
Équations différentielles

Cyrille Hériveaux

Références

[CLF] A. Chambert-Loir and S. Fermigier. *Exercices de maths pour l'agrégation*. Masson, 1996.

[D] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[G] X. Gourdon. *Les maths en tête, Analyse*. Ellipses, 1994.

[HW] J. Hubbard and B. West. *Equations différentielles et systèmes dynamiques*. Cassini, 1996.

[P] L. Perko. *Differential equation and dynamical systems*. Springer Verlag, 1991.

[Re] H. Reinhard. *Equations aux dérivées partielles : introduction*. Dunod.

[Ro] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2003.

[ZQ] C. Zuily and H. Queffélec. *Elements d'analyse pour l'agrégation*. Masson, 1995.

I Cadre général

I.1 Quelques rappels

Définition 1. (Équation différentielle) Soit E un espace de Banach.
Une équation différentielle d'**ordre** $n \in \mathbb{N}^*$ est une relation

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{E1}$$

avec $F : \Omega \to E$ une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times E^n$, appelé **domaine**. L'équation (E1) est dite **résolue** si elle peut s'écrire si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{E2}$$

Remarque 1. Quitte à augmenter un espace E de dimension supérieure, on peut toujours se ramener à une équation du premier ordre en posant : $Y = (y, y', \dots, y^{n-1})$

Dans toute la suite, on fera les hypothèses suivantes :

(H)

— I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ — m est un entier naturel non nul — U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ — $F : I \times U \to \mathbb{R}^m$ est une application continue. — (t_0, y_0) est un élement de $I \times U$

On considère l'équation différentielle :

$$y' = F(t, y) \tag{E3}$$

Définition 2. Une solution de (E3) est la donnée d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $f : J \to E$ continue sur J, dérivable sur $\overset{\circ}{J}$, tels que :

(i) $\forall t \in J,\ f(t) \in U$

(ii) $\forall t \in \overset{\circ}{J},\ f'(t) = F(t, f(t))$

Définition 3. (Équation différentielle autonome) L'équation différentielle (E3) est dite autonome si F ne dépend pas de t.

Définition 4. (Problème de Cauchy)
Une condition de Cauchy est un couple $(t_0, y_0) \in I \times U$.
Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution (J, f) de (E3) telle que $t_0 \in J$ et $f(t_0) = y_0$. On dit alors que cette solution vérifie la condition de Cauchy (t_0, y_0).

Remarque 2. On dit souvent par abus de langage que f est solution de (E3) (sur son intervalle de définition).

Proposition 1. *On fait les hypothèses* (H)*. Soit* $J \subset I$ *tel que* $t_0 \in J$*.*
Une fonction $f : J \to \mathbb{R}^m$ *est une solution de* (E3) *vérifiant la condition de Cauchy* (t_0, y_0) *si et seulement si :*

(i) $\forall t \in J,\ f(t) \in U$

(ii) f *est continue.*

(iii) $\forall t \in J, f(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds$

Proposition 2. *Soit* $k \in \mathbb{N}$*. Si* F *est de classe* C^k*, alors toute solution de* (E3) *est de classe* C^{k+1}*.*

Lemme 1. ***(Grönwall)*** *Soient* $a < b$ *deux réels, et* ϕ *et* ψ *deux fonctions continues* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}^+$*. On suppose qu'il existe* $A \geq 0$ *tel que :*

$$\forall t \in [a, b], \phi(t) \leq A + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b], \phi(t) \leq A \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

Exercice 3.1. (Démonstration du lemme 1)

1. Montrer que la fonction $F : t \in [a,b] \mapsto A + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds$ est de classe C^1, et trouver une inégalité reliant F' et F.

2. Conclure en utilisant la fonction $G : t \in [a,b] \mapsto F(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$.

I.2 Théorie locale

Définition 5. (Cylindre de sécurité) On fait les hypothèses (H). Soient $T > 0$ et $R > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, R)$ est un cylindre de sécurité pour l'équation (E3) si tout solution (J, f) vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0) et telle que $J \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\bar{B}(y_0, R)$

Proposition 3. *Avec les hypothèses (H), soient $T_0 > 0$ et $R_0 > 0$ tels que*
$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, R_0) \subset I \times U$.
Soit $M = \sup_{(t,y)\in C_0} \|F(t,y)\| < +\infty$.
Alors si l'on poste $T_m = \min(T_0, \frac{R_0}{M})$, $C = [t_0 - T_m, t_0 + T_m] \times \bar{B}(y_0, R_0)$ est un cylindre de sécurité de l'équation (E3).

Exercice 3.2. (Démonstration de la proposition 3)

1. Montrer l'existence de tels réels T_0 et R_0

2. Montrer qu'on a bien $M < +\infty$.

3. Montrer la proposition.

Théorème 2. ***(Cauchy-Peano-Arzela)*** *Avec les hypothèses (H), et les notations de la proposition 3, il existe une solution (J, f) de* (E3) *vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0). Mieux, on peut choisir $J = [t_0 - T_m, t_0 + T_m]$ et dans ce cas, $f(J) \subset \bar{B}(y_0, R_0)$.*

Remarque 3. Il n'y a pas unicité en général. Considérons par exemple l'équation différentielle :

$$y' = 2\sqrt{|y|} \tag{E1}$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$ la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} (t-\lambda)^2 \text{ si } t > \lambda \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est une solution de l'équation (E3) vérifiant la condition de Cauchy $(0, 0)$.

Exercice 3.3. (Démonstration du théorème 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations de la proposition 3, on pose $\delta_n = \frac{T_m}{n}$, et pour $i \in \{-n, \ldots, 0, \ldots, n\}$, $t_i = t_0 + i\delta_n$. On définit alors la fonction ϕ_n sur $[t_0 - T_m, t_0 + T_m]$ par récurrence sur $i \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\forall t \in [t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n], \phi_n(t) = y_0 + (t - t_0)F(t_0, y_0)$$

Puis pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\begin{array}{ll} \forall t \in]t_i, t_{i+1}], & \phi_n(t) = \phi_n(t_i) + (t - t_i) F(t_i, \phi_n(t_i)) \\ \forall t \in [t_{-i-1}, t_{-i}[, & \phi_n(t) = \phi_n(t_{-i}) + (t - t_{-i}) F(t_{-i}, \phi_n(t_{-i})) \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ϕ_n est continue, M-lipschitzienne, et que :

$$\phi_n([t_0 - T_m, t_0 + T_m]) \subset \bar{B}(y_0, R_0)$$

.

2. En utilisant le théorème d'Ascoli dans $C^0([t_0 - T_m, t_0 + T_m], \bar{B}(y_0, R_0))$, montrer que $(\phi_n)_n$ admet une sous-suite encore notée $(\phi_n)_n$ convergeant uniformément vers une fonction continue que l'on note ϕ.

3. **a.** Montrer que pour $t \in [t_0 - T_m, t_0 + T_m]$, on a : $\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \phi(s)) ds$
b. Conclure.

Définition 6. (Localement lipschitzienne) On dit que F est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si :

$$\begin{array}{l} \forall (t_0, y_0) \in I \times U, \exists V \in \mathcal{V}_{(t_0, y_0)}, \exists C > 0, \\ \forall (t, x_1, x_2) \in I \times U^2, ((t, x_1), (t, x_2)) \in V^2, \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\| \end{array}$$

Théorème 3. ***(Cauchy-Lipschitz)*** *On fait les hypothèses* (H) *et on suppose, de plus, que* F *est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*
Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, *il existe un intervalle* $J \subset I$ *voisinage de* t_0 *et* $f : J \to \mathbb{R}^m$, *tels que* (J, f) *est une solution de* (E3) *vérifiant la condition de Cauchy* (t_0, y_0).
De plus, cette solution est unique au sens suivant : il existe un voisinage J_0 *de* t_0 *tel que deux solutions quelconques de* (E3) *vérifiant la condition de Cauchy* (t_0, y_0) *coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition et de* J_0.

Exercice 3.4. (Démonstration du théorème 3) On propose ici deux démonstrations. La première à partir d'un théorème du point fixe, la seconde à partir du théorème 2 et du lemme de Grönwall.
F localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable : soit V un voisinage de (t_0, y_0) tel que l'équation de la définition 6 est vérifiée pour la constante $C > 0$. Comme dans la proposition 3, il existe un cylindre $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, R_0)$ de (E3) inclus dans V, et on pose $T_m = \min(T_0, \frac{R_0}{M})$ (où M est défini comme dans cette proposition).
1. On pose alors $F = C^0([t_0 - T_m, t_0 + T_m], \bar{B}(y_0, R_0))$. On définit $\Phi : F \to F$ par :

$$\forall f \in F, \forall t \in [t_0 - T_m, t_0 + T_m], \Phi(f)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s)) ds$$

a. Montrer que Φ est bien définie.

b. Montrer que :

$$\forall (u,v) \in F^2, \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [t_0 - T_m, t_0 + T_m],\ \|\Phi^N(u)(t) - \Phi^N(v)(t)\| \leq \frac{C^N |t-t_0|^N}{N!} \|u-v\|_\infty$$

c. En déduire une première démonstration du théorème 3.

