de la proposition 1)

Proposition 2. ***(Lemme de Riemann-Lebesgue)*** *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f \in L^1([a,b])$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 2.2. (Démonstration de la proposition 2) Démontrer la proposition 2 sur une partie dense bien choisie de $L^1_{2\pi}$ puis conclure.

Corollaire 1. *Si $f \in L^1_{2\pi}$, alors $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*

Définition-propriété 2. (Produit de convolution) Soit $(f,g) \in (L^1_{2\pi})^2$. On définit presque partout le produit de convolution $f \star g$ de f et g par :

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

De plus, $f \star g \in L^1_{2\pi}$

Proposition 3.

1. $(L^1_{2\pi}, +, \star, \|\cdot\|_1)$ *est une algèbre de Banach commutative (non unitaire).*
   En particulier, si $f, g \in L^1_{2\pi}$, on a $f \star g = g \star f$, $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$ et il n'existe pas de fonction $g \in L^1_{2\pi}$ telle que : $\forall f \in L^1_{2\pi},\ f \star g = f$
2. $\gamma : f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ *est un morphisme d'algèbre de $L^1_{2\pi}$ dans $c_0(\mathbb{Z})$.*
   En particulier, si $f, g \in L^1_{2\pi}$, $c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$

Remarque 1. On verra par la suite que γ est injectif mais pas surjectif.

Exercice 2.3. Démontrer la définition-propriété 3 et la propriété 3 à l'aide du théorème de Fubini.

I.2 Quelques outils

Théorème 1. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soit $(p,q) \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (on dit que p et q sont conjugués). Soit $f \in L^p_{2\pi}$ et $g \in L^q_{2\pi}$. Alors $fg \in L^1_{2\pi}$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Remarque 2. En particulier si $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ est tel que $q \leq p$, alors $L^p_{2\pi} \subset L^q_{2\pi}$ et $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ (l'injection est continue).

Proposition 4. *Soit $k \in \mathbb{N}$, et $1 \leq p < +\infty$. Soit E l'espace vectoriel normé $C^k_{2\pi}$ ou $L^p_{2\pi}$. Alors $E \subset L^1_{2\pi}$ (en tant qu'evn, i.e. l'injection est continue). En particulier, si $f \in E$, ces coefficients et la convolution sont bien définis !*

Remarque 3. Ces problèmes de définition se compliqueront la deuxième partie sur la transformée de Fourier !

Remarque 4. Attention aux injections continues ci-dessus : $C^1_{2\pi}$ (muni de sa topologie usuelle) et son image par injection canonique dans $C^0_{2\pi}$ sont deux espaces topologiques non homéomorphes ! C'est la source de nombreuses confusions (voir par exemple la remarque **??**)

Proposition 5. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $g \in C^k_{2\pi}$, alors $f \star g \in C^k_{2\pi}$. De plus, on a $(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}$*

Remarque 5. Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in \mathcal{P}$. Alors $f \star g \in \mathcal{P}$

Définition 2. (Approximation de l'unité) Soit $(\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)_n$ une suite de fonctions positives et 2π-périodiques. On dit que $(\rho_n)_n$ est une approximation de l'unité sur le cercle si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{2\pi} \rho_n = 1 \text{ et } \forall \delta \in]0,\pi[, \int_\delta^{2\pi-\delta} \rho_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 6. *Soit $k \in \mathbb{N}$, et $1 \leq p < +\infty$. Soit E l'espace vectoriel normé $C^k_{2\pi}$ ou $L^p_{2\pi}$. Soit $(\rho_n)_n$ une approximation de l'unité.*
Alors si $f \in E$, on a $\rho_n \star f \in E$ et $\rho_n \star f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans E.

Remarque 6. Le résultat est faux en général si $p = +\infty$ comme le prouve l'exemple de la fonction 2π-périodique f définie par $f_{|[0,2\pi[} = 1_{[0,\pi]}$: si $(\rho_n)_n$ est une approximation continue de l'unité, alors $\rho_n \star f$ atteint nécessairement la valeur $\frac{1}{2}$.

Définition 3. (Noyau de Dirichlet et sommes partielles de Fourier)
Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle noyau de Dirichlet d'ordre N la fonction :

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$$

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle somme partielle de Fourier d'ordre N de f la fonction :

$$S_N(f) = f \star D_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$$

Définition 4. (Noyau de Fejér et sommes partielles de Fejér)
Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle noyau de Fejér d'ordre N la fonction :

$$K_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e_n$$

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle somme partielle de Fejér d'ordre N de f la fonction :

$$\sigma_N(f) = f \star K_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n$$

Proposition 7. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\ \ NK_N(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

La suite $(K_N)_N$ est une approximation de l'unité.

