CHAPITRE 0 : CALCUL

Table des matières

Attention !

Les exercices qui suivent vous paraîtront probablement élémentaires, mais l'expérience prouvent que certain(e)s d'entre vous ne sont pas très à l'aise en calcul, et avant de pouvoir aborder de nouveaux concepts, il est impératif de maîtriser le calcul.

1 Simplification de fractions

Dans les calculs ci-dessous, effectuer les opérations avec les fractions les plus simples possibles et exprimer les résultats sous forme de fraction avec un dénominateur entier lorsque cela est possible.

Par exemple, $\frac{1}{48} - \frac{1}{80}$ ne se fera pas avec la calculatrice ni sous la forme $\frac{80-48}{48\times 80}$. Puisque 48 et 80 ont un multiple commun bien plus petit que leur produit :

$$\frac{1}{2^4\times 3} - \frac{1}{2^4\times 5} = \frac{5-3}{2^4\times 3\times 5} = \frac{1}{2^3\times 3\times 5} = \frac{1}{120}.$$

Exercice 1. Simplifier $A = \frac{1}{120} + \frac{1}{45} + \frac{3}{20} + \frac{1}{36}$.

Éléments de correction

On a : $120 = 2^3\times 3\times 5$, $45 = 3^2\times 5$, $20 = 2^2\times 5$ et $36 = 2^2\times 3^2$. Donc le dénominateur commun sera : $2^3\times 3^2\times 5 = 360$. Et ainsi :

$$A = \frac{3+8+3\times 18+10}{360} = \frac{75}{360} = \frac{3\times 5^2}{2^3\times 3^2\times 5} = \frac{5}{2^3\times 3} = \frac{5}{24}.$$

Exercice 2. Lors des calculs de probabilités conditionnelles, on peut être amené à calculer une expression de la forme

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}.$$

1. Simplifier : $p = \dfrac{\dfrac{4}{10} \times \dfrac{1}{50}}{\dfrac{4}{10} \times \dfrac{1}{50} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{50} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{34}{50}}$.

Éléments de correction

On commence par simplifier les fractions apparaissant au numérateur et au dénominateur.

$$p = \frac{\dfrac{1}{5 \times 25}}{\dfrac{1}{5 \times 25} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{17}{3 \times 25}}$$

On se débarasse des fractions du numérateur et du dénominateur en multipliant haut et bas par $3 \times 5 \times 25$:

$$p = \frac{3}{3 + 3 \times 25 + 17 \times 5} = \frac{3}{3 + 75 + 85} = \frac{3}{163}.$$

2. Simplifier : $q = \dfrac{\dfrac{2}{10} \times \dfrac{4}{10} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{5}{10} + \dfrac{1}{100}}{\dfrac{2}{10} \times \dfrac{4}{10} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{5}{10} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{10}}$

Éléments de correction

Suivons les mêmes étapes pour q :

$$q = \frac{\dfrac{2}{25} + \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{100}}{\dfrac{2}{25} + \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{3}{50}} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 5 + 1}{2 \times 4 + 3 \times 5 + 1 + 3 \times 2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Exercice 3. Simplifier les expressions ci-dessous sachant que a, x, y, z désignent des réels et que a est strictement positif.

1. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^5 \left(\dfrac{6}{5}\right)^{4+y}}{\left(\dfrac{9}{10}\right)^7 \left(\dfrac{2}{15}\right)^{2y-3}}$.

Éléments de correction

Notons $A = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^5 \left(\dfrac{6}{5}\right)^{4+y}}{\left(\dfrac{9}{10}\right)^7 \left(\dfrac{2}{15}\right)^{2y-3}}$. On a :

$$A = \frac{3^5 \cdot 6^{4+y} \cdot 10^7 \cdot 15^{2y-3}}{2^5 \cdot 5^{4+y} \cdot 9^7 \cdot 2^{2y-3}} = \frac{3^5 \cdot 3^{4+y} \cdot 2^{4+y} \cdot 2^7 \cdot 5^7 \cdot 3^{2y-3} \cdot 5^{2y-3}}{2^5 \cdot 5^{4+y} \cdot 3^{14} \cdot 2^{2y-3}},$$

et donc :

$$A = 2^{4+y+7-5-2y+3} \cdot 3^{5+4+y+2y-3-14} \cdot 5^{7+2y-3-4-y} = 2^{9-y} \cdot 3^{-8+3y} \cdot 5^y$$

2. $\dfrac{a^{x+y}e^{(x-y)\ln(a)}}{a^2a^{(-2x-4)}}$

Éléments de correction

On a : $e^{(x-y)\ln(a)} = a^{x-y}$ donc :

$$\frac{a^{x+y}e^{(x-y)\ln(a)}}{a^2a^{(-2x-4)}} = \frac{a^{x+y}a^{x-y}}{a^{2-2x-4}} = \frac{a^{2x}}{a^{-2x-2}} = a^{2x}a^{2x+2} = a^{4x+2}.$$

3. $\dfrac{6^{x-2}3^{2x+2}}{12^{2x-1}}$

Éléments de correction

$$\frac{6^{x-2}3^{2x+2}}{12^{2x-1}} = \frac{2^{x-2}\cdot 3^{x-2}\cdot 3^{2x+2}}{3^{2x-1}\cdot 2^{4x-2}} = 2^{-3x}\cdot 3^{x+1}.$$

4. $\dfrac{30^{3-x}}{6^{2-x}5^{x+1}}$

Éléments de correction

$$\frac{30^{3-x}}{6^{2-x}5^{x+1}} = \frac{6^{3-x}\cdot 5^{3-x}}{6^{2-x}\cdot 5^{x+1}} = 6^{3-x-2+x}\cdot 5^{3-x-x-1} = 6\cdot 5^{2-2x}.$$