2. Le théorème 2 fournit l'existence d'une solution locale. Soient (J, f) et $(\tilde{J}, \tilde{f})$ deux solutions de (E3). On considère leurs restrictions à $J' = J \cap \tilde{J} \cap [t_0 - T_m, t_0 + T_m]$. t_0 est encore dans l'intérieur de l'intervalle J'.

a. Montrer que : $\forall t \in J', \|f(t) - \tilde{f}(t)\| \leq C \left| \int_{t_0}^t \|f(s) - \tilde{f}(s)\| ds \right|$

b. En déduire une deuxième démonstration du théorème 3.

Remarque 4. Historiquement, le théorème 2 est né d'un article de Péano remettant en cause la pertinence de l'hypothèse de Lipschitz dans le théorème 3.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise à la dimension infinie en prenant E un espace de Banach et non plus $\mathbb{R}^m$ (la démonstration reste la même : pour montrer que f est bornée sur un cylindre de sécurité, il suffit d'avoir la condition de Lipschitz !). En revanche, le théorème de Cauchy-Peano-Arzela est faux en général si l'on remplace $\mathbb{R}^m$ par un espace de dimension infinie. En effet, on utilise dans la preuve le fait que la boule unité fermé de $\mathbb{R}^m$ est compacte, ce qui est toujours faux dans un espace de Banach de dimension infinie. Pour un contre-exemple, voir l'exercice 2 du chapitre "Équations différentielles" de [ZQ], p. 415.

I.3 Théorie globale

Définition 7. (Solution globale) On dit qu'une solution (J, f) de (E3) est globale si $J = I$.

Définition 8. (Solution maximale) Une solution (J, f) de (E3) est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement strict $(\tilde{J}, \tilde{f})$ (avec $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{f}_{|J} = f$) qui soit aussi une solution de (E3).

Remarque 5. Une solution globale est nécessairement maximale, mais la réciproque est fausse.

Proposition 4. ***(Unicité globale)*** *On fait les hypothèses* (H) *et on suppose, de plus, que* F *est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*
Soient (J_1, f_1) *et* (J_2, f_2) *deux solutions de* (E3) *telles que* $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. *Alors si* f_1 *et* f_2 *coïncident en au moins un point de* $J_1 \cap J_2$, *elles coïncident sur tout* $J_1 \cap J_2$.

Exercice 3.5. (Démonstration de la proposition 4)

1. Montrer que :

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2, f_1(t) = f_2(t)\}$$

est ouvert et fermé dans $J_1 \cap J_2$.

2. Conclure.

Théorème 4. ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz global)*** *On fait les hypothèses (H) et on suppose, de plus, que F est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe une unique solution maximale (J, f) vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0). De plus, J est ouvert.*
Mieux, toute solution vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0) est définie sur un intervalle contenu dans J et coïncide avec la solution maximale sur son intervalle de définition.

Exercice 3.6. (Démonstration du théorème 4)

Soit S l'ensemble des solutions (J, f) de (E3) vérifiant la condition de Cauchy. On note π_1 la projection sur la première coordonnée, et $S' = \pi_1(S)$. On définit ensuite :

$$J_{\max} = \bigcup_{J \in S'} J$$

1. Montrer que $J_{\max}$ est un intervalle contenant t_0.
2. Soient (J_1, f_1) et (J_2, f_2) deux éléments de S. Montrer que pour tout $t \in J_1 \cap J_2$, $f_1(t) = f_2(t)$.
3. En déduire que l'application $f_{\max} : J_{\max} \to E$ qui à $t \in J_{\max}$ associe $f(t)$ si $(J, f) \in S$ et $t \in \pi_1((J, f))$ est bien définie.
4. Montrer que $(J_{\max}, f_{\max})$ est l'unique solution maximale de (E3) vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0).
5. Montrer que $J_{\max}$ est ouvert et conclure.

Corollaire 1. *Avec les hypothèses du théorème 4,*

1. *si $F(., 0) = 0$, et si $f \neq 0$ est une solution de* (E3)*, alors f ne s'annule pas.*
2. *si (J_1, f_1) et (J_2, f_2) sont des solutions de* (E3)*, telles qu'il existe $t \in J_1 \cap J_2$ avec $f_1(t) < f_2(t)$ alors l'inégalité est vraie sur tout l'intervalle $J_1 \cap J_2$.*
3. *si $f \neq 0$ est une solution de*
$$y'' = F(t, y, y') \tag{E1}$$
avec F continue et localement lipschitzienne par rapport au vecteur composé de la deuxième et de la troisième variable, et $F(., 0, 0) = 0$, alors les zéros de f sont isolés.

Sans l'hypothèse de Lipschitz, on peut tout de même obtenir l'existence d'une solution maximale à l'aide du théorème 2 et de la proposition suivante :

Proposition 5. *On fait les hypothèses (H). Toute solution de* (E3) *se prolonge en une solution maximale (J, f). De plus, J est nécessairement ouvert.*

Exercice 3.7. (Démonstration de la proposition 5) Soit (J_0, f_0) une solution de (E3). On considère S l'ensemble des solutions (J, f) de (E3) prolongeant la solution (J_0, f_0) *i.e.* telles que $J_0 \subset J$ et $f_{|J_0} = f_0$. On munit S de l'ordre $\leq$ défini par :

$$\forall((J_1, f_1), (J_2, f_2)) \in S^2, (J_1, f_1) \leq (J_2, f_2) \text{ si } J_1 \subset J_2 \text{ et } f_{2|J_1} = f_1$$

Montrer que $(S, \leq)$ est inductif et conclure à l'aide du lemme de Zorn.

Remarque 6.

1. Contrairement au théorème 4, il n'y a pas unicité en général (voir remarque 3). On ne peut donc parler de <u>la</u> solution maximale que sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.
2. Le théorème 4 montre un résultat beaucoup plus fort : non seulement il y a unicité de la solution maximale, mais en plus, cette dernière est le maximum de l'ensemble des solutions vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0) au sens de la relation d'ordre définie ci-dessus et non pas seulement un élément maximal.
3. Le théorème 4 n'utilise pas le lemme de Zorn pour obtenir l'existence de la solution maximale.

Remarque 7. (maximum, maximal) Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
On dit que $a \in E$ est le maximum (ou plus grand élément) de E si : $\forall x \in E, x \leq a$.
On dit que $a \in E$ est un élément maximal si $\forall x \in E, x \geq a \Rightarrow x = a$.
Le maximum est toujours un élément maximal, mais la réciproque est fausse. Il y a unicité du maximum, mais l'ensemble E peut admettre plusieurs éléments maximaux.

Exercice 3.8. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle qu'il existe $T > 0$, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t+T, \cdot) = F(t, \cdot)$$

On suppose que (E3) admet une solution f définie sur tout $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite $(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone ou constante.

2. Dans le cas où la suite $(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, montrer que f est T-périodique.

Exercice 3.9. ([CLF]) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \sin(ty)$.

1. Montrer que, pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0).

2. Montrer que cette solution est définie sur tout $\mathbb{R}$, qu'elle est paire et que si $y_0 > 0$, alors $y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.10. (Un peu de calcul)[G, D] Discuter l'existence de solutions et déterminer explicitement les solutions maximales réelles sur leur intervalle de définition pour

$$\textbf{(a)} : y'(t) = \sqrt{\frac{1 - y(t)^2}{1 - t^2}} \qquad \textbf{(b)} : ty' - y = \sqrt{t^2 + y^2}$$

$$\textbf{(c)} : y' + y + y^2 + 1 = 0 \qquad \textbf{(d)} : y = ty' - y'^2/4$$

I.4 Critères de prolongement

Théorème 5. ***(Sortie de tout compact)*** *On fait les hypothèses* (H)*. Soit* (J, f) *une solution maximale de* (E3)*. On note* $J =]T_*, T^*[$ *et* $I =]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$*.*
Alors l'une des deux propositions suivantes est vraie :

1. $T^* = b$

2. $T^* < b$ *et pour tout compact* $K \subset U$*, pour tout* $\delta \in]0, T^* - T_*[$*, il existe* $t \in]T^* - \delta, T^*[$*, tel que* $f(t) \notin K$*.*

On a une alternative analogue pour T_*

On va en fait montrer la contraposée du théorème 5 :

Théorème 6. *On fait les hypothèses* (H)*. Soit* (J, f) *une solution de* (E3) *où* $J =]\alpha, \beta[$*,* $I =]a, b[$*, et* $-\infty \leq a < \alpha < \beta < b \leq +\infty$*.*
On suppose qu'il existe $\delta \in]0, \beta - \alpha[$ *et* $K_0 \subset U$ *compact tels que :*

$$\forall t \in]\beta - \delta, \beta[, (resp.]\alpha + \delta, \alpha[)\ f(t) \in K_0$$

Alors f *peut être strictement prolongée au delà de* β *(resp.* α*)*

Exercice 3.11. (Démonstration du théorème 6)
Soient $K = [\beta - \delta, \beta] \times K_0$, et $C = \sup_{(t,y)\in K} \|F(t, y)\|$.

