Axiome du choix…ou pas.

Cyrille Hériveaux

AVERTISSEMENT : le propos ci-dessous n'est pas un cours de logique sur l'axiome du choix, mais plutôt un complément au cours-TD de topologie : il s'agit de voir l'axiome du choix du point de vue de l'analyse. En particulier, on n'y utilise que très informellement le paradigme de la théorie des ensembles : pour plus de rigueur de ce point de vue, vous pourrez lire les premiers chapitres du cours de P. Dehornoy ([D])

I Un peu de logique…

I.1 Le système ZF et les mathématiques usuelles

La théorie des ensembles traite, comme son nom l'indique, des ensembles. A défaut de les définir, on élabore un système d'axiomes (les "règles du jeu") qui définissent leurs propriétés. Parmi ces derniers, l'*axiome du vide* (l'ensemble vide existe), l'*axiome des parties* (l'ensemble des parties d'un ensemble existe et est unique) et l'*axiome de l'union* (Pour tout ensemble, il existe un unique ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de cet ensemble).
On définit les **ensembles purs** comme les ensembles construits à partir du vide, du passage à l'ensemble des parties, et du passage à l'union.

Exemple 1. $\underline{0} = \emptyset$, $\underline{1} = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\underline{2} = \mathcal{P}(\underline{1}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ et $\underline{\mathbb{N}}$ défini comme l'union de l'ensemble des $\underline{n}$ (qui existe : c'est l'*axiome de l'infini*) sont des ensembles purs.

La théorie des ensembles est alors justifié par la proposition (nécessairement informelle) suivante :

Proposition 1. ***([D], chap. 3)*** *Dans le système axiomatique de Zermelo-Fraenkel (ZF), tous les objets mathématiques usuels peuvent être représentés par des ensembles purs.*

Exemple 2. Le nombre n est représentée par sa copie $\underline{n}$ précédemment définie à l'intérieur des ensembles purs. L'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ par sa copie $\underline{\mathbb{N}}$. Les opérations usuelles (comme $<$, $+$,$\times$, …) peuvent alors être exprimées à l'intérieur des ensembles purs. On construit alors des copies de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, etc…

Le principe est le suivant : tout résultat vrai portant sur les copies des objets mathématiques dans l'intérieur des ensembles purs muni des axiomes ZF se transpose en un résultat vrai dans l'édifice mathématique usuel.
L'ensemble des axiomes ZF sont des règles supposées intuitivement vraies, hormis un qui est de nature différente : l'*axiome de fondation* qui dit que tout ensemble est pur, justifié par la proposition 1. On a alors la proposition (informelle) suivante :

Proposition 2. ***([D], chap. 3)*** *Si le système ZF est non contradictoire, il en est de même de l'édifice mathématique usuel.*

Seulement, par le second théorème d'incomplétude de Gödel, on ne peut pas montrer que le système ZF est non contradictoire à l'intérieur de ce système (sauf s'il est contradictoire). Mais c'est le cas de tout système d'axiomes dans lequel l'arithmétique peut être représentée.
Le système ZF est communément admis comme point de départ de la théorie des mathématiques, mais rien n'indique qu'il épuise notre intuition : certaines propriétés ne peuvent être ni démontrées ni réfutées à partir du système ZF. Dans ce cas, il faudra se poser la question d'ajouter un axiome au système : c'est le cas de l'**axiome du choix**.

I.2 Axiome du choix

Tout d'abord énonçons l'axiome du choix, qui affirme qu'il est légitime de répéter une infinité de fois une opération de choix, qui, prise individuellement, ne pose pas de problème.

I.2.1 Énoncé

Définition 1. (Fonction de choix) Soit A un ensemble d'ensembles. Une fonction de choix sur A est une fonction $f : A\backslash\{\emptyset\} \to \cup_{X\in A} X$ telle que pour tout $X \in A\backslash\{\emptyset\}$, $f(X) \in X$

Axiome 1. (Axiome du choix, AC) Pour tout ensemble d'ensembles A, il existe une fonction de choix sur A.

Remarque 1. On est sorti ici du langage des ensembles purs, dans lequel tout ensemble est un ensemble est un ensemble d'ensembles (le vide mis à part), pour faciliter la compréhension.