5. $(-3)^{-2}\cdot 2^4$

Éléments de correction

$$(-3)^{-2}\cdot 2^4 = \frac{2^4}{(-3)^2} = \frac{16}{9}.$$

6. $(-xy^2)\cdot(-yz^2)\cdot(-zx^2)$

Éléments de correction

$$(-xy^2)\cdot(-yz^2)\cdot(-zx^2) = -x^3y^3z^3 = -(xyz)^3$$

7. $\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2\cdot(-y)^3$

Éléments de correction

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2\cdot(-y)^3 = -\left(\frac{x}{y}\right)^2 y^3 = -x^2\cdot\frac{y^3}{y^2} = -x^2y.$$

Exercice 4. Simplifier les fractions suivantes, sachant que a, b, c, d désignent des réels non nuls :

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)};\quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)};\quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$$

Éléments de correction

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc};\quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b};\quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$$

Exercice 5 (Racines et expressions conjuguées)**.** Écrire avec un dénominateur entier les expressions suivantes. Par exemple,

$$\frac{1}{1-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

en utilisant l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ pour tout couple (a, b) de réels.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

Éléments de correction

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

2. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}$

Éléments de correction

$$\frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2(4-3)} = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}.$$

3. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Éléments de correction

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

4. $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} + \dfrac{3\sqrt{5}+1}{2-\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

Éléments de correction

Notons a la dernière expression à calculer :

$$a = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} + \frac{3\sqrt{5}+1}{2-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}.$$

Il vient :

$$a = \frac{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}+2) - (3\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+2) + (\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$

Après développement :

$$a = \frac{-2\sqrt{5}-10}{5-4} = -2\sqrt{5}-10.$$

Exercice 6 (Expressions conjuguées)**.** Il est utile de savoir écrire une fraction de complexes avec un dénominateur réel pour pouvoir déterminer facilement ses parties réelle et imaginaire. Par exemple, si $z = \frac{1+2i}{1+i}$, alors :

$$z = \frac{(1+2i)\overline{(1+i)}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{(1+2i)(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{1-i+2i+2}{2} = \frac{3+i}{2},$$

Donc

$$\Re\mathrm{e}\,(z) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\,(z) = \frac{1}{2}.$$

Écrire avec un dénominateur entier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1+i}{i}$

Éléments de correction

Méthode !

On retiendra que l'inverse de i est $-i$. En effet : $i(-i) = -(-1) = 1$.

On a donc : $\dfrac{1+i}{i} = (1+i)(-i) = 1-i$

2. $\dfrac{i-4}{2i}$

Éléments de correction

$$\frac{i-4}{2i} = \frac{(i-4)(-i)}{2} = \frac{1+4i}{2}.$$

3. $\dfrac{3+4i}{5-7i}$

Éléments de correction

$$\frac{3+4i}{5-7i} = \frac{(3+4i)(5+7i)}{25+49} = \frac{-13+41i}{74}.$$

4. $\dfrac{4-3i}{i-1}$

Éléments de correction

$$\frac{4-3i}{i-1} = \frac{-(4-3i)(i+1)}{2} = -\frac{7+i}{2}$$

5. $\dfrac{5-3i}{(4-i)(1+3i)}$

Éléments de correction

$$\frac{5-3i}{(4-i)(1+3i)} = \frac{5-3i}{7+11i} = \frac{(5-3i)(7-11i)}{49+121} = \frac{2-76i}{170} = \frac{1-38i}{85}.$$

6. $\dfrac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)}$

Éléments de correction

$$\frac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)} = \frac{16-11i}{9-13i} = \frac{(16-11i)(9+13i)}{81+169} = \frac{287+109i}{250}$$

7. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + 2\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} - \dfrac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}$

Éléments de correction

D'une part, $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{3+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

D'autre part, $\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{4}$

et donc $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + 2\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(2+\sqrt{3})+i}{2}$

Par ailleurs, $(1-i)^2 = -2i$ d'où $(1-i)^3 = -2i(1-i) = -2(1+i)$

si bien que $\dfrac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{-2(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \dfrac{-(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{2}$

et donc enfin : $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + 2\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} - \dfrac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{3+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2}$

Exercice 7. Lorsque des puissances interviennent, il est plus habile d'utiliser la forme trigonométrique des complexes, *i.e.* leur écriture sous la forme $re^{i\theta}$, où $r \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le module, un argument, les parties réelle et imaginaire de :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2}.$$

Éléments de correction

Commençons par écrire le numérateur et le dénominateur de z_1 sous forme trigonométrique. Pour cela, il faut mettre le module en facteur puis reconnaître un nombre complexe de la forme $\cos\theta + i\sin\theta$.

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$$

Le nombre $1-i\sqrt{3}$ est le conjugué de $1+i\sqrt{3}$: il a donc le même module et un argument opposé. Par conséquent, $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$.

Nous en déduisons :

$$z_1 = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{i\pi/3}e^{i\pi/3} = e^{2i\pi/3}$$

D'où :

$$\Re\mathrm{e}\,(z_1) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\,(z_1) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On procède de même pour z_2 :

$$i = e^{i\pi/2} \quad \text{et} \quad 2i\sqrt{3}-2 = 4\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{2i\pi/3}$$

et donc :

$$z_2 = \frac{e^{i\pi/2}}{4e^{2i\pi/3}} = \frac{1}{4}e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/6}.$$

$$\Re\mathrm{e}\,(z_2) = \frac{1}{4}\cos\frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\,(z_2) = \frac{1}{4}\sin\frac{-\pi}{6} = -\frac{1}{8}.$$

2. En déduire les parties réelle et imaginaire de :

(a) $z_1 + z_2$,

Éléments de correction

On a immédiatement :

$$\Re\mathrm{e}\,(z_1+z_2) = \Re\mathrm{e}\,(z_1) + \Re\mathrm{e}\,(z_2) = \frac{-4+\sqrt{3}}{8} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\,(()\,z_1+z_2) = \frac{4\sqrt{3}-1}{8}.$$

(b) $z_1 z_2$,

Éléments de correction

Pour calculer le produit, il est plus malin d'utiliser la forme trigonométrique :

$$z_1 z_2 = \frac{1}{4}\,e^{2i\pi/3}\,e^{-i\pi/6} = \frac{1}{4}\,e^{i\pi/2} = \frac{i}{4},$$