I.3 Théorèmes de convergence

Commençons par rappeler un résultat négatif vu en TD de topologie :

Proposition 8. ***([R])*** *Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $C^0_{2\pi}$ telle que pour tout $f \in \Omega$, la série de Fourier de f diverge sur un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 7. On peut construire explicitement une fonction 2π-périodique continue dont la série de Fourier diverge en 0 (contre-exemple de Fejér, voir [ZQ])

Exercice 2.4. (Le phénomène de Gibbs,[CLF]) Aux points de discontinuité de f, les sommes partielles de Fourier peuvent osciller autour de f avec une amplitude qui ne tend pas vers 0.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0[$.
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que somme partielle de Fourier de f d'ordre $2n$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = S_{2n}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

2. Etudier les extrema de f_n sur $[0, 2\pi]$. Montrer que f_n est maximale en $\frac{\pi}{2n}$.
3. Montrer que $f_n(\pi/(2n))$ est décroissante et admet une limite $l > 1$ quand $n \to +\infty$.

Maintenant, énonçons un résultat positif d'une grande utilité :

Théorème 2. ***(Fejér)*** *Soit $p \in [1, +\infty[$.*

1. *Soit $f \in C^0_{2\pi}$, alors :*

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \text{ et } \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. *Soit $f \in L^p_{2\pi}$, alors :*

$$\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p \text{ et } \|\sigma_N(f) - f\|_p \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Corollaire 2.

1. *L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans $C^0_{2\pi}$. (OSD cf. cours-TD de topologie, théorème de Stone-Weierstrass). Mieux, $\mathcal{P}$ est dense dans $C^k_{2\pi}$, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.*
2. *$\mathcal{P}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$, pour $p \in [1, +\infty[$.*
3. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0_{2\pi}$. Si $S_N(f)(x)$ admet une limite quand $N \to +\infty$, alors cette limite est nécessairement $f(x)$.*
4. *Soit $f \in C^0_{2\pi}$ telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty$.*
   Alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f. C'est le cas si $f \in C^0_{2\pi} \cap C^1_{pm}$.
5. *γ est injective : deux fonctions de $L^1_{2\pi}$ dont les coefficients de Fourier coïncident sont égales presque partout. De plus, si ces deux fonctions sont continues, alors elles sont égales partout.*

Remarque 8. Attention au sens de l'inclusion $C^1_{2\pi} \subset C^0_{2\pi}$: le fait que $\mathcal{P}$ soit dense dans $C^0_{2\pi}$ n'implique pas a priori que $\mathcal{P}$ est dense dans $C^1_{2\pi}$ (muni de sa topologie usuelle). Cela implique seulement (a priori) qu'il est dense dans $C^k_{2\pi}$ muni de la topologie induite par celle de $C^0_{2\pi}$ (convergence uniforme). Le corollaire 2 (point 1) permet donc de montrer un résultat vrai mais **non trivial**.
Il est également possible de montrer par récurrence que $\mathcal{P}$ est dense dans $C^k_{2\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}$ à partir du résultat pour $k = 0$ (par primitivations successives, en faisant attention au terme constant : $\mathcal{P}$ est stable par dérivation mais pas par primitivation !)
Enfin, attention au cas $p = +\infty$ dans le point 2 du corollaire 2 : $\mathcal{P}$ n'est pas dense dans $L^\infty_{2\pi}$, car $C^0_{2\pi}$ est fermé dans $L^\infty_{2\pi}$.

Exercice 2.5. Démontrer le corollaire 2, et particulier la deuxième partie du point 4.

Remarque 9. On peut déduire du théorème de Fejér un démonstration du théorème de Weierstrass (ci-dessous). Il en existe bien d'autres (par les polynômes de Bernstein, corrolaire du théorème de Stone-Weierstrass, par la convolution sans passer par le théorème de Fejér...)

Théorème 3. ***(Weierstrass)*** *Tout fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.*

Exercice 2.6. (Démonstration du théorème 3) Soit $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f = F \circ \cos$.

1. Montrer que $f \in C^0_{2\pi}$, et que f est paire.

2. En déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sigma_N(f) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) c_n(f)(e_n + e_{-n})$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n de degré n (le n-ième polynôme de Tchebycheff) tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(nt) = T_n(\cos(t))$$

4. En déduire l'existence d'un polynôme P_N tel que :

$$\|F - P_N\|_\infty = \|f - \sigma_N(f)\|_\infty$$

5. Conclure.

Remarque 10. On vient d'utiliser le fait que la composée d'une fonction continue et de cos est dans $C^0_{2\pi}$. Réciproquement, en décomposant en fonction $f \in C^0_{2\pi}$ en la somme de sa partie paire et de sa partie impaire (elles aussi dans $C^0_{2\pi}$), on obtient qu'elle s'écrit comme la somme d'une fonction continue de cos et d'une fonction continue de sin. On aussi le théorème de relèvement suivant :

Théorème 4. ***(Relèvement)*** *Soit $f \in C^0_{2\pi}$.*
Alors il existe $g \in C^0(\mathbb{S}^1)$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = g(e^{it})$

Exercice 2.7. (Démonstration du théorème 4) On définit $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ de la manière suivante : pour $z \in \mathbb{S}^1$, $g(z) = f(x)$ si $z = e^{ix}$ et $0 \leq x < 2\pi$.