Citons enfin un énoncé de l'axiome du choix équivalent au premier :

Axiome 2. (Axiome du choix) Tout produit d'ensembles non vides est non vide.

I.2.2 L'axiome du choix est-il vrai ?

Théorème 1. ***(Gödel, 1938)*** *S'il est cohérent, le système ZF ne réfute pas l'axiome du choix, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de la négation de AC à partir des axiomes du système ZF.*

Théorème 2. ***(Cohen, 1963)*** *S'il est cohérent, le système ZF ne démontre pas l'axiome du choix, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de AC à partir des axiomes du système ZF.*

Définition 2. On note ZFC le système axiomatique composé de ZF et de AC.

La question "L'axiome du choix est-il vrai ?" n'est pas donc pas bien posée : on est libre de l'inclure, ou pas, dans notre système axiomatique sans apporter de contradiction. Cet axiome est très controversé : cela dépend de si l'on considère qu'on objet mathématique doit être explicitement défini, ou si l'on admet l'existence de tout ce que la pensée peut saisir, même sans description exhaustive.
Remarquons que s'il paraît intuitif que l'on peut faire une infinité de choix simultanément, que le produit d'ensembles non vides est non vide, le paradoxe de Banach-Tarski (dont un des multiples énoncés affirme qu'il existe une partition de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ en six parties telle que si l'on réarrange ces parties par des rotations, on obtient deux copies de la sphère initiale, voir [D], chap. 4. Ces parties ne sont en particulier pas Lebesgue-mesurables) ou le théorème de Zermelo (voir plus bas) sont, eux, beaucoup moins proches de l'intuition.
Aujourd'hui, il est usuel de se placer dans ZFC, mais du fait de la controverse autour de l'axiome du choix, les résultats l'utilisant n'ont pas la même qualité. Il convient d'en mentionner explicitement l'usage (et de l'éviter si possible), pour AC essentiellement (ses versions faibles, (ACD) et (AC_ω), étant beaucoup moins controversées)

Remarque 2. Le fait d'utiliser l'axiome du choix dans une démonstration ne prouve pas qu'il soit nécessaire de l'utiliser. Certains résultats fondamentaux (notamment en théorie de la mesure) ont d'abord été prouvé à l'aide l'axiome du choix, puis redémontré sans.

I.2.3 Axiome du choix...ou pas

To choose one sock from each of infinitely many pairs of socks requires the Axiom of Choice, but for shoes the Axiom is not needed (Bertrand Russel)

On reviendra sur ce point dans la partie portant sur l'utilisation de l'axiome du choix en analyse, mais mentionnons-le dès maintenant. Si E est un ensemble bien ordonnable (*i.e.* toute partie non vide de E admet un plus petit élément), il n'est pas nécessaire d'utiliser l'axiome du choix pour obtenir l'existence d'une fonction de choix sur $\mathcal{P}(E)$: il suffit d'associer à une partie non vide de E son plus petit élément.
C'est le cas en particulier pour un ensemble fini ou dénombrable : en effet, $\mathbb{N}$ est bien ordonnable (sans utiliser l'axiome du choix), et donc tout ensemble dénombrable peut être muni d'un bon ordre par transport de l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$.

En fait, on a même équivalence entre l'existence d'un bon ordre sur E (voir par exemple [D], chap. 4) et l'existence d'une fonction de choix sur $\mathcal{P}(E)$, d'où le théorème de Zermelo, équivalent à l'axiome du choix :

Théorème 3. ***Zermelo*** *Tout ensemble est bien ordonnable.*

I.2.4 Le lemme de Zorn

Le lemme de Zorn est probablement la version la plus utilisée de l'axiome du choix (il y est équivalent).

Définition 3. (Chaîne). Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $C \in \mathcal{P}(E)$ est une chaîne si C est un sous-ensemble totalement ordonné (*i.e.* les éléments de C sont deux à deux $\leq$-comparables, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in C^2$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$).

Définition 4. (Inductif) On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est inductif si toute chaîne E possède un majorant (dans E).

Lemme 4. ***(Zorn)*** *Tout ensemble ordonné $(E, \leq)$ inductif admet un élément maximal (i.e. un élément $x \in E$, tel que : $\forall y \in E, (x \leq y) \Rightarrow (x = y)$)*

I.2.5 Versions plus faibles

Définition 5. (relation binaire) Soit E un ensemble. Une relation binaire sur E est une partie de $E \times E$.
Pour $(x, y) \in E^2$, on écrit souvent xRy au lieu de $(x, y) \in R$.