D'où :

$$\Re\mathrm{e}\,(z_1 z_2) = 0 \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\,(z_1 z_2) = \frac{1}{4}.$$

(c) $\frac{z_1}{z_2}$,

Éléments de correction

On procède de même pour le quotient :

$$z_1(z_2)^{-1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{2i\pi/3}}{\frac{1}{4}e^{-i\pi/6}} = 4\,e^{2i\pi/3}\,e^{i\pi/6} = 4\,e^{5i\pi/6}$$

D'où :

$$\Re\mathrm{e}\left(z_1 z_2^{-1}\right) = 4\cos\frac{5\pi}{6} = -2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\left(z_1 z_2^{-1}\right) = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 2.$$

(d) $(z_1)^6(z_2)^{12}$

Éléments de correction

Dans le calcul de $z_1^6 z_2^{12}$, la présence de gros exposants rend l'utilisation de la forme trigonométrique absolument indispensable !

$$z_1^6 z_2^{12} = \left(e^{2i\pi/3}\right)^6 \left(\frac{1}{4}e^{-i\pi/6}\right)^{12} = e^{(2i\pi/3)\times 6}\,\frac{1}{4^{12}}\,e^{(-i\pi/6)\times 12} = e^{4i\pi}\,\frac{1}{4^{12}}e^{-2i\pi}$$

Puisque $e^{4i\pi} = e^{-2i\pi} = 1$, on voit que :

$$z_1^6 z_2^{12} = \frac{1}{4^{12}} = \frac{1}{2^{24}},$$

et donc :

$$\Re\mathrm{e}\left(z_1^6 z_2^{12}\right) = \frac{1}{2^{24}} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\left(z_1^6 z_2^{12}\right) = 0.$$

(e) $(z_1)^8(z_2)^{-3}$

Éléments de correction

En procédant de même, on trouve :

$$\Re\mathrm{e}\left(z_1^8 z_2^{-3}\right) = 32\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\left(z_1^8 z_2^{-3}\right) = -32.$$

3. ($\star$) Trouver les parties réelle et imaginaire de : $\dfrac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$.

Éléments de correction

On utilise les mêmes idées afin d'éviter de calculer l'élévation au cube et à la puissance 4 avec les écritures algébriques. Ainsi :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \quad \text{et} \quad 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \text{ (calcul déjà fait)}$$

Par conséquent :

$$\frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^3}{\left(2e^{i\pi/3}\right)^4} = \frac{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}{16e^{4i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{8}e^{-7i\pi/12}$$

Malheureusement, nous nous retrouvons avec l'angle $\dfrac{-7\pi}{12}$ dont on ne connaît pas le cosinus et le sinus par cœur. On a alors deux méthodes :

- On a obtenu $e^{-7i\pi/12}$ par le quotient $\frac{e^{3i\pi/4}}{e^{4i\pi/3}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)}$. Donc $\dfrac{-7\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{4\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-1-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

et donc finalement :

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{16} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\left(\frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{16}$$

- On peut repasser le numérateur et le dénominateur du quotient en écriture algébrique :

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} &= \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{e^{3i\pi/4}}{e^{4i\pi/3}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}\frac{-1+i}{-1-i\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{4}\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{4}\frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{1+3}\\ &= \frac{1}{16}(1-i)(1-i\sqrt{3})\\ &= \frac{1}{16}(1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))\end{aligned}$$

On retrouve bien les mêmes parties réelle et imaginaire.

Exercice 8 (Factorielles)**.** On rappelle le sens de la notation factorielle :

$$0! = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$$

On définit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} puis simplifier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ainsi que l'écart relatif $\left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right|$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{2(n+1)+1)!} = \frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{4^{n+1}(n+1)^2\,(n!)^2}{(2n+3)(2n+2)\,(2n+1)!}$$

Après simplifications, il reste :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{4(n+1)^2}{2(2n+3)(n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}$$

Calculons maintenant l'écart relatif :

$$\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right| = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right| = \left|\frac{2n+2}{2n+3} - 1\right| = \left|\frac{(2n+2)-(2n+3)}{2n+3}\right|$$

Il vient finalement :

$$\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right| = \left|\frac{-1}{2n+3}\right| = \frac{1}{2n+3}$$

2 Polynômes

Exercice 9 (Relations coefficients-racines)**.**

1. Soit $a \in \mathbb{C}^\star$, et b, c, z_1 et z_2 des complexes. À quelle condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \quad ?$$

Éléments de correction

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2.$$
Donc si $a(z_1 + z_2) = -b$ et $az_1z_2 = c$, on a bien pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$
Réciproquement, si on a pour tout $z \in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, alors en particulier pour $z = 0$, on obtient $az_1z_2 = c$. Et en prenant par exemple $z = 1$, on a bien : $a + b + c = a - a(z_1 + z_2) + az_1z_2$, donc puisque $az_1z_2 = c$, on retrouve bien $a(z_1 + z_2) = -b$. Finalement, on a l'égalité voulue si et seulement si $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \frac{c}{a}$.

2. Trouver les solutions de l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et vérifier la condition ci-dessus.

Éléments de correction

Le discriminant de l'équation $z^2+4z+8 = 0$ vaut $-16 = (4i)^2$ et donc ses deux solutions sont $z_1 = -2-2i$ et $z_2 = -2+2i$. On voit bien que $z_1 + z_2 = -4$ et $z_1z_2 = 8$.

3. En sachant que ses racines sont entières, factoriser le trinôme $x^2 + 5x + 6$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Éléments de correction

Pour la dernière, utilisons la première question : la somme des deux racines vaut -5 et le produit des deux racines vaut 6. De plus on nous donne l'indication que les deux racines sont entières. On peut alors aisément deviner que ces deux racines sont -2 et -3 (ce que l'on peut ensuite vérifier). On trouve alors :
$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

Exercice 10 (Factorisation)**.** Factoriser sans utiliser le discriminant les trinômes suivants pour tout $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^2 + 3z$,

Éléments de correction

$z^2 + 3z = z(z + 3)$.