1. Montrer que $C < +\infty$.

2. En déduire que f admet une limite en β^-. On note l cette limite. (On pourra utiliser la forme intégrale de l'équation différentielle (E3) définie dans la proposition 1).

3. En considérant le problème de Cauchy (β, l), montrer que f peut être prolongée au delà de β.

Dans le cas où $U = \mathbb{R}^m$, le théorème 5 prouve que si $T^* < b$, f n'est pas bornée au voisinage de T^* : $\limsup_{t\to T^*} \|f(t)\| = +\infty$. On peut en fait montrer un résultat plus fort :

Théorème 7. *On fait les hypothèses* (H)*, et on suppose de plus que* $U = \mathbb{R}^m$*. Soit* (J, f) *une solution maximale de* (E3)*. On note* $J =]T_*, T^*[$ *et* $I =]a, b[$ *(*$-\infty \leq a < b \leq +\infty$*).*
Alors l'une des deux propositions suivantes est vraie :

1. $T^* = b$

2. $T^* < b$ *et* $\|f(t)\| \underset{t\to T^{*-}}{\longrightarrow} +\infty$

On a une alternative analogue pour T_*

Exercice 3.12. (Démonstration du théorème 7) On suppose $T^* < b$ et que $\|f(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand t tend vers T^* par valeurs inférieures.

1. Montrer l'existence d'un réel $C > 0$ et d'une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers T^* par valeurs inférieures tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f(t_k)\| \leq C$.
Soient α, β deux réels tels que $T_* < \alpha < T^* < \beta < b$. Soient $d > 0$, $K = [\alpha, \beta] \times B(0, C+d)$, et $M = \sup_{(t,y)\in K} \|F(t, y)\|$.

2. Montrer que $M < +\infty$.

3. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\max(\frac{\alpha+T^*}{2}, T^* - \frac{d}{M+1}) < t_n$.
On pose $Q = [\alpha, \beta] \times \bar{B}(f(t_n), d)$

4. Montrer que $Q \subset K$ et déduire du théorème 2 que le problème de Cauchy $(t_n, f(t_n))$ admet une solution définie sur l'intervalle $[t_n - T_m, t_n + T_m]$ avec $T_m = \min(\beta - t_n, t_n - \alpha, \frac{d}{M})$.

5. Montrer que $t_n + T_m > T^*$ et conclure.

Exercice 3.13. (Systèmes hamiltoniens) Soit $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On considère le système d'équations :

$$(E) \begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

On suppose que tout $C \in \mathbb{R}$, $\{H = C\}$ est borné.

1. Montrer que les solutions maximales de (E) sont définies sur tout $\mathbb{R}$.

2. Traiter le cas où :

a. $H(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4}$

b. $H(x, y) = \frac{x^2}{2} - \cos(y)$.

Exercice 3.14. Soit $F : I \times \mathbb{R}^m$ continue et telle que pour tout compact $K \subset I$, il existe α et β deux réels strictement positifs tels que :

$$\|F(t, y)\| \leq \alpha \|y\| + \beta \tag{E1}$$

Montrer que toute solution maximale de (E3) est globale (on pourra utiliser la forme intégrale de (E3) définie dans la proposition 1) Indication : on pourra utiliser le lemme de Gronwall

Exemple 1. Les systèmes linéaires à coefficients continus vérifient l'inégalité de l'exercice précédent.

Proposition 6. ***(Critère suffisant de globalité des solutions maximales)*** *Soit $F : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. On suppose que pour tout compact $K \subset I$, il existe $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue telle que :*

$$\forall (t, y) \in K \times \mathbb{R}^m, \|F(t, y)\|_2 \leq G(\|y\|_2) \ \textit{et} \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{G(s)} ds = +\infty$$

Alors toute solution maximale de (E3) *est globale.*

Exercice 3.15. (Démonstration de la proposition 6)

Soit $]T_*, T^*[$ le domaine d'une solution maximale f. On suppose $T^* < \sup(I)$.

On pose pour $t \in]T_*, T^*[$, $r(t) = \|f(t)\|_2$.

1. Montrer que r est de classe C^1.

2. Montrer qu'il existe $\delta < T^* - T_*$, tel que : $\forall t \in [T^* - \delta, T^*[$, $r'(t) \leq G_\delta(r(t))$

3. En déduire que pour tout $t \in [T^* - \delta, T^*[$, $\int_{r(T^*-\delta)}^{r(t)} \frac{1}{G_\delta(s)} ds \leq \delta$

4. Conclure.

Afin de montrer la pertinence de la proposition 6, montrons le résultat suivant :

Proposition 7. *Soit F une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{F} < +\infty$*
On considère l'équation différentielle :

$$y' = F(y) \tag{E1}$$

Alors il existe une unique solution maximale (J, f) du problème de Cauchy (t_0, y_0) et celle-ci est définie sur $J =]T_*, T^*[$, avec :

$$T_* = t_0 - \int_{-\infty}^{y_0} \frac{1}{F} \text{ et } T^* = t_0 + \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{F}$$

Exercice 3.16. (Démonstration de la proposition 7)
On pose pour $s \in \mathbb{R}$, $G(s) = \int_{y_0}^{s} \frac{1}{F}$

1. Montrer pour $t \in]T_*, T^*[$, on a : $G(f(t)) = t - t_0$

2. Montrer que G induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] - \int_{-\infty}^{y_0} \frac{1}{F}, \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{F}[$, encore notée G.

3. En déduire que $]T_*, T^*[\subset]t_0 - \int_{-\infty}^{y_0} \frac{1}{F}, t_0 + \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{F}[$ et que :

$$\forall t \in]T_*, T^*[, \; f(t) = G^{-1}(t - t_0)$$

4. Conclure.

I.5 Dépendance par rapport aux conditions initiales et aux paramètres

Dans cette partie, m, I et U sont définies comme précédemment, n est un entier naturel non nul, X est un ouvert $\mathbb{R}^n$, et F une fonction continue de $I \times U \times X$ dans $\mathbb{R}^m$.
On suppose de plus que F est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, ce qui signifie ici que :

$$\forall (t_0, y_0, \lambda_0) \in I \times U \times X, \exists V \in \mathcal{V}_{(t_0, y_0, \lambda_0)}, \exists C > 0, \forall (t, \lambda, x_1, x_2) \in I \times X \times U^2,$$
$$\big(((t, x_1, \lambda), (t, x_2, \lambda)) \in V^2\big) \Rightarrow \|F(t, x_1, \lambda) - F(t, x_2, \lambda)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$$

Soit $(t_0, y_0, \lambda_0) \in I \times U \times X$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure alors l'existence, pour tout $\lambda \in X$, d'une unique solution maximale de l'équation :

$$y' = F(t, y, \lambda_0) \tag{E1}$$

vérifiant la condition (t_0, y_0). On la note $\Phi(\cdot, t_0, y_0, \lambda_0)$, définie sur un intervalle qui définie de (t_0, y_0, λ_0).

Proposition 8. ***(Continuité par rapport aux paramètres)*** *Soit $(t_0, y_0, \lambda_0) \in I \times U \times X$, et soit V un voisinage de (t_0, y_0, λ_0) sur lequel F lipschitzienne par rapport à la seconde variable.*
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $\Lambda \subset X$ un voisinage de λ_0 tels que : $K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(y_0, b) \times \Lambda \subset V$.
On pose $M = \sup_K \|F\| < +\infty$ et $T = \min(a, \frac{b}{M})$.
$\Phi(\cdot, t_0, y_0, \cdot)$ est bien définie et continue sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times \Lambda$.