1. Soit $(z_n)_n$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{S}^1$. Montrer que sa limite z est nécessairement dans $\mathbb{S}^1$, et que l'unique valeur d'adhérence de la suite $(g(z_n))_n$ est $g(z)$.

2. Conclure.

On peut déduire de la densité des polynômes trigonométriques la convergence $L^2_{2\pi}$:

Théorème 5. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2_{2\pi}$.*
En particulier, $f \in L^2_{2\pi}$ si et seulement $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ et dans ce cas :

$$\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \textit{ (égalité de Parseval) et } S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2_{2\pi}} f$$

$l^2(\mathbb{Z})$ et $L^2_{2\pi}$ sont isométriquement isomorphes.

Exercice 2.8. (Démonstration du théorème 5)
1. Soit $f \in L^2_{2\pi}$, et soit pour $N \in \mathbb{N}$, f_N le projeté orthogonal de f sur $Vect(e_n)_{|n|\leq N}$.
a. Montrer que $\|f - f_N\|_2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b. Déterminer f_N et en déduire que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, l'égalité de Parseval et la convergence de $S_N(f)$ vers f en norme $L^2_{2\pi}$.
2. Réciproquement, on suppose que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, montrer que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $L^2_{2\pi}$, puis que $f \in L^2_{2\pi}$

Remarque 11. On peut aussi montrer (théorème de M. Riesz, mais c'est plus difficile, voir [K]) que si $p \in]1, +\infty[$, et $f \in L^p_{2\pi}$, alors $S_n(f)$ converge encore vers f en norme $L^p_{2\pi}$. Le résultat est faux pour $p = 1$ grâce au théorème de Banach-Steinhaus : en effet, l'opérateur $S_n :\ L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi}$ qui à $f \in L^1_{2\pi}$ associe sa série de Fourier $S_n(f) = f \star D_n$ est (continu) de norme $|||S_n||| = \|D_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (pour montrer cette dernière égalité, il suffit, pour obtenir la minoration, d'évaluer $\|S_n(\rho_p)\|$ où $(\rho_p)_p$ est une approximation de l'unité).
Le résultat est aussi trivialement faux pour $p = +\infty$.

Remarque 12. Il y a deux mathématiciens du nom de Riesz ayant apporté une contribution significative aux mathématiques : les frères Frigyes et Marcell Riesz. On doit au premier le théorème de représentation de Riesz, ou le théorème de Riesz-Fischer, et au deuxième le théorème précédent, ou le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Enonçons maintenant un résultat ponctuel :

Théorème 6. ***(Dirichlet)*** *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe f^- et f^+ deux réels et $\delta > 0$ tels que :*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f^+|}{t} dt < +\infty \ \ et \ \ \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f^-|}{t} dt < +\infty$$

Alors

$$S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f^+ + f^-}{2}$$

Remarque 13. C'est le cas en particulier si f admet une limite et une dérivée à gauche et à droite en x_0.

Exercice 2.9. (Démonstration du théorème 6)
1. Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f)(x_0) - \frac{f^+ + f^-}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi h(t) \sin\left(\frac{2N+1}{2} t\right) dt$$

où

$$\forall t \in]0, \pi],\ \ h(t) = \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f^+ - f^-}{\sin(\frac{t}{2})}$$

2. Conclure.
Etudions maintenant la convergence uniforme de la série de Fourier de f vers f.

Remarque 14. On a déjà vu que si $f \in C^0_{2\pi} \cap C^1_{pm}$ alors la série de Fourier de f converge normalement. En effet,

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Or $f' \in L^\infty_{2\pi} \subset L^2_{2\pi}$ donc la série $|c_n(f)|$ est convergente par théorème de comparaison.

Remarque 15. Si la suite $(S_n(f))_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors f coïncide presque partout avec une fonction continue.