2. $z^2 - 9$,

Éléments de correction

$z^2 - 9 = z^2 - 3^2 = (z - 3)(z + 3)$.

3. $4z^2 + 25$,

Éléments de correction

$4z^2 + 25 = (2z)^2 - (5i)^2 = (2z - 5i)(2z + 5i)$.

4. $z^2 + 4z + 4$.

Éléments de correction

$z^2+4z+4=(z+2)^2$.

Exercice 11 (Mise sous forme canonique et factorisation)**.** Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tel que : $a\neq 0$. Soit $z\in\mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}az^2+bz+c &= a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]\\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\end{aligned}$$

Cette dernière expression s'appelle forme canonique du polynôme aX^2+bX+c. Elle peut être factorisée en utilisant l'identité remarquable : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ pour $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.
Mettre $49X^2+21X+\frac{3}{2}$ sous forme canonique et en déduire ses racines.

Éléments de correction

On a :

$$\begin{aligned}49X^2+21X+\frac{3}{2} &= \left(7X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\\ &= \left(7X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\\ &= \left(7X+\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(7X+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc les racines de $49X^2+21X+\frac{3}{2}$ sont :

$$-\frac{3+\sqrt{3}}{14}\quad\text{et}\quad\frac{\sqrt{3}-3}{14}.$$

Exercice 12 (Fractions rationnelles)**.** Comme pour les fractions d'entiers, pour réduire au même dénominateur une somme de fractions rationnelles, il convient de trouver un plus petit commun multiple des dénominateurs en les écrivant sous forme factorisée. Si, après réduction au même dénominateur, le numérateur et le dénominateur ont un facteur en commun, on le simplifie.

1. Simplifier $A=\dfrac{1}{u^2+3u+2}+\dfrac{1}{u^2-1}+\dfrac{-2}{u^2+u}-\dfrac{1}{u^2+u-2}$.

Éléments de correction

On a pour tout $u\in\mathbb{R}$,

$$u^2+3u+2=(u+1)(u+2)\quad\text{et}\quad u^2-1=(u-1)(u+1)$$

$$u^2+u=u(u+1)\quad\text{et}\quad u^2+u-2=(u-1)(u+2)$$

On voit donc que le polynôme $(u-1)u(u+1)(u+2)$ est un dénominateur commun à toutes les fractions. Cela permet d'écrire pour tout $u\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0,1\}$:

$$A=\frac{(u-1)u+u(u+2)-2(u-1)(u+2)-u(u+1)}{(u-1)u(u+1)(u+2)}$$

On développe et simplifie maintenant le numérateur :

$$A=\frac{-u^2-2u+4}{(u-1)u(u+1)(u+2)}$$

Aucune des quatre racines du dénominateur $(1, 0, -1, -2)$ n'est racine du numérateur donc aucune simplification n'est possible.

2. Simplifier $B = \dfrac{2(x-1)}{9x^2-4} - \dfrac{2-x}{9x^2+12x+4} + \dfrac{x+4}{9x^2-4}$.

Éléments de correction

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2) \quad \text{et} \quad 9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$:

$$B = \frac{2(x-1)(3x+2) + (x-2)(3x-2) + (x+4)(3x+2)}{(3x-2)(3x+2)^2}.$$

On remarque que le dénominateur est un polynôme de degré au plus 2. Pour calculer efficacement, on détermine ses trois coefficients un par un :

- Le terme de degré 2 a pour coefficient : $6+3+3=12$.
- Le terme de degré 1 a pour coefficient : $2(-3+2)+(-6-2)+(2+12)=4$.
- Le terme constant est : $2 \times (-2) + 4 + 8 = 8$.

Donc finalement :

$$B = \frac{4(3x^2+x+2)}{(3x-2)(3x+2)^2},$$

et aucune simplification n'est possible.

3 Exponentielle et logarithme

Exercice 13. Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{e^3 \times e^{-1}}{e^7}$

Éléments de correction

$A = \frac{e^3 e^{-1}}{e^7} = e^{3-1-7} = e^{-5}$.

2. $B = \dfrac{(e^{-2})^3 \times e^{-5}}{(e^2)^2}$

Éléments de correction

$B = e^{-6} e^{-5} e^{-4} = e^{-15}$.

3. $C = \dfrac{1}{e^{0,3}} \times \dfrac{1}{e}$

Éléments de correction

$C = e^{-0,3} e^{-1} = e^{-1,3}$.

4. $D = e^{\frac{1}{2}\ln(8)+1}$

Éléments de correction

$D = e^{\frac{1}{2}\ln(8)} \times e = e^{\ln(\sqrt{8})} \times e = \sqrt{8}\, e = 2\sqrt{2}\, e$.

5. $E = \dfrac{e^{2\ln(3)}}{e^{3\ln(2)}}$

Éléments de correction

$E = \dfrac{e^{\ln(3^2)}}{e^{\ln(2^3)}} = \dfrac{9}{8}$.

6. $F = \ln\left(\dfrac{e^5}{e^3}\right)$

Éléments de correction

$F = \ln\left(e^{5-3}\right) = \ln\left(e^2\right) = 2$.

7. $G = \ln(\sqrt{e}) - \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

Éléments de correction

$G = \dfrac{1}{2}\ln(e) - \left(\dfrac{-1}{2}\right)\ln(e) = 1$.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{3x+1} = e^x$

Éléments de correction

exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^\star$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{3x+1} = e^x \Leftrightarrow 3x+1 = x \Leftrightarrow x = -1/2.$$

Donc l'ensemble solution est : $\{-1/2\}$.

2. $e^{x(x+1)} = 1$

Éléments de correction

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow x(x+1) = 0.$$

Donc l'ensemble solution est : $\{-1, 0\}$.