Exercice 3.17. (Démonstration de la proposition 8) Adapter la démonstration du théorème 3

On a obtenu la continuité par rapport aux paramètres : on va en déduire le résultat plus général de continuité par rapport aux conditions initiales et aux paramètres, l'idée étant de considérer les conditions initiales comme des paramètres.

Proposition 9. ***(Continuité en les conditions initiales et les paramètres)*** *Avec les mêmes notations que précédemment, si l'on pose pour tout* $\delta < \frac{\min(a,b)}{2}$, $T = \min(a-2\delta, \frac{b-2\delta}{M})$, *alors* Φ *est bien définie et continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T] \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}(y_0, \delta) \times \Lambda$

Exercice 3.18. (Démonstration de la proposition 9)
Posons $V = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}(y_0, \delta) \times \Lambda$ et $Q = [\delta - a, a - \delta] \times \bar{B}(0, b - \delta)$.
Soient enfin $\alpha > a - \delta$ et $R > b - \delta$ tels que $]t_0 - \delta - \alpha, t_0 + \delta + \alpha[\subset I$ et $B(y_0, R + \delta) \subset U$
On définit alors la fonction g sur $]-\alpha, \alpha[\times B(0, R) \times V$ par :

$$\forall (\tau, z; s, y, \lambda) \in Q \times V, g(\tau, z; s, y, \lambda) = F(\tau + s, z + y, \lambda)$$

1. Montrer que g est continue, lipschtzienne par rapport à la seconde variable sur $Q \times V$ et que $\sup_{Q \times V} \|g\| \leq M$.
2. En déduire que pour tout $(s, y, \lambda) \in V$, il existe une unique solution maximale de l'équation $z(\cdot; s, y, \lambda)$:

$$z' = g(\tau, z; s, y, \lambda) \tag{E1}$$

vérifiant la condition de Cauchy $(0, 0)$, et que son intervalle de définition contient $[-\tilde{T}, \tilde{T}]$ où $\tilde{T} = \min(a - \delta, \frac{b-\delta}{M})$.
3. Montrer que z est continue sur $[-\tilde{T}, \tilde{T}] \times V$
4. Montrer que pour tout $(s, y, \lambda) \in V$, l'application qui à $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ associe $y + z(t - s; s, y, \lambda)$ est solution de (E8) et conclure.

Supposons maintenant que F est de classe C^1, elle est aussitôt continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Proposition 10. ***(Régularité*** C^1***)*** *On suppose* F *de classe* C^1.
Soit $(t_0, y_0, \lambda_0) \in I \times U \times X$ *et* $K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(y_0, b) \times \bar{B}(\lambda_0, c)$ *un compact inclus dans* $I \times U \times X$.
Alors si l'on pose pour tout $\delta < \frac{\min(a,b)}{2}$, $T = \min(a - 2\delta, \frac{b-2\delta}{M})$ *où* $M = \sup_K \|F\|$, Φ *est bien définie et de classe* C^1 *sur* $[t_0 - T, t_0 + T] \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}(y_0, \delta) \times \bar{B}(\lambda_0, c)$

Remarque 8. Attention, la définition de K est différente, essentiellement car F est maintenant lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur tout voisinage **compact** de (t_0, y_0, λ_0)

Comme précédemment, la propriété 10 découle du lemme suivant :

Lemme 8. *Avec les mêmes notations que dans la propriété 10, et en posant* $T = \min(a, \frac{b}{M})$*.* $\Phi(\cdot, t_0, y_0, \cdot)$ *est bien définie et de classe* C^1 *sur* $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(\lambda_0, c)$*.*

Exercice 3.19. (Démonstration du lemme 8) F est C^1 donc a fortiori continue et lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur K. Donc, d'après la proposition 8, $\Phi(\cdot, t_0, y_0, \cdot)$ est bien définie et de classe C^0 sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(\lambda_0, c)$ et C^1 en t.
Il reste donc à montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}(\cdot, t_0, y_0, \cdot)$ existe et est continue. Pour cela, on va chercher à la définir comme solution d'une équation différentielle.
On pose $f = \Phi(\cdot, t_0, y_0, \cdot)$ On fixe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, et $\lambda \in B(\lambda_0, c)$, et on pose pour $t \in J_\lambda$ (où J_λ est l'intervalle de définition de $f(\cdot, \lambda)$)

$$A(t, \lambda) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, f(t, \lambda), \lambda) \right)_{1 \leq i,j \leq m} \quad \text{et } B(t) = \frac{\partial F}{\partial \lambda_{i_0}}(t, f(t, \lambda), \lambda)$$

1. Montrer que l'équation différentielle :

$$z' = A(t, \lambda)z + B(t) \tag{E1}$$

admet sur une unique solution maximale $z(\cdot, \lambda)$ vérifiant la condition de Cauchy $(t_0, 0)$ et que celle-ci est globale (donc en particulier bien définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$).
2. On pose pour $t \in t_0 - T, t_0 + T]$, et $h \in]-c, c[$, $\phi(t, h) = f(t, \lambda + he_j) - f(t, \lambda) - hz(t, \lambda)$. Montrer qu'on a une inégalité :

$$\|\phi(t, h)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s, \lambda)\| \|\phi(s, h)\| ds + \int_{t_0}^{t} R(s, h) ds$$

avec $0 \leq R(s, h) \leq \epsilon_1(h)\phi(s) + |h|\epsilon_2(h)$ où ϵ_1 et ϵ_2 sont des fonctions tendant vers 0 quand h tend vers 0.
3. En déduire que l'existence d'une fonction ϵ_3 vérifiant la même hypothèse, telle que pour tout $t \in t_0 - T, t_0 + T]$, $\phi(t, h) = h\epsilon_3(h)$
4. En déduire que pour tout $t \in t_0 - T, t_0 + T]$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(t, \lambda)$ existe et vaut $z(t, \lambda)$, puis conclure.

On peut montrer par récurrence la proposition suivante :

Proposition 11. ***(Régularité*** C^k***)*** *Soit* $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *Si* F *est de classe* C^k*, alors, avec les mêmes notations* Φ *est de classe* C^k*, et même de classe* C^{k+1} *en* t*.*

Remarque 9. Le passage à la régularité C^∞ se fait bien car T, δ, M, a, b et c ne dépendent pas de k.

II Equations différentielles linéaires

II.1 Généralités

Dans toute la suite m est un entier naturel non nul, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $A \in C^0(I, M_m(\mathbb{R}))$ et $b \in C^0(I, \mathbb{R}^m)$.

Théorème 9. ***(Cauchy-Lipschitz linéaire)*** *On considère l'équation différentielle :*

$$y' = A(t)y + B \tag{E2}$$

Les solutions maximales de (E11) *sont globales et forment un espace affine (vectoriel si* $B = 0$*) de dimension* m*.*

Remarque 10. On obtient des résultats similaires dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \tag{E3}$$

grâce à la remarque 1 en considérant l'équation (E11) dans le cas où :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{(0)} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{(0)} & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Précisons le théorème 9 (dont la démonstration est laissée en exercice) :

Définition 9. Si $B = 0$, l'équation (E11) est dite homogène.
L'équation différentielle linéaire homogène associée à (E11) est l'équation différentielle vectorielle :

$$y' = A(t)y \tag{E4}$$

Définition 10. (Résolvante) Soit $s \in I$. On note $R(\cdot, s)$ la solution maximale (globale) de l'équation différentielle matricielle :

$$M' = A(t)M \tag{E5}$$

vérifiant la condition de Cauchy $(s, Id_{\mathbb{R}^m})$.
On appelle résolvante de l'équation (E13) l'application $R(\cdot, \cdot)$ de I^2 dans $M_m(\mathbb{R})$.