Proposition 9. *Soit $U_{2\pi}$ (resp. $A_{2\pi}$) l'espace des fonctions continues 2π-périodiques telles que la série de Fourier de f converge uniformément (resp. normalement) sur $\mathbb{R}$. Alors :*

1. *$U_{2\pi}$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_U = sup_{n\geq 0}\|S_n(\cdot)\|_\infty$.*
2. *$A_{2\pi}$ est une algèbre de Banach pour le produit **usuel** et la norme $\|\cdot\|_A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(\cdot)|$.*
3. *A s'injecte continûment dans U, qui lui-même s'injecte continûment dans $C^0_{2\pi}$:*

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_U \leq \|\cdot\|_A$$

Exercice 2.10. (Démonstration de la proposition 9)

1. Démontrer le point 3

2. En déduire le point 1.

3. Montrer le point 2 en utilisant le théorème de Fubini.

Proposition 10. *Soit $f \in C^0_{2\pi}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) \geq 0$. Alors $f \in A_{2\pi}$.*

Exercice 2.11. (Démonstration de la proposition 10)

1. Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^{N} c_n \leq 2\sigma_{2N}(f)(0)$$

2. Conclure en utilisant le théorème de Fejér.

Remarque 16. On peut aussi montrer ce résultat en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(f_N)_N$ de fonctions positives définie sur $\mathbb{Z}$ muni de la mesure positive $\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n$ par :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, f_N(n) = \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^+ c_n$$

En effet, $\liminf_{N\to+\infty} f_N(n) = c_n$ et $\int f_N d\mu = \sigma_N(f)(0)$ Donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = \int \liminf_{N\to+\infty} f_N d\mu \leq \liminf_{N\to+\infty}\int f_N d\mu = f(0)$$

en utilisant le théorème de Fejér.

Définition 5. (Fonctions α-hölderiennes) Soit $\alpha \in]0,1]$.
On dit que que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est α-hölderienne si et seulement si :

$$\exists C > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

On note $C^{0,\alpha}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques et α-hölderiennes, naturellement muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$ définie par :

$$\forall f \in C^{0,\alpha}_{2\pi},\ \|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Remarque 17. Soit $\alpha \in]0,1]$.

1. Toute fonction α-hölderienne est continue, et toute fonction C^1 est α-hölderienne.
2. Une fonction est 1-hölderienne si et seulement elle est lipschitzienne.
3. $x \mapsto x^\alpha$ est α-hölderienne.
4. Si on a : $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, alors $C^{0,\beta}_{2\pi} \subset C^{0,\alpha}_{2\pi}$.

Proposition 11.

1. *Soit $\alpha \in]0,1]$, alors $C^{0,\alpha}$ s'injecte continûment dans $U_{2\pi}$.*
2. *Soit $\alpha \in]\frac{1}{2},1]$, alors $C^{0,\alpha}$ s'injecte continûment dans $A_{2\pi}$.*

Exercice 2.12. (Démonstration du point 2 de la proposition 11) Soit $f \in C^{0,\alpha}$, $N \in \mathbb{N}$ et $h = 2^{-N}$.
1. En utilisant le fait que pour $n \in \mathbb{Z}$, l'expression de $c_n(\tau_h f - f)$ en fonction de $c_n(f)$, trouver un réel $C > 0$ tel que :

$$4 \sum_{n=\infty}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) |c_n(f)|^2 \leq Ch^{2\alpha}$$

2. En déduire un réel $C' > 0$, tel que :

$$\sum_{2^N \leq |n| < 2^{N+1}} |c_n|^2 \leq C' 2^{-2N\alpha}$$

3. En déduire enfin un réel $C'' > 0$:

$$\sum_{2^N \leq |n| < 2^{N+1}} |c_n| \leq C'' 2^{N(1/2-\alpha)}$$

puis conclure.

Pour montrer le point 1, on va montrer un résultat plus fort dont il sera une conséquence immédiate :

Proposition 12. *Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Alors :*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)\right)$$

où ω est le module de continuité de f.

Pour montrer cette proposition, il nous faudra montrer un lemme en deux parties, ayant un intérêt en lui-même :

Lemme 7. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes trigonométriques au plus n.*

1. *Soit $f \in C^0_{2\pi}$, alors :*

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathcal{P}_n, \|f - P_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. $\|D_n\|_1 = \frac{4}{\pi^2} ln(n) + O(1)$

Remarque 18. On va même construire explicitement le polynôme trigonométrique du premier point à l'aide du noyau de Jackson.

Exercice 2.13. (Démonstration de la proposition 12) Supposons le lemme 7 montré, et reprenons ses notations.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f - S_n(f)\|_\infty \leq \|f - P_n\|_\infty (1 + \|D_n\|_1)$$

et conclure.

Exercice 2.14. (Démonstration du deuxième point du lemme 7)

1. Montrer que :

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(nx)}{x}\right| dx + O(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin(x)|}{x} dx + O(1)$$

2. Conclure en utilisant (par exemple) le développement asymptotique de la série harmonique.

Pour montrer le premier point du lemme 7, on va introduire un nouveau noyau ayant une propriété que n'a pas le noyau de Fejér : le noyau de Jackson.