3. $e^x = \dfrac{1}{e^{x+1}}$

Éléments de correction

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \frac{1}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e^x = e^{-x-1} \Leftrightarrow x = -x-1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

Donc l'ensemble solution est : $\{-1/2\}$.

4. $e^{3x-1} = 3$

Éléments de correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x-1} = 3 \iff 3x - 1 = \ln(3) \iff x = \dfrac{1+\ln(3)}{3}$. L'unique solution de cette équation est le réel $\dfrac{1+\ln(3)}{3}$.

5. $e^{1/x} = 2$

Éléments de correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $e^{1/x} = 2 \iff \dfrac{1}{x} = \ln(2) \iff x = \dfrac{1}{\ln(2)}$. Puisque $\dfrac{1}{\ln(2)}$ n'est pas nul, il s'agit bien de l'unique solution de l'équation.

6. $e^{2x} - 2e^{-2x} = 1$ *On pourra poser* $X = e^{2x}$.

Éléments de correction

Une indication nous propose de définir $X = e^{2x}$. Remarquons que cela impose que X doit être strictement positif. Avec cette nouvelle notation, nous pouvons écrire :

$$e^{2x} - 2e^{-2x} = 1 \iff X - \frac{2}{X} = 1 \iff X^2 - X - 2 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut 9 et les deux solutions sont $X_1 = 2$ et $X_2 = -1$. Mais, comme nous l'avions remarqué, X est un nombre strictement positif. Il faut donc rejeter la solution X_2. Finalement :

$$e^{-2x} - 2e^{-2x} = 1 \iff X = 2 \iff e^{2x} = 2 \iff 2x = \ln(2) \iff x = \frac{1}{2}\ln(2).$$

L'unique solution de l'équation est $\dfrac{1}{2}\ln(2)$.

7. $\ln(1+3x) = \ln(x+1)$

Éléments de correction

Le logarithme n'est défini que pour des nombres strictement positifs. Par conséquent, l'équation $\ln(1+3x) = \ln(x+1)$ n'a de sens que lorsque $3x+1>0$ et que $x+1>0$, ce qui revient à dire que $x > \dfrac{-1}{3}$ et $x > -1$. Finalement, nous pouvons ne retenir que la plus restrictive des deux conditions : l'équation n'a de sens que lorsque $x > \dfrac{-1}{3}$. Sous cette condition, nous pouvons maintenant écrire, puisque ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$:

$$\ln(3x+1) = \ln(x+1) \iff 3x+1 = x+1 \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

Puisque $x = 0$ est strictement supérieur à $\dfrac{-1}{3}$, il s'agit bien de l'unique solution de l'équation.

8. $\ln(x-1) + \ln(2-x) = \ln(6x)$

Éléments de correction

L'équation n'a de sens que lorsque $x-1>0$, $2-x>0$ et $6x>0$, ce qui revient à dire que $x>1$, $x<2$ et $x>0$. Finalement, nous pouvons conclure que l'équation n'a de sens que lorsque $1<x<2$. Nous pouvons alors écrire pour tout $x \in]1,2[$:

$$\ln(x-1) + \ln(2-x) = \ln(6x) \iff \ln[(x-1)(2-x)] = \ln(6x)$$

En passant cette équation à l'exponentielle (bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$), on obtient l'équation équivalente :

$$(x-1)(2-x) = 6x \iff x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut 1 et les deux solutions sont $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$. Aucune de ces deux solutions ne se trouve dans l'intervalle $]1,2[$ si bien que l'équation proposée **n'a aucune solution**.

9. $\ln(2x+1) = \ln(x^2-1)$

Éléments de correction

L'équation n'a de sens que lorsque $2x+1>0$ et $x^2-1>0$, c'est-à-dire lorsque $x > \frac{-1}{2}$ et $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Finalement, l'équation n'a de sens que lorsque $x>1$. Sous cette condition, nous pouvons écrire :

$$\ln(2x+1) = \ln(x^2-1) \iff 2x+1 = x^2-1 \iff x^2-2x-2=0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut 12 et les deux solutions sont $x_1 = 1-\sqrt{3}$ et $x_2 = 1+\sqrt{3}$. Parmi ces deux solutions, une seule est strictement supérieure à 1 et c'est donc la seule qu'il faut garder : l'unique solution de l'équation est $1+\sqrt{3}$.

Exercice 15 (Monotonie et inéquations)**.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des assertions, dire si elles sont vraies :

- jamais.
- Si f est croissante.
- Si f est strictement croissante.

1. Pour tous réels a,b tels que $a<b$, on a $f(a)<f(b)$.

Éléments de correction

C'est la définition de « f est strictement croissante ».

2. Pour tous réels a,b tels que $a \leqslant b$, on a $f(a)<f(b)$.

Éléments de correction

Ce n'est jamais vrai, puisque si $a=b$, $f(a)=f(b)$.

3. Pour tous réels a,b tels que $a<b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.

Éléments de correction

C'est vrai si f est croissante ou strictement croissante.

4. Pour tous réels a,b tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.

Éléments de correction

C'est vrai (par définition) si f est croissante, et donc a fortiori si f est strictement croissante.

5. Pour tous réels a,b tels que $f(a)<f(b)$, on a $a<b$.

Éléments de correction

Cette proposition est équivalente par contraposition à : « pour tous réels a,b tels que $a \geqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$. C'est donc vrai (par définition) si f est croissante, et donc a fortiori si f est strictement croissante.

6. Pour tous réels a,b tels que $f(a)<f(b)$, on a $a \leqslant b$.

Éléments de correction

Cette proposition est équivalente par contraposition à : « pour tous réels a, b tels que $a > b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$. C'est donc vrai si f est croissante, et donc a fortiori si f est strictement croissante .

7. Pour tous réels a, b tels que $f(a) \leqslant f(b)$, on a $a < b$.

Éléments de correction

Cette proprosition n'est jamais vraie, puisque si $a = b$, $f(a) = f(b)$ et a fortiori $f(a) \leqslant f(b)$ mais on n'a pas $a < b$.