Proposition 12. *Soit* $(s, t, u) \in I^3$*. Alors, on a les propriétés suivantes :*

1. $R(s,t)R(t,u) = R(s,u)$
2. $R(s,t) \in GL_m(\mathbb{R})$ *et* $R(s,t)^{-1} = R(t,s)$
3. $R \in C^1(I^2, M_m(\mathbb{R}))$
4. $\frac{\partial R}{\partial t}(t,s) = A(t)R(t,s)$ *et* $\frac{\partial R}{\partial s}(t,s) = -R(t,s)A(s)$
5. *Si* A *est constante, alors* $R(t,s) = e^{(t-s)A}$
6. *La solution globale* (I, f) *de l'équation* (E11) *vérifiant la condition de Cauchy* (t_0, y_0) *est définie par :*

$$\forall t \in I, f(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds$$

7. *Pour tout $t_0 \in I$, l'application de $\mathbb{R}^m$ dans l'ensemble des solutions globales de* (E13) *qui à $y_0 \in \mathbb{R}^m$ associe $R(\cdot, t_0)y_0$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Remarque 11. Dans le cas où $A \in M_n(\mathbb{C})$ est constante, on calcule facilement la résolvante à l'aide de la décomposition de Dunford de A :

$$A = D + N$$

avec D diagonalisable, N nilpotente commutant avec D (voir proposition 17).
Soit alors $P \in GL_m(\mathbb{C})$ et Δ diagonale tels que : $D = P^{-1}\Delta P$.
PNP^{-1} est encore nilpotente et commute avec Δ, donc :

$$R(t,s) = e^{(t-s)A} = P^{-1}e^{(t-s)(\Delta+PNP^{-1})}P = P^{-1}e^{(t-s)\Delta}Pe^{tN} = P^{-1}e^{(t-s)\Delta}P\sum_{k=0}^{m}\frac{t^kN^k}{k!}$$

Si m_λ est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ, alors la restriction de N au sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ est nilpotente d'ordre au plus m_λ.

Exercice 3.20. Démontrer la proposition 12

Remarque 12. Il est très tentant de vouloir généraliser les points 5, 6 et 7 en affirmant que :

$$\forall (t_0, t) \in I^2,\ R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$$

et qu'en particulier la solution globale (I, f) de l'équation différentielle homogène (E13) vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0) est définie par :

$$\forall t \in I,\ f(s) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}y_0$$

C'est malheureusement faux en général dès que $m \geq 2$ comme l'exemple de l'application continue $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, vérifier (exercice) qu'on a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\int_0^t A(s)ds = \begin{pmatrix} t & e^t - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{(e^t-1)^2}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mais que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ R(t,0) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 11. (Wronskien) Soit $y_1, \ldots, y_m$ m solutions globales de l'équation différentielle (E13). On appelle matrice wronskienne associée à $(y_1, \ldots y_m)$ l'application de I dans $M_m(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in I,\ W(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ y_1(t) & \cdots & y_m(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

On appelle wronskien de $y_1, \ldots, y_m$ le determinant de $W(t)$.
Dans le cas des équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre n, la matrice wronskienne (resp. le wronskien) associée à n solutions $(y_1, \ldots, y_n)$ de (E12) est la matrice (resp. son déterminant) associée aux vecteurs définis par :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ Y_i = \begin{pmatrix} y_i \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Définition 12. (Système fondamental de solutions) On dit que m solutions globales de (E13) forment un système fondamental de solutions de (E13) si elles sont linéairement indépendantes (donc forment une base de l'espace des solutions globales)

Proposition 13. *Soit $y_1, \ldots, y_m$ m solutions de l'équation différentielle* (E13)*, et w le wronskien associé. Alors :*

$$\forall t_0 \in I, w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds}$$

En particulier, le wronskien est soit toujours soit jamais nul.
Dans le cas d'un système fondamental de solutions de (E13)*, on a :*

$$\forall (s,t) \in I, R(t,s) = W(t)W(s)^{-1}$$

Exercice 3.21. (Démonstration de la proposition 13) Montrer la proposition 13 en cherchant l'équation différentielle que vérifie w.

Remarque 13. D'après le point 7 de la proposition 12, on savait déjà que le wronskien était soit toujours, soit jamais nul : m solutions globales de (E11) forment un système fondamental de solutions si et seulement s'il existe un point tel que leurs valeurs en ce point sont linéairement indépendantes si et seulement leurs valeurs en tout point sont linéairement indépendantes. En fait, on sait même mieux, toujours grâce à la proposition 12 : la dimension de l'espace engendré par leurs valeurs en un point est indépendante du point choisi, et c'est la dimension de l'espace engendré par les solutions.

Remarque 14. Dans le cas de l'équation différentielle scalaire d'ordre n (E12), on a :

$$\forall t \in I,\ w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds}$$

Exercice 3.22. (Un peu de calcul)[G, D]

Discuter l'existence de solutions et déterminer explicitement les solutions maximales réelles sur leur intervalle de définition pour :

(a) : $y' + y = \sin(t)$ **(b)** : $(1+t^2)y' = ty + (1+t^2)$
(c) : $(1-t^2)y' + ty = 0$ **(d)** : $y'' + 2y' + y = te^t$
(e) : $y'' - 2y' + 2y = e^t cos(t)$ **(f)** : $y'' + y = \tan(t)^2$
(g) : $t^2y'' - 2y = 3t^2$ **(h)** : $t^2y'' + aty' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ (Euler)
(i) : $y'' + \frac{1}{t}y' + y = 0$ (Bessel)

$$\textbf{(j)} : \left\{ \begin{array}{l} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{array} \right. \qquad \textbf{(k)} : \left\{ \begin{array}{l} x'' + x' + 4y' - x - 3y = 0 \\ y'' - 3y' + x + 3y = 0 \end{array} \right.$$

II.2 Régularité des solutions

Proposition 14. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ $n+1$ fonctions continue de I dans $\mathbb{R}$ développables en séries entières au voisinage de 0.*
Alors toute solution globale de l'équation différentielle linéaire réelle d'ordre n (E12) *est développable en série entière au voisinage de 0.*
Mieux, si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et b coïncident sur I avec les sommes de séries entières de rayon de convergence tous supérieurs à un réel R, alors toute solution globale coïncide sur I avec la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur à R.

Exercice 3.23. (Démonstration de la proposition 14) Il suffit de montrer le deuxième point. Pour simplifier les notations, on supposera $n = 1$. La démonstration est analogue pour les ordres supérieurs.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la somme de la série entière associée soit solution sur $]-R, R[$ de l'équation (E12).

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite réelle vérifiant la condition de la question précédente. Montrer qu'alors la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R, puis conclure.

Indication : on rappelle la définition du rayon de convergence R_c de la série entière $\sum a_n x^n$:
$R_c = \sup\{r \geq 0, (|a_n r^n|)_n \text{ est bornée}\}$

II.3 Théorèmes de Sturm

Exercice 3.24. Soit α et β deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha(t)y' + \beta(t)y = 0 \tag{E1}$$

1. (Variation de la constante). Montrer que si v sont une solutions globale de l'équation différentielle homogène associée à (E15) et u est une solution globale de (E15) alors sur

tout intervalle ouvert J sur lequel v ne s'annule pas, la dérivée de la fonction λ définie sur J par $\lambda = \frac{u}{v}$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (dépendant de v et v')
2. Montrer que les zéros d'une solution non nulle de (E15) sont isolés. En déduire qu'une solution globale non nulle de (E15) n'a qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de I.
3. Montrer que si $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, il existe une fonction $b \in C^2(I, \mathbb{R})$ et $q \in C^0(\mathbb{R})$ telle que y est une solution globale de (E15) si et seulement $z = by$ est solution globale de :

$$z'' + q(t)z = 0 \quad (E_q)$$

4. Montrer que si (u, v) est un système fondamental de solutions de (E_q), alors le wronskien associée à (u, v) est constante non nul.

Dans toute la suite, on considèrera l'équation différentielle (E_q) avec $q \in C^0(I, \mathbb{R})$. On remarquera que grâce à la première question de l'exercice précédent, on peut parler de zéros consécutifs d'une solution non nulle de (E_q).

Théorème 10. ***(Sturm)*** *Soit $q, r \in C^0(I, \mathbb{R})$, telles que $q \leq r$, et u (resp. v) une solution globale de (E_q) (resp. (E_r)). Alors, si $u \neq 0$, et x_0, x_1 sont deux zéros consécutifs de u, alors v s'annule sur $[x_0, x_1]$. Mieux, si $v(x_0) = 0$, v s'annule sur $]x_0, x_1]$.*
Si $q = r$, et que u et v ne sont pas proportionnelles, alors v s'annule en exactement un point de $]x_0, x_1[$: les zéros de u et v sont alternés.

Exercice 3.25. (Démonstration du théorème 10) Démontrer le théorème 10 en considérant le wronskien généralisé de u et v (qui ne sont pas solutions de la même équation différentielles si $q \neq r$) : $W(u, v) = u'v - uv'$.

Corollaire 2. *S'il existe $M > 0$, tel que $q \leq M$ (resp. $q \geq M$) alors si x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs d'une solutions de (E_q), on a :*

$$x_1 - x_0 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}} \ \textit{(resp. } x_1 - x_0 \leq \frac{\pi}{\sqrt{M}}\textit{)}$$

De plus, si $I = \mathbb{R}$ et q est minorée par $M > 0$, alors toute solution globale admet une infinité de zéros, et si $q \leq 0$, alors toute solution non nulle admet au plus un zéro.