Définition 6. (Noyau de Jackson) Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle noyau de Jackson d'ordre n la fonction :

$$J_n = \frac{1}{\|K_n\|_2^2} K_n^2 = \frac{1}{\|K_n^2\|_1} K_n^2$$

Proposition 13. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

1. $J_n \geq 0$
2. $\|J_n\|_1 = 1$

3. $J_n \in \mathcal{P}_{2n}$

4. $\forall k \in \{0,1,2\},\ \int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_n(t)dt = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

En particulier, la suite $(J_n)_n$ est une approximation de l'unité.

Exercice 2.15. (Démonstration de la proposition 13) Les trois premiers points sont évidents. On va montrer le dernier point.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\|K_n^2\|_1 \geq \frac{2}{\pi} N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^4 du$$

2. Soit $k \in \{0,1,2\}$, en déduire l'existence d'un réel $C > 0$ tel que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_n(t)dt \leq \frac{C}{N^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k \left(\frac{\sin(Nt)}{t}\right)^4 du \leq \frac{C}{N^k} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)^4}{u^{4-k}} du$$

Exercice 2.16. (Démonstration du premier point du lemme 7) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^0_{2\pi}$ et $P_n = f \star J_{[\frac{n}{2}]}$.

1. Montrer que $P_n \in \mathcal{P}_n$

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\omega(|t|) \leq (n|t|+1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ et en déduire que :

$$\|f - P_n\|_\infty = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

I.4 Régularité comparée d'une fonction et de ses coefficients de Fourier

Définition 7. On note $s_0(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites à décroissance rapide :

$$s_0(\mathbb{Z}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}; \forall k \in \mathbb{N}, u_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right\}$$

Proposition 14. *Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $f \in C^0_{2\pi}$.*

1. *Soit $f \in C^k_{2\pi}$, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$*
2. *On suppose $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)$. Alors $f \in C^k_{2\pi}$*
3. *$f \in C^\infty_{2\pi}$ si et seulement si $(c_n(f))_n \in s_0$.*
4. *Il existe $\delta > 0$ tel que f admet un prolongement analytique dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < \delta\}$ si et seulement si : $\exists \alpha > 0, c_n(f) = O(e^{-\alpha|n|})$.
   Et dans ce cas, f est réel-analytique sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 2.17. (Démonstration du dernier point de la proposition 14)
1. Soit F un prolongement analytique de f dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < \delta\}$, et :

$$M = \sup\{|F(u+iv)|, |u| \leq \pi + \frac{\delta}{2}, |v| \leq \frac{\delta}{2}\}$$

a. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|f^{(p)}\|_\infty \leq Mp! \left(\frac{2}{\delta}\right)^p$
b. En déduire l'implication directe.
2. Réciproquement, on suppose : $\exists \alpha > 0, c_n(f) = O(e^{-\alpha|n|})$. En déduire l'existence d'un réel $\delta > 0$ et d'une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < \delta\}$ qui prolonge f

I.5 Séries trigonométriques

Il est naturel de se poser la question du lien entre séries trigonométriques (*i.e.* dont le terme général est de la forme $\lambda_n e_n$ où $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de complexes) et séries de Fourier.
Clairement, une série de Fourier est une série trigonométrique, mais la réciproque n'est pas vraie.
On a déjà vu dans le TD de topologie le résultat négatif suivant, conséquence du théorème de l'application ouverte et de la divergence du noyau de Dirichlet en norme $L^1_{2\pi}$:

Proposition 15. *([R]) L'application linéaire γ : $L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z})$ définie par :*

$$\forall f \in L^1_{2\pi}, \gamma(f) := (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

n'est pas surjective.

Raffinons un peu ce résultat dans le cas de séries trigonométriques convergentes.

Proposition 16. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n(f) = -c_{-n}(f) \geq 0$, alors :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} c_n(f) < +\infty$$

Exercice 2.18. Reprenons les notations de la proposition 16. Et soit F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \int_0^t f$$

1. Montrer que $F \in C^0_{2\pi}$ et exprimer ses coefficient de Fourier en fonction de ceux de f.
2. A l'aide du théorème de Fejér, Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} c_n(f) = \frac{i}{2}(F(0) - c_0(F))$$

3. En déduire la proposition 16 et l'existence d'une série de Fourier convergente qui n'est pas une série de Fourier.

Maintenant, rappelons d'abord le résultat élémentaire suivant :

Lemme 8. *Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante et telle que la série de tg u_n est convergente, alors :*

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 17. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0 et convexe, i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0$$

On la prolonge par parité sur $\mathbb{Z}$, en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{-n} = a_n$.
Alors il existe $f \in L^1_{2\pi}$, telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = a_n$

Remarque 19. A partir des propriétés 16 et 17, on peut donc montrer montrer la série $\sum_n \frac{1}{\ln(n)} \sin(n\cdot)$ n'est pas une série de Fourier mais que la série $\sum_n \frac{1}{\ln(n)} \cos(n\cdot)$ en est une.