Axiome 3. (Axiome des choix dépendants, ACD) Soit E un ensemble muni d'une relation binaire R vérifiant : $\forall x \in E, \exists y \in E, xRy$.
Alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n R x_{n+1}$.

Axiome 4. (Axiome du choix dénombrable, AC$_\omega$) Tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

Proposition 3.

$$(AC) \Rightarrow (ACD) \Rightarrow (AC_\omega)$$

Démonstration. Pour la première implication, soit F un fonction de choix sur $\mathcal{P}(E)$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence :

$$x_0 = F(E) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(\{x \in E, x_n R x\})$$

Pour la deuxième, si l'on considère le produit dénombrable $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, on définit S l'ensemble des fonctions f telles que le domaine $Dom(f)$ de f est un certain $\{1, \ldots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}$) et telles que $\forall n \in Dom(f), f(n) \in X_n$.
On munit S de la relation binaire : fRg si $Dom(f) \subsetneq Dom(g)$ et $g_{|Dom(f)} = f$.
(S, R) vérifie bien les conditions de (ACD). Il existe donc une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N}, f_m R f_{m+1}$. En confondant les fonctions avec leurs graphes, on définit bien une fonction par $f = \cup_{m \in \mathbb{N}} f_m$ (du fait de la compatibilité des f_m entre elles), et le domaine de f est nécessairement $\mathbb{N}$ tout entier : elle s'identifie à un élément du produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ qui est donc vide. $\square$

Remarque 3. Un produit fini d'ensembles non vides est toujours non vide, sans utiliser aucune forme de l'axiome de choix.
Par contre, le fait qu'un produit quelconque d'ensembles finis non vides est non vide n'est pas démontrable dans (ZF).

II L'axiome du choix en analyse

II.1 Le théorème de Tychonoff

Définition 6. (Quasi-compacité) On dit qu'un espace topologique est quasi-compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Remarque 4. Un espace topologique est compact si et seulement s'il est quasi-compact et séparé.

Remarque 5. Dans la littérature anglaise, la quasi-compacité n'existe pas : un espace topologique est dit compact s'il est quasi-compact.

Théorème 5. ***(Tychonoff)*** *Un produit d'espaces topologiques muni de la topologie produit est quasi-compact si et seulement si chacun des espaces du produit est quasi-compact.*

Théorème 6. ***(Tychonoff)*** *Un produit d'espaces topologiques muni de la topologie produit est compact si et seulement si chacun des espaces du produit est compact.*

Proposition 4. *Le théorème 5 est équivalent à l'axiome du choix.*

Remarque 6. Le théorème 6 se déduit du théorème 5 en remarquant que le produit d'espaces topologiques séparés est séparé. Il est équivalent à une version strictement plus faible de l'axiome du choix : le théorème de l'idéal principal booléen (BPI).

Exercice 2.1. (Démonstration du théorème 5 à partir de l'axiome du choix)
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de compacts, et X leur produit (muni de la topologie produit). Soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés de X, telle qu'une intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est toujours non vide. On va montrer que $\cap_{F\in\mathcal{F}}F$ est non vide.

1. On considère l'ensemble E des familles contenant $\mathcal{F}$ (au sens de l'inclusion) et dont les intersections finies d'éléments sont non vides. Montrer, en utilisant le lemme de Zorn, que E admet un élément maximal, noté $\mathcal{F}^*$.

Indication : Si $\mathcal{C}$ une chaîne de E, on montrera que $\cup_{\mathcal{C}\in\mathcal{C}}\mathcal{C}$ est un majorant de $\mathcal{C}$

2. Montrer que $\mathcal{F}^*$ est stable par intersection finie.

3. Montrer que si un élément intersecte tous les éléments de $\mathcal{F}^*$, alors il est dans $\mathcal{F}^*$.
Pour $i \in I$, note π_i sur la projection de X sur X_i.