Exercice 3.26. Montrer que si $q \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une solution globale de (E_q) non bornée sur $\mathbb{R}$. On montrera pour cela que la dérivée toute solution globale bornée de (E_q) admet une limite en $+\infty$, et on fera intervenir le wronskien d'un système fondamental.
Exercice 3.27. Montrer que si $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_-$, il existe des solutions globales de (E_q) non bornées et d'autres bornées non nulles.
On pourra montrer pour cela l'existence d'une solution f sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f(t) \geq t$ pour $t \geq 1$. Pour déterminer l'existence d'une solution bornée non nulle, on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante.

Théorème 11. ***(Sturm périodique)*** *On suppose $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. On a l'alternative suivante :*

(i) Toute solution globale de (E_q) non nulle admet au plus un zéro

(ii) Toute solution globale de (E_q) admet une infinité de zéro

De plus, si $q \leq 0$, on est dans le premier cas. Si $q \geq 0$ et $q \neq 0$ on est dans le second.

Exercice 3.28. (Démonstration du théorème 11)

1. Montrer que s'il existe une solution globale non nulle admettant au moins deux zéros, alors elle s'annule une infinité de fois.

2. En déduire que dans ce cas, toute solution globale admet une infinité de zéros.

3. Montrer que si $q \geq 0$ et $q \neq 0$ alors on peut construire une solution globale non nulle de (E_q) qui admet au moins deux zéros, et conclure.

III Étude qualitative des équations différentielles autonomes

III.1 Généralités

Dans toute la suite, m est un entier naturel non nul, U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $F : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1. F est alors alors aussitôt localement lipschitizienne en la seconde variable, et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 4), l'équation différentielle autonome :

$$y' = F(y) \tag{E1}$$

admet une unique solution maximale vérifiant une condition de Cauchy $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times U$ donnée.

Remarque 15. Soit $y_0 \in U$, et (J, f) la solution maximale de (E16) vérifiant la condition de Cauchy $(0, y_0)$. Alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la solution maximale vérifiant la condition de Cauchy (t_0, y_0) est $(t_0 + J, f(\cdot - t_0))$.

Définition 13. (Orbite, trajectoire) On appelle orbite (ou trajectoire) de l'équation différentielle (E16) la projection du graphe d'une solution maximale sur $\mathbb{R}^m$.
L'orientation d'une trajectoire est le sens dans lequel elle est parcourue par les solutions dont elle est la projection.

Remarque 16. Soit $y_0 \in U$. D'après la remarque 15, y_0 est dans une orbite si et seulement si cette orbite est la projection sur $\mathbb{R}^m$ de la solution maximale vérifiant la condition de Cauchy $(0, y_0)$.
D'après la théorème de Cauchy-Lipschitz, les orbites sont donc non vides, deux à deux disjointes et leur union est égale à U tout entier : elles forment donc une partition de U.

Définition 14. (Point d'équilibre) Soit $y_0 \in U$.
On dit que y_0 est un point d'équilibre (ou point critique) de l'équation différentielle autonome (E16) si $F(y_0) = 0$.

Remarque 17. Si $y_0 \in U$ est un point d'équilibre, la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à y_0 est la solution maximale de (E16) vérifiant la condition de Cauchy $(0, y_0)$: l'orbite de y_0 est réduite à $\{y_0\}$, ce qui explique son nom.
Quant au nom de point critique, il est dû au fait qu'au voisinage de tout point y_r non critique (point régulier), les orbites sont les images par un difféomorphisme local de droites parallèles (voir par exemple [ZQ], p. 374 pour plus de détails) de direction $F(y_r)$: l'étude qualitative des trajectoires de (E16) n'est complexe qu'au voisinage des points critiques.

Définition 15. Pour tout $y \in U$, on note $(]T_*(y), T^*(y)[, \Phi(\cdot, y))$ la solution maximale de (E16) vérifiant la condition de Cauchy $(0, y)$ Soit $y_0 \in U$ un point d'équilibre de l'équation différentielle autonome (E16). On dit que y_0 est :

1. **stable** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in U, \|y - y_0\| \leq \delta \Rightarrow (T^*(y) = +\infty \text{ et } \forall t \geq 0, \ \|\Phi(t, y) - y_0\| \leq \epsilon)$$

2. **asympotiquement stable** si :

$$\exists \delta > 0, \forall y \in U, \|y - y_0\| \leq \delta \Rightarrow \left(T^*(y) = +\infty \text{ et } \Phi(t, y) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y_0\right)$$

3. **instable** s'il n'est pas stable.

Remarque 18. Un point asympotiquement stable est stable.
Le voisinage d'un point stable est une zone piège : toute trajectoire qui y rentre ne peut plus en ressortir.

Remarque 19. Au voisinage d'un point critique y_0, F est approximée par le premier ordre de son développement de Taylor $dF_{y_0}(y - y_0)$. La démarche naturelle dans l'étude qualitative des trajectoires de (E16) est de commencer par l'étude qualitative des équations différentielles linéaires, ce que l'on fera dans les parties III.2 et III.3 , avant de tenter une approche des équations différentielles non linéaires dans III.4 .

III.2 Étude qualitative des équations différentielles linéaires autonomes au voisinage de 0

On considère l'équation différentielle linéaire vectorielle :

$$y' = Ay \tag{E$_\text{A}$}$$

où $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Théorème 12. ***(Stabilité de l'origine)***

1. *0 est stable ssi pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $\mathcal{R}e(\lambda) \leq 0$, et $\mathcal{R}e(\lambda) < 0$ si $Ker(A - \lambda Id) \neq Ker(A - \lambda Id)^2$.*

2. 0 *est asymptotiquement stable si et seulement si pour tout* $\lambda \in Sp(A)$*,* $\mathcal{R}e(\lambda) < 0$*.*

La résolvante de l'équation différentielle ($\mathrm{E_A}$) étant connue, la démonstration de ce théorème repose sur le lemme des noyaux et la décomposition de Dunford. On les rappelle donc :

Proposition 15. ***(Lemme des noyaux appliqué au polynôme caractéristique)*** *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$*. Soit* $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ *les valeurs propres distinctes de* A*, et soit pour* $i \in \{1, \ldots, p\}$*,* m_i *la multiplicité algébrique de* λ_i*.*
Alors $\mathbb{C}^n$ *est somme directe de ses sous-espaces caractéristiques :*

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} Ker(A - \lambda_i)^{m_i}$$

Proposition 16. ***(Noyaux itérés)*** *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *un valeur propre de* A *et* m *la multiplicité algébrique de* λ*. Alors, la suite définie par :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, K_p = Ker(A - \lambda)^p$$

est strictement croissante jusqu'à un certain rang $p_{\max} \leq m-1$ *(i.e.* $\forall p \leq p_{\max}, K_p \subsetneq K_{p+1}$*) puis stationnaire à partir du rang* $p_{\max} + 1$*.*
K_m *est de dimension exactement* m *et s'appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre* λ*.*

Proposition 17. ***(Décomposition de Dunford)*** *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$*, alors il existe un matrice* D *diagonalisable et une matrice* N *nilpotente commutant avec* D*, telles que* $A = D + N$*.*
De plus, une telle décomposition est unique, et la restriction de D *au sous-espace caractéristique associé à une valeur propre* λ *de* A *est l'homothétie de rapport* λ*.*

Exercice 3.29. (Démonstration du théorème 12) Démontrer le théorème 12 à partir des propositions précédemment rappelées et de la remarque 11.

III.3 Étude qualitatives des équations différentielles linéaires autonomes (dans $\mathbb{R}^2$)

Dans toute la suite, on se limitera à l'étude qualitative des trajectoires de l'équation différentielle linéaire vectorielle :

$$y' = Ay \qquad (\mathrm{E_A})$$

où $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Les points d'équilibre de l'équation différentielle ($\mathrm{E_A}$) sont les vecteurs du noyau de A.

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$$

Avant de procéder à l'étude qualitative des solutions de ($\mathrm{E_A}$), faisons la remarque préliminaire suivante :

Remarque 20. $(\mathbb{R}, f)$ est une solution de $(\mathrm{E_A})$ si et seulement $(\mathbb{R}, f(-\cdot))$ est une solution de $(\mathrm{E_{-A}})$, d'où l'on peut déduire que : $(\mathrm{E_A})$ et $(\mathrm{E_{-A}})$ ont les mêmes trajectoires, parcourues dans des sens opposés.