8. Pour tous réels a, b tels que $f(a) \leqslant f(b)$, on a $a \leqslant b$.

Éléments de correction

Cette proposition est équivalente par contraposition à : « pour tous réels a, b tels que $a > b$, on a $f(a) > f(b)$. C'est donc vrai si f est **strictement** croissante.

Méthode !

Ce que l'on doit retenir de cet exercice est que pour avoir pour tous réels a, b, $a \leqslant b$ ssi $f(a) \leqslant f(b)$ (ou la même avec des inégalités strictes), la croissance de f ne suffit pas, il faut sa **stricte** croissance !

Exercice 16. Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. $e^{3x-1} \leqslant e^{2x}$

Éléments de correction

Pour les inéquations, nous utilisons le fait que le sens des inégalités n'est pas modifié lorsqu'on multiplie les deux côtés par un même nombre *strictement positif*. Or l'exponentielle de tout nombre réel est strictement positive. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$e^{3x-1} \leqslant e^{2x} \iff e^{3x-1}e^{-2x} \leqslant 1 \iff e^{x-1} \leqslant 1$. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, l'inéquation proposée est encore équivalente à $x - 1 \leqslant \ln(1) \iff x \leqslant 1$. L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $]-\infty, 1]$.

2. $e^{2x} - e^{x+1} \leqslant 0$

Éléments de correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - e^{x+1} \leqslant 0 \iff e^{2x} \leqslant e^{x+1} \iff e^{2x}e^{-x-1} \leqslant 1 \iff e^{x-1} \leqslant 1$. On retrouve la même inéquation que précédemment : l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $]-\infty, 1]$.

3. $e^{x^2} > e^{2x^2-x}$

Éléments de correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{x^2} > e^{2x^2-x} \iff e^{x^2-2x^2+x} > 1 \iff e^{-x^2+x} > 1 \iff -x^2 + x > 0 \iff x(x-1) < 0$. En faisant un tableau de signe, cette équation a pour ensemble de solutions l'intervalle $]0, 1[$.

4 Dérivées, primitives

Exercice 17. Pour chacune des fonctions numériques réelles suivantes, donner son domaine de définition, préciser en quels points elle est dérivable et calculer sa dérivée en ces points :

1. $x \mapsto x^3 - x^2$

Éléments de correction

La fonction $a : x \mapsto x^3 - x^2$ est polynomiale. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point et, pour tout réel x, il vient :

$$a'(x) = 3x^2 - 2x.$$

2. $x \mapsto \dfrac{x^2-3}{x+1}$

Éléments de correction

La fonction $b : x \mapsto \dfrac{x^2-3}{x+1}$ est le quotient de deux fonctions polynomiales. Elle est donc définie et dérivable en chaque point où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire en chaque x de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. D'après la règle de dérivation d'un quotient, il vient pour $x \neq -1$:

$$b'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2-3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}.$$

3. $x \mapsto xe^{-x}$

Éléments de correction

La fonction $x \mapsto x$ et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ sont toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en tout point. Le produit $c : x \mapsto xe^{-x}$ est donc défini et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$c'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

4. $x \mapsto \sqrt{x^2+2x-1}$

Éléments de correction

La fonction $x \mapsto x^2+2x-1$ est polynomiale du second degré. Son discriminant vaut 8 et ses racines sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. La fonction est positive à l'extérieur de l'intervalle des racines. Par conséquent, la fonction $d : x \mapsto \sqrt{x^2+2x-1}$ est définie sur $]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[$. Et puisque $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc d est dérivable en chaque point de $]-\infty, 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[$. Pour tout x de cet ensemble, il vient :

$$d'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}.$$

5. $x \mapsto \ln(x^2+x+1)$

Éléments de correction

La fonction $x \mapsto x^2+x+1$ est polynomiale du second degré et son discriminant vaut -3. Cette fonction n'a aucune racine réelle est reste strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $e : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, nous pouvons écrire :

$$e'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

6. $x \mapsto \dfrac{(2x+1)^3}{x+1}$

Éléments de correction

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{(2x+1)^3}{x+1}$ est le quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc définie et dérivable là où son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Pour $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{3\times 2\times(2x+1)^2(x+1)-(2x+1)^3}{(x+1)^2} = \frac{16x^3+36x^2+24x+5}{(x+1)^2}$$

7. $x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$

Éléments de correction

La fonction $g : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$ est le produit de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty,1]$ et dérivable sur $]-\infty,1[$. Par conséquent, la fonction g est définie sur $]-\infty,1]$ et dérivable sur $]-\infty,1[$. De plus pour tout x dans cet intervalle :

$$g'(x) = e^x\sqrt{1-x}+e^x\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = e^x\frac{2(1-x)-1}{2\sqrt{1-x}} = e^x\frac{1-2x}{2\sqrt{1-x}}.$$

8. $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

Éléments de correction

La fonction $h : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ est le quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur s'annule en $x=0$. Par conséquent, h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x\neq 0$, nous pouvons écrire

$$h(x) = \frac{e^x-1+2}{e^x-1} = 1+\frac{2}{e^x-1}.$$

Cette écriture diminue le nombre d'occurrences de x dans l'expression, ce qui simplifie la dérivation (on peut très bien réussir à dériver sans utiliser cette simplification, mais cette idée est généralisable, comme on le verra lors de l'étude des fractions rationnelles) :

$$\forall x\in\mathbb{R}^\star,\quad h'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

9. $x \mapsto e^{x^2-x}+\dfrac{3}{4}x^4$

Éléments de correction

La fonction $x\mapsto x^2-x$ est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $x\mapsto e^{x^2-x}$ l'est aussi. De plus la formule de dérivation d'une fonction de la forme $x\mapsto e^{u(x)}$ donne $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$. En ajoutant la fonction polynomiale $x\mapsto\dfrac{3}{4}x^4$, on voit que $i : x\mapsto e^{x^2-x}+\dfrac{3}{4}x^4$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad i'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}+3x^3.$$

10. $x\mapsto e^{\omega x}-x$, où ω est un réel fixé.