Exercice 2.19. (Démonstration de la proposition 17)

1. Montrer que la série de terme général $n(a_{n_1} + a_{n+1} - 2a_n)$ $(n \geq 1)$ est convergente (de somme a_0).

2. En déduire la série de terme général $n(a_{n_1} + a_{n+1} - 2a_n)K_n$ $(n \geq 1)$ est convergente dans $L^1_{2\pi}$. On note f sa somme.

3. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer le coefficient de Fourier d'ordre p de f et conclure.

I.6 Applications

Théorème 9. ***(Equation de la chaleur sur un domaine 1D borné)***
Soit $Q :=]0,\pi[\times]0,+\infty[$ et $\overline{Q} = [0,\pi] \times [0,+\infty[$
Soit $g \in C^0([0,\pi],\mathbb{R}) \cap C^1(]0,\pi[,\mathbb{R})$ et telle que $g(0) = g(\pi) = 0$.
Il existe une unique fonction $u \in C^0(\overline{Q},\mathbb{R}) \cap C^\infty(Q,\mathbb{R})$ vérifiant :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ dans } Q, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \text{ pour } t \geq 0, \\ u(x,0) = g(x), \text{ pour } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Remarque 20. On fait évidemment un abus de notation en écrivant $C^0([0,\pi],\mathbb{R}) \cap C^1(]0,\pi[,\mathbb{R})$: ce sont les éléments de $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ dont la restriction à $]0,\pi[$ est un élément de $C^1(]0,\pi[,\mathbb{R})$.

Exercice 2.20. (Existence de solutions) [ZQ]

1. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,\pi],\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une fonction $h_n \in C^0([0,\infty[,\mathbb{R}) \cap C^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, telle que : la fonction $u_n : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, définie par : $\forall (x,t) \in \overline{Q},\ u_n(x,t) := h_n(t)\sin(nx)$ vérifie :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = 0, \text{ dans } Q.$$

3. Les fonctions h_n ainsi déterminées, montrer que $u := \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est bien définie dans $C^0(\overline{Q})$, est de classe C^∞ sur Q et vérifie $(\mathcal{C})$.

Exercice 2.21. (Décroissance de l'énergie, unicité) [E]

Soit $u \in C^0(\overline{Q},\mathbb{R}) \cap C^\infty(Q,\mathbb{R})$ solution de $(\mathcal{C})$. On définit $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0,\ \mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_0^\pi u(x,t)^2 dx$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est décroissante.

2. En déduire qu'il y a unicité des solutions de $(\mathcal{C})$.

Remarque 21. On aurait aussi pu montrer l'unicité à l'aide du principe du maximum (voir [ZQ])

Proposition 18. ***(Séries lacunaires et dérivées)*** *Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\epsilon_n| < +\infty$.*
Soit $(\lambda_n)_{n\leq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que $\inf_{n\geq 1} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$;
Soit enfin f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \epsilon_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n e^{i\lambda_n t}$$

Alors si f est dérivable en au moins un point, on a : $\epsilon_n = o(\lambda_n^{-1})$. En particulier, la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda_n t}}{\lambda_n}$$

est partout non dérivable.

Exercice 2.22. (Démonstration de la proposition 18). On suppose ici que pour $n \geq 1$, $\lambda_n = 2^n$. Pour une démonstration dans le cas général, voir par exemple [ZQ].

1. Montrer qu'il suffit de prouver la proposition dans le cas où f est dérivable en 0 et où $f(0) = f'(0) = 0$.
Indication : si f est dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$, on pourra considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(t+t_0) - f(t_0) + i\frac{f'(t_0)}{2}(e^{2it} - 1)$$

On fait cette hypothèse dans toute la suite.

2. Soit $n \geq 2$ et $p < 2^{n-2}$. Montrer que :

$$\epsilon_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) J_p(t) e^{-i2^n t} dt$$

3. Montrer qu'il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \delta \Rightarrow |f(t)| \leq \epsilon |t|$.
4. On pose pour $n \geq 2$, $p_n = 2^{n-2} - 1$.
Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ |\epsilon_n| \leq \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_{p_n}(t) dt + \frac{\|f\|_\infty}{2\pi\delta^2}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 J_{p_n}(t) dt$$

5. Conclure.

Remarque 22. On peut remarquer que l' "astuce" qui intervient dans la question 4. (majorer 1 par $\frac{t^2}{\delta^2}$ sur $\{|t| \geq \delta\}$) est la même que celle qui intervient dans la preuve du théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.

Remarque 23. On a déjà vu dans le cours-TD de topologie que l'ensemble des fonctions continues nulle-part dérivables était dense (voir [G]).

Remarque 24. Parmi les autres applications de la théorie des séries de Fourier, on peut citer par exemple l'inégalité de Bernstein , l'inégalité isopérimétrique, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger...

II Transformation de Fourier

II.1 Quelques rappels

Définition 8. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la transformée de Fourier de f est définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt$$

Commençons par rappeler (pour plus de détails, consulter [ZQ]) :

Définition 9.