III.3.1 Cas où $\det(A) < 0$

A admet 2 valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2. Soit $(\mathbb{R}, f)$ une solution globale de $(\mathrm{E_A})$. Il existe deux réels C_1 et C_2 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

L'origine 0 est le seul point d'équilibre, il est instable et on dit dans ce cas que c'est un **col** :
Les demi-droites ouvertes de direction v_1 sont des trajectoires orientées vers 0.
Les demi-droites ouvertes de direction v_2 sont des trajectoires orientées vers l'infini.
Les autres trajectoires non réduites à 0 partent pour $t \to -\infty$ asymptotes à v_1 et, pour $t \to +\infty$ asymptotes à v_2.

III.3.2 Cas où $\det(A) > 0$

III.3.2.a Si $4\det(A) < Tr(A)^2$

A admet 2 valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$. Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2. Soit $(\mathbb{R}, f)$ une solution globale de (E16). Il existe deux réels C_1 et C_2 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

1. si $Tr(A) > 0$, alors $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
   L'origine 0 est le seul point d'équilibre, il est instable et on dit que c'est un **noeud répulsif**.
   Les demi-droites ouvertes de direction v_1 ou v_2 sont des trajectoires orientées vers l'infini.
   Toutes les autres trajectoires non réduites à 0 partent de l'origine tangentiellement à v_1 quand $t \to -\infty$ et s'éloignent à l'infini lorsque $t \to +\infty$. Elles ont une branche parabolique dans la direction du vecteur v_2
2. si $Tr(A) < 0$, alors $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.
   L'origine 0 est le seul point d'équilibre, il est asymptotiquement stable et on dit que c'est un **noeud attractif**.
   D'après la remarque 20, c'est comme un noeud répulsif où on aurait inversé le temps : les trajectoires sont les mêmes que pour un noeud répulsif, mais parcourues dans le sens opposé : les demi-droites ouvertes de direction v_1 ou v_2 sont des trajectoires orientées vers l'origine, et toutes les autres trajectoires non réduites à 0 tendent vers l'origine tangentiellement à v_2 quand $t \to +\infty$ et partent de l'infini lorsque $t \to -\infty$.

Elles ont une branche parabolique en $-\infty$ dans la direction du vecteur v_1

III.3.2.b Si $4\det(A) > Tr(A)^2$

A admet deux valeurs propres complexes conjuguées, $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, où :

$$2\alpha = Tr(A) \text{ et } 2\beta = \sqrt{4\det(A) - Tr(A)^2}$$

Soit $v = w_1 - iw_2$ un vecteur propre associé à $\alpha + i\beta$, avec $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$.
La matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base (w_1, w_2) est :

$$A_1 := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ qui vérifie } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA_1} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

L'origine 0 est le seul point d'équilibre. On distingue alors trois cas :

1. $Tr(A) < 0$: l'origine est asymptotiquement stable et on dit que c'est un **foyer attractif**. Les trajectoires sont des spirales autour de l'origine qui se dirige vers celle-ci.
2. $Tr(A) > 0$: l'origine est instable et on dit que c'est un **foyer répulsif**. Les trajectoires sont des spirales autour de l'origine qui s'éloigne de celle-ci.
3. $Tr(A) = 0$: l'origine est stable et on dit que c'est un **centre**. Toutes les solutions sont périodiques et les trajectoires sont des ellipses de centre 0. Si on note P la matrice de passage de la base (w_1, w_2) à la base canonique, et R un réel strictement positif, les équations de ces ellipses sont de la forme : $\|Py\| = R^2$ (ces équations définissent bien des ellipses car $y \mapsto \|Py\|$ est une forme quadratique définie positive).
   Si la matrice P est orthogonale, les trajectoires sont des cercles. Sinon, ce sont des ellipses dont les axes sont les directions propres de ${}^tPP$, orthogonales car la matrice ${}^tPP$ symétrique définie positive.

III.3.2.c Si $4\det(A) = Tr(A)^2$

A admet une valeur propre double réelle non nulle $\lambda = \frac{1}{2}Tr(A)$.
L'origine est toujours le seul point d'équilibre. On distingue deux cas :

1. $A = \frac{1}{2}Tr(A)I_2$
   Les solutions de $(\mathrm{E_A})$ vérifient :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = y_0 e^{\lambda t}$$
   Les trajectoires sont des demi-droites orientées vers 0 si $Tr(A) < 0$ (on dit dans ce cas que l'origine est un **puits**) et vers l'infini si $Tr(A) > 0$ (l'origine est une **source**)
2. Sinon, A admet un seul vecteur propre v_1. Soit v_2 un vecteur indépendant de v_1. Dans la base (v_1, v_2), l'endomorphisme associé à A admet pour matrice
   $$A_1 := \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ qui vérifie } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA_1} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si $Tr(A) < 0$, l'origine est asymptotiquement stable, et on dit que c'est un **noeud dégénéré attractif**.
Les demi-droites ouvertes de direction v_1 sont des trajectoires orientées vers 0. Les autres trajectoires non réduites à 0 partent de l'origine tangentiellement à v_1 et partent à l'infini avec une branche parabolique de direction du vecteur v_1.

(ii) Si $Tr(A) < 0$, l'origine est instable et on dit que c'est un **noeud dégénéré répulsif**. Les trajectoires sont les mêmes que pour un noeud dégénéré attractif, orientées dans le sens opposé.

III.3.3 Cas où $\det(A) = 0$

Si $A = 0$, tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont des points d'équilibres, et donc toutes les trajectoires de $(\mathrm{E_A})$ sont réduites à un point.
On suppose donc dans la suite que $A \neq 0$.

III.3.3.a Si $Tr(A) = 0$

0 est une valeur propre de multiplicité 2. Les points d'équilibre sont les points de la droite $\mathrm{Ker}(A)$
Les autres trajectoires sont les droites parallèles à $\mathrm{Ker}(A)$. Leur orientation change selon le demi-plan ouvert délimité par $\mathrm{Ker}(A)$ dans lequel elles se trouvent.

III.3.3.b Si $Tr(A) \neq 0$

Alors A possède un valeur propre nulle et une réelle non nulle $\lambda = Tr(A)$. Elle possède dont une base de vecteurs propres (v_1, v_2) où v_1 est associé à la valeur propre 0 et v_2 à la valeur propre λ. Soit alors $(\mathbb{R}, f)$ une solution globale de l'équation différentielle $(\mathrm{E_A})$. Il existe des réels C_1 et C_2 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C_1 v_1 + C_2 e^{\lambda t} v_2$$

Les points d'équilibre sont les points de la droite $\mathrm{Ker}(A)$
Les autres trajectoires sont des demi-droites ouvertes de direction v_2 issues ou se dirigeant vers un de ces points critiques selon le signe de $Tr(A)$. Si $Tr(A) > 0$, tous les points d'équilibres sont instables. Si $Tr(A) < 0$, ils sont tous asymptotiquement stables.

Remarque 21. On peut résumer ces résultats sur un diagramme de bifurcation dans le plan $(\mathrm{tr}(A), \det(A))$ (voir [HW] p.324 ou [Re] p.81).

III.4 Étude qualitative des équations différentielles autonomes

Dans toute la suite, m est un entier naturel non nul, U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $F : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1. On considère l'équation différentielle autonome :

$$y' = F(y) \tag{E16}$$

III.4.1 Au voisinage des points d'équilibre

Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation (E16).
Quitte à changer F en $F(\cdot + x_0)$, on peut supposer sans perte de généralité que $x_0 = 0$. Citons le théorème de linéarisation suivant :

Théorème 13. ***(Linéarisation)*** *On suppose que* 0 *est un point d'équilibre de* (E16) *et que toutes les valeurs propres de* d_0F *ont une partie réelle non nulle. Alors les trajectoires de* (E16) *sont localement homéomorphes au voisinage de* 0 *aux trajectoires de l'équation linéarisée* (E_{d_0F})

Remarque 22. Dans $\mathbb{R}^2$, si F est C^1, si $F(a) = 0$ et si d_aF est inversible,

— Si a est un foyer pour (E_{d_aF}), a est un foyer de même nature pour (E16).

— Si a est un col pour (E_{d_aF}), a est aussi un col pour (E16).

— Si a est un noeud pour (E_{d_aF}), a est un noeud de même nature pour (E16).

— Si a est un centre pour (E_{d_aF}), on ne peut pas conclure : a est soit un centre soit un foyer attractif ou répulsif pour (E16).