Éléments de correction

Il faut savoir dériver sans hésiter la fonction $x\mapsto e^{\omega x}$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x\mapsto\omega e^{\omega x}$. Ainsi la fonction $j : x\mapsto e^{\omega x}-x$ est-elle définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad j'(x) = \omega e^{\omega x}-1.$$

Exercice 18. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué :

1. $I = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 2x$

Éléments de correction

La dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto 2x$. Par conséquent, $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

2. $I = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 6x^{11} - 8x^3$

Éléments de correction

La dérivée de $x \mapsto x^{12}$ est $x \mapsto 12x^{11}$. Par conséquent, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x^{12}}{2}$ est $x \mapsto 6x^{11}$. De même en dérivant $x \mapsto x^4$, on trouve $x \mapsto 4x^3$ et donc en dérivant $x \mapsto 2x^4$, on trouve $x \mapsto 8x^3$. Ces remarques nous permettent de dire que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{12}}{2} - 2x^4$ est une primitive de $x \mapsto 6x^{11} - 8x^3$ sur $\mathbb{R}$.

3. $I =]0; +\infty[$, $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Éléments de correction

La fonction $x \mapsto 1$ est la dérivée de $x \mapsto x$. De même la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\cdot$ Par conséquent, la fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$ sur I.

4. $I =]-\infty; 2[$, $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$

Éléments de correction

Puisque la dérivée de la fonction $u : x \mapsto x - 2$ est $u' : x \mapsto 1$, la fonction à primitiver est de la forme $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}\cdot$ **Attention :** une primitive de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur un intervalle où u ne s'annule pas est $x \mapsto \ln|u(x)|$ (ne pas oublier la valeur absolue!). Sur l'intervalle I, la fonction u est strictement négative et donc $|u(x)| = 2 - x$. Ainsi une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ sur l'intervalle I est $x \mapsto \ln(2 - x)$.

5. $I = \left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$, $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^5}$

Éléments de correction

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^5}$ se réécrit plus simplement $f : x \mapsto (2x+3)^{-5}$. Cela nous donne l'idée de rechercher une primitive à l'aide de la fonction $g : x \mapsto (2x+3)^{-4}$. En dérivant la fonction g, on trouve $g'(x) = -8(2x+3)^{-5}$ et donc la fonction $F : x \mapsto \dfrac{-1}{8}(2x+3)^{-4}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Nous pouvons réécrire cette primitive sous la forme $F : x \mapsto \dfrac{-1}{8(2x+3)^4}$.

6. $I =]1; +\infty[$, $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Éléments de correction

Il s'agit ici de reconnaître une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ qui est la dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$. Plus précisément, en nommant u la fonction $u : x \mapsto x^2 - 1$, nous voyons que $f(x) = 3\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ d'où l'on déduit que la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x^2-1}$ est une primitive de f sur l'intervalle I.

Exercice 19 (Introduction aux équations différentielles)**.** On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction a continue sur I vérifiant $f'(t) = a(t)f(t)$ pour tout t dans I.

1. On suppose dans cette question uniquement que a est constante. Montrer que f est infiniment dérivable (c'est à dire que f est dérivable, et que sa dérivée est-elle dérivable, etc.). On notera $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ (c'est à dire que $f^{(n)}$ est la dérivée n-ème de f).

2. Rappeler pourquoi a admet au moins une primitive sur I. On note A une telle primitive.

Éléments de correction

On rappelle le théorème du cours de terminale S qui affirme que toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives. Ici, les hypothèses du théorème sont vérifiées et donc la fonction a possède des primitives.

3. Démontrer que $F : t \mapsto f(t)e^{-A(t)}$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Éléments de correction

La fonction $t \mapsto -A(t)$ est dérivable sur I et donc la fonction $t \mapsto e^{-A(t)}$ est également dérivable sur I. Par ailleurs, la fonction f est dérivable sur I. En utilisant la règle de dérivation d'un produit, on voit que la fonction $F : t \mapsto f(t)e^{-A(t)}$ est dérivable sur I. De plus, pour $t \in I$, il vient :

$$F'(t) = f'(t)e^{-A(t)} - f(t)A'(t)e^{-A(t)} = \left[f'(t) - a(t)f(t)\right]e^{-A(t)}.$$

D'après l'hypothèse faite sur la fonction f, nous en déduisons que $F'(t) = 0$ pour tout réel t dans l'intervalle I.

4. En déduire qu'il existe un réel K tel que, pour tout réel t appartenant à I, $f(t) = Ke^{A(t)}$.

Éléments de correction

D'après le cours de terminale S, nous savons qu'une fonction dérivable sur un intervalle I, et dont la dérivée est nulle, est une fonction constante. Par conséquent, la fonction F est constante sur I. Appelons K la valeur constante de la fonction F. Nous avons alors, pour tout $t \in I$:

$$f(t)e^{-A(t)} = K \quad \text{et donc} \quad f(t) = Ke^{A(t)}.$$

Réciproquement, supposons qu'une fonction f soit définie pour $t \in I$ par : $f(t) = Ke^{A(t)}$ où K est une constante et A une primitive de a sur I. Alors

$$f'(t) = KA'(t)e^{A(t)} = Ka(t)e^{A(t)} = a(t)f(t).$$

Il y a donc équivalence entre les deux affirmations suivantes :

(i) La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et $f'(t) = a(t)f(t)$ pour tout $t \in I$.

(ii) La fonction f est définie pour tout $t \in I$ par : $f(t) = Ke^{A(t)}$ où K est une constante et où A est une primitive de a sur l'intervalle I.

Remarque : Nous venons de résoudre l'équation différentielle $y' = a(t)y$ (c'est-à-dire nous avons trouvé toutes les fonctions f définies sur I et vérifiant cette équation).