1. $C_0(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et telles que :
   $$f(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
   C'est une algèbre de Banach munie la norme usuelle.
2. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C^k(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classe C^k muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k. On le munit classiquement d'une métrique complète (en séparant les cas : $k \in \mathbb{N}$ et $k = +\infty$).
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $C_b^k(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classe C^k et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées : une fois muni de la norme usuelle $\| \cdot \|_k$ (la somme des normes ∞ de ses dérivées), c'est un espace de Banach.
4. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C_c^k(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classe C^k et à support compact.
5. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz. C'est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ et vérifiant :
   $$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, x^p f^{(q)}(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
   C'est un espace complet muni de la distance :
   $$\forall (f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^2,\ d(f,g) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{p+q}} \frac{\|x^p (f-g)^{(q)}\|_\infty}{1 + \|x^p (f-g)^{(q)}\|_\infty}$$

Remarque 25. Une suite $(f_n)_n$ converge vers une fonction f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout polynôme P et pour tout $q \in \mathbb{N}$, $P.f_n^{(q)}$ converge uniformément vers $P.f^{(q)}$

Remarque 26. On a l'inclusion $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Remarque 27. La topologie de $C_b^k(\mathbb{R})$ est **strictement plus fine** que celle de $C^k(\mathbb{R})$.

Proposition 19. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est une algèbre stable par convolution, dérivation, multiplication par un polynôme et par transformation de Fourier. De plus, toutes ces opérations sont continues et on a pour tout* $q \in \mathbb{N}$ *:*

$$\hat{f}^{(q)} = \widehat{(-ix)^q f}$$

avec un abus de notation évident.

Définition-propriété 3. (Produit de convolution) Soit $(f,g) \in L^1(\mathbb{R})^2$. On définit presque partout le produit de convolution $f \star g$ de f et g par :

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

De plus, $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$

Remarque 28. Plus généralement, on peut définir le produit de convolution de f et g dans $L^r(\mathbb{R})$ si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ $(p,q,r) \in [1,+\infty]^3$. De plus, $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$: c'est l'inégalité de convolution de Young.
On notera le cas particulier où $p = 1$ et $r = q$, et celui où $r = +\infty$.

Proposition 20. ***(Lemme de Riemann-Lebesgue)*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt \underset{|\lambda| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Autrement dit, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

Proposition 21.

1. *$(L^1(\mathbb{R}), +, \star, \|\cdot\|_1)$ est une algèbre de Banach commutative (non unitaire).*
   En particulier, si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $f \star g = g \star f$, $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ et il n'existe pas de fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ f \star g = f$
2. *$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est un morphisme continu d'algèbre de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$.*
   En particulier, si $f, g \in L^1$, $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$

Proposition 22. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $g \in C_b^k(\mathbb{R})$, alors $f \star g \in C_b^k(\mathbb{R})$ et $(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}$*

Définition 10. (Approximation de l'unité) Soit $(\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)_n$ une suite de fonctions positives et intégrables. On dit que $(\rho_n)_n$ est une approximation de l'unité si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1 \text{ et } \forall \delta > 0, \int_{|x| \geq \delta} \rho_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque 29. Si ρ est une fonction positive et intégrable d'intégrale 1, alors $(n\rho(n\cdot))_n$ est une approximation de l'unité.

Remarque 30. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

est un exemple d'une telle fonction.

Remarque 31. Si $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité, alors $(\hat{\rho_n})_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers 1.

Proposition 23. *Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité.*
Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C_b^k(\mathbb{R})$ (resp. et dont toutes les dérivées sont uniformément continues).
Alors : $\rho_n \star f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $C^k(\mathbb{R})$ (resp. dans l'evn $C_b^k(\mathbb{R})$).
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors $\rho_n \star f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans l'espace vectoriel normé $L^p(\mathbb{R})$.

Remarque 32.

Théorème 10. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors :*

1. *$C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $C^k(\mathbb{R})$*
2. *$C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$*

Remarque 33. Il y a dans le résultat du théorème 10 deux étapes : dans un premier temps, la densité de $C_c^k(\mathbb{R})$ dans $C^k(\mathbb{R})$ par multiplication avec une fonction plateau, ou de $C_c^0(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ en passant par les fonctions étagées. Dans un deuxième temps, la régularisation par convolution.

Remarque 34. En revanche, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C_c^k(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans l'espace de Banach $C_b^k(\mathbb{R})$.

Remarque 35. On peut déduire de la régularisation par convolution un résultat plus fort que le fait que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, donc dans l'intersection munie de l'une des deux normes : il est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$!