4. Montrer que le produit $\prod_{i\in I}\cap_{A\in\mathcal{F}^*}\overline{\pi_i(A)}$ est non vide.

5. Soit $x \in \prod_{i\in I}\cap_{A\in\mathcal{F}^*}\overline{\pi_i(A)}$, et U un ouvert de $\prod_{i\in I} X_i$ contenant x.
Montrer que $U \in \mathcal{F}^*$

Indication : On pourra remarquer que si B et O sont deux parties d'un espace topologique telles que O est ouvert et : $\overline{B} \cap O \neq \emptyset$, alors $B \cap O \neq \emptyset$

6. En déduire que : $x \in \cap_{F\in\mathcal{F}}F$ et conclure.

Exercice 2.2. (Démonstration de la proposition 4) On a déjà montré que l'axiome du choix impliquait le théorème de Tychonoff. Supposons maintenant le théorème 5 et montrons l'axiome du choix. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides. Il s'agit de montrer que leur produit A est non vide. On considère, pour $i \in I$ l'union disjointe X_i de A_i et d'un élement ω. Enfin, on définit $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, \{\omega\}, A_i, X_i\}$.

1. Montrer que pour tout $i \in I$, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est un espace topologique quasi-compact. On note X le produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$ muni de la topologie produit.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i_1, \dots, i_n) \in I^n, \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(A_i) \neq \emptyset$$

3. En déduire, à l'aide du théorème 5 que $\prod_{i\in I} A_i = \cap_{i\in I} \pi_{i_k}^{-1}(A_i)$ est non vide et conclure.

Remarque 7. Un produit d'ensembles contenant tous un même élément ω est non vide sans utiliser l'axiome du choix. En effet, la fonction constante égale à ω est dans le produit. La proposition tient toujours si l'on suppose que tous sont non vide, et qu'un même élément ω appartient à tous sauf un nombre fini d'entre eux. C'est ce que l'on vient d'utiliser.

II.2 Le théorème d'Hahn-Banach

On ne rappellera ici définitions, remarques, et références : plus de détails, voir le cours-TD de topologie.

Théorème 7. ***(Hahn-Banach)*** *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p une sous-norme sur E, F un sous-espace vectoriel de E et enfin f une forme linéaire sur F vérifiant :*

$$\forall x \in F, f(x) \leq p(x)$$

Alors f admet un prolongement linéaire à E encore noté f et vérifiant :

$$\forall x \in E, f(x) \leq p(x)$$

Exercice 2.3. (Démonstration du théorème 7) Soit S l'ensemble des couples (M, g) tels que M est un sous-espace vectoriel de E contenant F et g est un prolongement linéaire de f à M. On le munit d'une relation ordre $\leq$ par :

$$(M_1, g_1) \leq (M_2, g_2) \text{ si et seulement si } M_1 \subset M_2 \text{ et } g_{2|M_1} = g_1$$

1. En utilisant le lemme de Zorn, montrer que $(S, \leq)$ admet un élément maximal (G, g)

Indication : Si $(M_i)_{i\in I}$ une chaîne de E, on montrera que $\cup_{i\in I} M_i$ est un espace vectoriel, et que l'application qui à $x \in M$ associe $g_i(x)$ si $x \in M_i$ est bien définie et linéaire.

2. Il suffit maintenant de montrer $G = E$. Raisonnons par l'absurde : soit $z \in E$, tel que $z \notin G$. On pose $G' = G \oplus \mathbb{R}z$

a. Montrer que : $c_- := \sup_{u\in G}(f(u) - N(u-z)) \leq \inf_{v\in G}(N(v+z) - f(v)) =: c_+$

b. On définit l'application linéaire g' sur G' par : $g'_{|G} = g$ et $g'(z) = \frac{c_- + c_+}{2}$.

Montrer que : $(M', g') > (M, g)$ et conclure.

Remarque 8. On a utilisé le lemme de Zorn dans la démonstration du théorème d'Hahn-Banach. Ce dernier théorème n'est pas démontrable à partir des axiomes de ZF uniquement mais il n'est pas non plus équivalent à l'axiome du choix.

II.3 Construction de suites

II.3.1 Axiome des choix dépendants et construction de suites par récurrence

Donnons un exemple d'utilisation de l'axiome des choix dépendants en analyse : le théorème de Baire.

Théorème 8. ***(Baire)*** *Soit X un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de X denses dans X. Alors*

$$\Omega := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

est dense dans X.
On dit que Ω est un $\mathcal{G}_\delta$ dense.