Ce théorème est difficile à démontrer : il est cité à titre d'information et on renvoie à [P] pour sa démonstration. On se contentera ici d'un cas particulier et d'un contre-exemple dans le cas d'hypothèses moins fortes (tirés de [Re])

Exercice 3.30.
1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Soit $\mu \in]0, \min\left(-\mathcal{R}e(Sp(A))\right)[$. Montrer qu'il existe $C > 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}\| \leq Ce^{-\mu t}$$

2. On suppose que $F(0) = 0$, et que toutes les valeurs propres de $A = d_0F$ ont une partie réelle strictement négative.
Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y_0 \in U$ avec $\|y_0\| < \delta$, la solution maximale de l'équation différentielle (E16) vérifiant la condition de Cauchy $(0, y_0)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et tend expontentiellement vers zéro quand $t \to +\infty$.
On pourra utiliser la formule de variation de la constante sur $y' = Ay + [F(y) - Ay]$.

Exercice 3.31. (Où le linéarisé ne peut conclure) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S) \begin{cases} x' = y + \alpha(x^3 + 2xy^2) \\ y' = -x + \alpha y^3 \end{cases}$$

1. On suppose $\alpha = 0$. Quelles sont les solutions maximales de (S) ?

2. On suppose $\alpha \neq 0$. Pour une solution (x, y) maximale de (S) vérifiant la condition de Cauchy $(0, (x_0, y_0))$, on définit $V = x^2 + y^2$.
Quelle équation différentielle vérifie V ? Expliciter V.

3. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que pour toute donnée initiale non nulle, la solutions maximale vérifiant la condition de Cauchy associée à cette donnée initiale a un temps maximale d'existence T^* et tend vers l'infini en norme lorsque $t \to T^*$.

4. On suppose $\alpha < 0$. Montrer que toutes les solutions maximales de (S) sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et tendent vers $(0,0)$ lorsque $t \to +\infty$.

III.4.2 Portraits de phase des systèmes 2×2

Soit f et g des fonctions C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On considère le système autonome :

$$(\Sigma) \begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y). \end{cases}$$

On cherche maintenant à déterminer l'allure globale des solutions de (Σ) et non plus seulement leur comportement au voisinage des points d'équilibre.

Définition 16. (Portrait de phase) On appelle portrait de phase de (Σ) l'ensemble des trajectoires orientées (par le sens de parcours) de (Σ).
Dans la pratique, on dit qu'on a dessiné le portrait de phase de (Σ) lorsqu'on a tracé assez de courbes orientées pour deviner les autres.

Exemple 2. Le portrait de phase du système suivant est formé de cercles centrés en zéro, orientés dans le sens positif.

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Remarque 23. Pour les équations scalaires du second degré, le portrait de phase fait référence au système 2×2 du premier ordre associé. On trace donc le profil des solutions dans le plan (y, y').

III.4.2.a Comment dessiner le portrait de portrait de phase de (Σ) ?

Remarque 24. La trajectoire de (Σ) passant par une point régulier (x_0, y_0) est tangente au **vecteur vitesse** $(f(x_0,y_0), g(x_0,y_0))$: on s'intéresse donc surtout à la direction de ce vecteur.

On dresse ici une liste non exhaustive des étapes à suivre :

(i) Déterminer les **points d'équilibre** du système et leur nature, en utilisant le théorème de linéarisation (théorème 13) dans les cas où il s'applique.

(ii) Tracer les **isoclines** sur lesquelles la pente des trajectoires est constantes :
Si $m \in \bar{\mathbb{R}}$, $I_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 g(x,y) = mf(x,y)\}$.
En particulier, I_0 est l'isocline horizontale, et I_∞ est l'isocline verticale. L'intersection de ces deux isoclines est l'ensemble des points d'équilibre.
Remarquons que si I_m est une droite de pente m alors c'est une solution particulière du système (Σ).

(iii) Dans chaque **région délimitée par les isoclines horizontales et verticales**, f et g ont un signe constant, on représente dans chaque région du plan une flèche qui donne la direction générale des trajectoires : $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$ ou $\nwarrow$.

(iv) On examine les **symétries** (par rapport aux axes, à l'origine,...) : par exemple si f est impaire par rapport à la première variable et g est paire par rapport à la première variable (ou l'inverse), alors le portrait de phase est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(v) On détermine les zones pièges (voisinage d'un point d'équilibre stable, champ des flèches rentrant sur tous les côtés de la zone,...)

(vi) On détermine le comportement à l'infini des trajectoires : a-t-on un asymptote ? une branche parabolique ?

(vii) Essayer de **tracer quelques trajectoires** compatibles avec ces renseignements et permettant de deviner l'allure de toutes les trajectoires.

Remarque 25. Rappellons que (f, g) vérifie les conditions de Cauchy, donc les trajectoires ne se coupent pas.

Exercice 3.32. Tracer le portrait de phase du système

$$\begin{cases} x' = y - x - 2, \\ y' = x^2 - y. \end{cases}$$

Exercice 3.33. (Système proie-prédateur de Lotka-Volterra, [CLF]) Soit a, b, c, d quatre réels strictements positifs. On considère le système :

$$(S) \begin{cases} F' = aF - bFP \\ P' = -cP + dPF \end{cases}$$

Soit $F(t)$ le nombre de sardines (F pour Food) et $P(t)$ (P pour Predator) le nombre de requins à l'instant t dans une région donnée. Les sardines se reproduisent naturellement avec un taux d'accroissement $a > 0$, et les requins meurent en l'absence de sardines avec un taux de mortalité $c > 0$. Le terme quadratique prend en compte la probabilité de rencontre, qui conduit inexorablement à la mort de la sardine pour nourrir le requin.

1. Discuter l'existence de solutions à (S).

2. Montrer que, si $F_0 > 0$ et $P_0 > 0$, la solution maximale de condition initiale (F_0, P_0) vérifie $F(t) > 0$ et $P(t) > 0$ pour tout t dans son intervalle de définition. En déduire qu'elle est globale.

3. Soit H définie sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ par $H(F, P) := bP + dF - a\ln(P) - c\ln(F)$.
Montrer que H est une intégrale première de (S) (*i.e.* constante le long des trajectoires).

4. En utilisant le portrait de phase de (S) montrer que toute solution maximale de (S) de condition initiale $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ est périodique.
On pourra montrer que les solutions maximales sont bornées et parcourent successivement les 4 zones de $\mathbb{R}_+^{*2}$ délimitées pas les isoclines verticales et horizontales.

5. Calculer les valeurs moyennes de x et y sur une période.

6. Quelle est l'influence de la pêche sur la population de sardines et de requins/ (on modélisera la pêche par une perturbation du système (S) constitant en une diminution de a et une augmentation de c)

Exercice 3.34. (Le pendule de Van der Pol, [CLF, Re])

On considère l'équation de Liénard, avec $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues,

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0.$$

1. Montrer que $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de cette équation si et seulement si c'est la première coordonnée d'une solution du système suivant, où F est la primitive de f qui s'annule en 0 :

$$(\Sigma) \begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x), \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes

— f est paire, $f(0) < 0$,

— F admet un unique zéro strictement positif a, est croissante pour $x \geqslant a$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$,

— g est localement lipschitzienne, impaire, $g(x) > 0$ pour $x > 0$.

2. Discuter l'existence de solutions du système (Σ). Quels sont ses points critiques ?

3. En utilisant le portrait de phase de (Σ), montrer que ces solutions rencontrent successivement les 4 cadrans $(x > 0, y > 0)$, $(x > 0, y < 0)$, $(x < 0, y > 0)$, $(x < 0, y < 0)$.

4. La trajectoire passant par $A = (0, \overline{OA})$ recoupe l'axe $(0y)$ pour la première fois en $C = (0, \overline{OC})$. Montrer que cette trajectoire correspond à une solution périodique si et seulement si $\overline{OA} = -\overline{OC}$.

5. Soit pour $\alpha \geq 0$, Γ_α la trajectoire qui passe $B_\alpha = (\alpha, F(\alpha))$. Notons A_α et C_α les premiers points où la trajectoire rencontre l'axe Oy avant et après B_α. On définit alors une fonction ϕ par $\phi(\alpha) = \int_{A_\alpha B_\alpha C_\alpha} F dy$. Montrer que $\phi(\alpha) > 0$ si $\alpha \leq a$, que ϕ est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$, et tend vers $-\infty$ en $+\infty$.
On pourra introduire les points D et E où $x = a$, et découper l'intégrale qui définit ϕ.

6. Montrer qu'il existe une unique orbite périodique non réduite à O. En déduire l'allure des trajectoires (on pourra étudier le comportement de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ où une trajectoire coupe la courbe $y = F(x)$).

Remarque 26. L'équation de Van der Pol est un cas particulier de l'équation de Liénard :

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad \mu > 0 \tag{E1}$$