On rappelle enfin le résultat **très utile** (sorte de "réciproque" du théorème de convergence dominée) :

Proposition 24. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $(f_n)_n$ une suite convergente dans $L^p(\mathbb{R})$. On note f sa limite. Alors il existe une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge p.p. vers f.*

II.2 Résultats principaux

Exercice 2.23. (Un peu de calcul) **1.** En utilisant une équation différentielle, montrer que la transformée de Fourier de la fonction définie, pour $\alpha > 0$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2} \tag{1}$$

vérifie :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}. \tag{2}$$

2. En déduire que le résultat reste vrai si $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(\alpha) > 0$

Remarque 36. Le résultat du calcul de l'intégrale de Gauss est supposé connu des candidats à l'agrégation (il était demandé de le rappeler sans démonstration dans la première question d'un sujet d'écrit) :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

On peut le montrer par passage aux coordonnées polaires ou à l'aide des fonctions auxiliaires définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \left(\int_0^t e^{-u^2} du\right)^2 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

On peut en déduire la formule d'inversion de Fourier :

Théorème 11. ***(Inversion de Fourier)*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(-x) \quad p.p.$$

En particulier, $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Remarque 37. On en déduit en particulier que $\mathcal{F}$ est injective.
En revanche, elle n'est pas surjective (soit par le théorème de l'application ouverte, soit par construction explicite d'une fonction qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable).
On peut également en déduire que la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un automorphisme bicontinu.

Exercice 2.24. (Démonstration du théorème 11)
1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx - \epsilon t^2} \hat{f}(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\epsilon}} dy$$

2. Conclure.

Proposition 25. *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g$$

Exercice 2.25. (Démonstration de la proposition 25) On pourra utiliser le théorème de Fubini.

Corollaire 3. *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f\overline{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\overline{\hat{g}}$$

En particulier,

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$$

Exercice 2.26. (Démonstration du corollaire 3) Montrer que $\overline{g} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\overline{\hat{g}})$ et conclure.

Théorème 12. ***(Plancherel)*** *Il existe une unique application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, encore notée $\mathcal{F}$ et appelée transformée de Fourier-Plancherel, telle que $\mathcal{F}$ coïncide avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.*
De plus, $\mathcal{F}$ est bijective et on a les deux identités suivantes pour $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2 \tag{3}$$

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f(-\cdot) \ p.p. \tag{4}$$

Remarque 38. On omet souvent Plancherel : on parle de la transformée de Fourier d'une fonction L^2.

Proposition 26. *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $2\pi\widehat{fg} = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.*

Proposition 27. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\int_{-n}^{n} f(x)e^{-ix\xi}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \mathcal{F}(f) \tag{5}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} f(x)e^{ix\xi}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \mathcal{F}^{-1}(f) \tag{6}$$

Exercice 2.27. (Démonstration du théorème 12)
1. Montrer que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ admet une unique prolongement continu à $L^2(\mathbb{R})$, qui vérifie l'égalité sur les normes.
2. Montrer que ce prolongement coïncide avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'image de ce prolongement est fermée et contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis conclure.
Exercice 2.28. **1.** Calculer la transformée de Fourier de la fonction : $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-|x|}$.
2. En déduire la transformée de Fourier-Plancherel de la fonction $f = \arctan(1/\cdot)$.
Exercice 2.29. **1.** Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation : $f \star f = f$. En déduire que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'unité.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Calculer la transformée de Fourier de $1_{[a,b]}$.
3. Soit $a > 0$. La fonction $f_a : x \mapsto \frac{\sin(ax)}{x}$ est-elle dans $L^1(\mathbb{R})$? $L^2(\mathbb{R})$? Calculer sa transformée de Fourier-Plancherel.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Calculer $f_a \star f_b$ et en déduire que l'équation $f \star f = f$ a une infinité de solutions dans $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 28. ***(Formule de sommation de Poisson)*** *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

Exercice 2.30. (Démonstration de la proposition 28)

1. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2n\pi)$. Montrer que g est bien définie, et appartient à $C^1_{2\pi}$. Calculer ses coefficients de Fourier.

2. Conclure.

Exercice 2.31. (Résolution de l'équation de la chaleur sur un domaine non borné)

1. Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $u :]0, +\infty[_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto u(t, x)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \forall t \in]0, +\infty[, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En ajoutant des hypothèses si nécessaire, justifier qu'on a :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) = -\xi^2 \widehat{u}(t, \xi),$$

où $\hat{}$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace :

$$\widehat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ix\xi} dx.$$

En déduire

$$\forall t \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, \ u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy. \tag{7}$$

2. Réciproquement, soit $u_0 \in C^0_b(\mathbb{R})$ et $u :]0, +\infty[_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule (7).

Montrer que u de classe C^1, que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto u(t, x)$ appartient à $C^2(\mathbb{R})$, que u vérifie $(\mathcal{C})$ et enfin que $u(t, x) \to u_0(x)$ quand $t \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.