Reprenons la démonstration du théorème 8 vue dans le cours-TD de topologie.
Soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte quelconque. Il faut et il suffit de montrer qu'on a : $B(x_0, r_0) \cap \Omega \neq \emptyset$. On cherche alors à prouver l'existence d'une suite $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $X \times \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{c} \bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_n \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{array} \right.$$

En vous inspirant de la démonstration de la proposition 3, montrer que l'existence d'une telle suite découle de l'axiome des choix dépendants.

Remarque 9. On a utilisé l'axiome des choix dépendants dans notre démonstration, mais cela ne prouve pas qu'il soit nécessaire de l'utiliser.

II.3.2 Axiome du choix dénombrable et construction de suites

Un exemple d'utilisation de l'axiome du choix dénombrable est donnée par la classique proposition :

Proposition 5. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.*
Alors pour $x \in X$, on a $x \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$

La condition suffisante est vérifiée de façon standard. Pour la condition suffisante, il suffit de voir que l'axiome du choix dénombrable implique que $\prod_{n\in\mathbb{N}}(B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A)$ est non vide comme produit d'ensembles non vides.

Remarque 10. On a utilisé l'axiome du choix dénombrable dans notre démonstration, mais cela ne prouve pas qu'il soit nécessaire de l'utiliser.

II.3.3 Axiome du choix...ou pas

Faisons quelques remarques :

Remarque 11. Soit E un ensemble, F une fonction de $\mathbb{N} \times E$ dans E, et $x \in E$. Alors l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(n, u_n)$$

est démontrable dans (ZF)

Remarque 12. Si A est au plus dénombrable, alors $\mathcal{P}(A)$ est muni d'une fonction de choix (sans utiliser l'axiome du choix), comme on l'a vu en I.2.3

Remarque 13. Si un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est séparable, alors sa topologie est munie d'une fonction de choix (sans utiliser l'axiome du choix).
En effet, soit A est un ensemble dénombrable et dense dans E et F une fonction de choix sur $\mathcal{P}(A)$ (qui existe sans l'axiome du choix d'après la remarque précédente). On remarque alors que pour tout ouvert non vide $\omega \subset E$, $\omega \cap A$ est une partie non vide de A. On définit alors $G : \mathcal{T}\backslash\{\emptyset\} \to E$ par $\forall \omega \in \mathcal{T}\backslash\{\emptyset\}, G(\omega) = F(\omega \cap A)$.

Quelques conséquences :

1. On en déduit une démonstration du théorème de Baire sans l'axiome du choix dans le cas où l'on fait l'hypothèse supplémentaire que X est séparable. En effet, si F est une fonction de choix sur la topologie de X, la suite (x_n, r_n) est alors définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = F(B(x_n, r_n) \cap O_n) \\ r_{n+1} = \sup\{r \in]0, \frac{r_n}{2}[, \bar{B}(x_{n+1}, r) \subset B(x_n, r_n) \cap O_n\} \end{array} \right.$$

2. De la même manière, un produit quelconque d'ouverts d'un même espace séparable est toujours non vide sans l'axiome du choix. Par contre, un produit quelconque d'espaces séparables n'est pas nécessairement non vide sans l'axiome du choix.

Conclusion : Dans l'optique de la préparation à l'agrégation, l'axiome du choix sous sa forme la plus forte n'intervient que très rarement (essentiellement dans la démonstration du théorème Tychonoff et dans celle du théorème d'Hahn-Banach), et même dans ces cas, on peut ajouter une hypothèse (dénombrabilité, séparabilité) pour utiliser une version plus faible. Il convient de mentionner l'axiome du choix uniquement dans ces cas très précis, et d'en proposer un développement qu'en étant sûr de sa compréhension des enjeux de l'axiome du choix.
Il n'est en revanche pas nécessaire (voire même contre-productif) de mentionner l'axiome du choix dans ses formes les plus faibles. Le propos ci-dessus a pour but principal d'enrichir votre culture mathématique.

Références

[C] X. Caruso. http ://boumbo.toonywood.org/xavier/maths/choix.html.

[D] P. Dehornoy. *Logique et théorie des ensembles*, chapter 1-4. Notes de cours, FIMFA ENS, 2006-2007, http ://www.math.unicaen.fr/ dehornoy/surveys.html.