5. Application pratique : dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les fonctions f vérifiant l'égalité proposée sur l'intervalle I indiqué :

   (a) $\forall t \in I, \quad f'(t) = 3f(t),\ I = \mathbb{R}$
   (b) $\forall t \in I, \quad f'(t) = -\frac{1}{2}f(t),\ I = [0,+\infty[$
   (c) $\forall t \in I, \quad f'(t) = 2tf(t),\ I = \mathbb{R}$
   (d) $\forall t \in I, \quad f'(t) = \dfrac{1}{t}f(t),\ I = [1,2]$
   (e) $\forall t \in I, \quad f'(t) = -\dfrac{1}{t}f(t),\ I =]-\infty,0[$

Éléments de correction

Dans chacun des cas, il s'agit d'appliquer la question précédente en identifiant la fonction a et en trouvant une primitive A. Nous nous contentons d'énoncer les réponses (à chaque fois, K est une constante réelle quelconque) et t est un réel variant dans I.

(a) $a(t) = 3$; $A(t) = 3t$; $f(t) = Ke^{3t}$
(b) $a(t) = -\dfrac{1}{2}$; $A(t) = -\dfrac{1}{2}t$; $f(t) = Ke^{-t/2}$.
(c) $a(t) = 2t$; $A(t) = t^2$; $f(t) = Ke^{t^2}$.
(d) $a(t) = \dfrac{1}{t}$; $A(t) = \ln(t)$; $f(t) = Ke^{\ln(t)} = Kt$.
(e) $a(t) = -\dfrac{1}{t}\cdot$ Attention, ici, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $I =]-\infty,0[$ est $t \mapsto \ln|t| = \ln(-t)$; $A(t) = -\ln(-t)$; $f(t) = Ke^{-\ln(-t)} = \dfrac{K}{-t}\cdot$ La constante K est un réel quelconque. En posant $M = -K$, on trouve un autre réel quelconque et donc les solutions de cette équation différentielle sur I sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{M}{t}$ avec M un réel quelconque.

5 Trigonométrie

Exercice 20. Dans cet exercice, on considère la fonction tan : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dite fonction tangente.

1. Déterminer son domaine de définition.

Éléments de correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan(x)$ est bien défini ssi $\cos(x) \neq 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Donc le domaine de définition de tan est :

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Rappeler les formules d'addition du cosinus et du sinus.

Éléments de correction

Les formules d'addition et de soustraction du cosinus et du sinus sont les suivantes, pour tous réels a et b :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

3. Soient a et b deux réels. Démontrer les formules ci-dessous :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$

en précisant pour quels réels a et b ces formules sont valables.

Éléments de correction

Lorsque cela a un sens, nous pouvons donc écrire :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Nous divisons le numérateur et le dénominateur de cette expression par la quantité $\cos a \cos b$ et il vient :

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a}{\cos a}\dfrac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Dans cette expression, nous remplaçons b par $-b$ puis nous utilisons que $\tan(-b) = -\tan b$. Alors :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Cherchons maintenant pour quels a et b ces formules sont valables. Pour la première, il faut vérifier 4 conditions :

$$\begin{array}{ll} [1]\ \cos(a) \neq 0 & [2]\ \cos(b) \neq 0 \\ [3]\ \cos(a+b) \neq 0 & [4]\ \tan a \tan b \neq 1 \end{array}$$

Les deux angles (modulo 2π) qui ont un cosinus nul sont $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{-\pi}{2}$.

Par conséquent, dans la formule sur $\tan(a+b)$, il y a un problème de définition lorsqu'au moins une des conditions suivantes se produit :

[1] il existe un entier relatif k tel que $a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$;

[2] **ou** il existe un entier relatif l tel que $b = \dfrac{\pi}{2} + l\pi$;

[3] **ou** il existe un entier relatif m tel que $a + b = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$;

[4] **ou** $\tan(a)\tan(b) = 1$.

Mais en fait, lorsque les deux premières conditions sont d'ores et déjà évitées, la condition [4] se réécrit :

$$\tan a \tan b = 1 \iff \sin a \sin b = \cos a \cos b \iff \cos(a+b) = 0.$$

On constate qu'il s'agit de la même condition que [3]. C'est logique puisque ces deux conditions expriment toutes deux la nullité du dénominateur ! En résumé, afin que la formule sur $\tan(a+b)$ soit correcte, il faut que :

- a ne soit pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)
- b ne soit pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + l\pi$ (avec $l \in \mathbb{Z}$)
- $a + b$ ne soit pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + m\pi$ (avec $m \in \mathbb{Z}$)

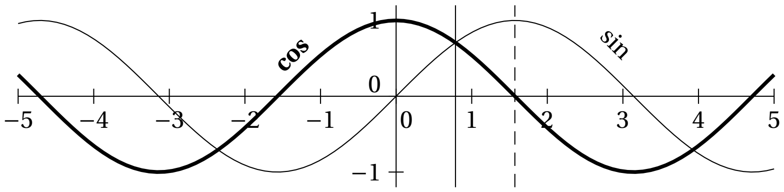
Pour la formule donnant $\tan(a-b)$, les conditions sont les mêmes en remplaçant b par $-b$.

4. Tracer les graphes des fonctions sin et cos sur une même figure. Expliquer comment on interprète les formules suivantes sur les graphes des deux fonctions : pour tout réel x,

   (a) $\sin(\pi - x) = \sin x$

Éléments de correction

Voici les deux graphes sur une même figure :



Si nous considérons les deux nombres x et $x' = \pi - x$, nous constatons que $\frac{x+x'}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot$ Cela signifie que, sur la droite réelle, $\frac{\pi}{2}$ est le milieu des nombres x et x'. Autrement dit, le nombre $x' = \pi - x$ est le symétrique de x par rapport à $\frac{\pi}{2}\cdot$ Par conséquent, la formule $\sin(\pi - x) = \sin x$ signifie que la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ (droite verticale en pointillés sur la figure).

   (b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Éléments de correction

Considérons maintenant les deux nombres x et $x'' = \frac{\pi}{2} - x$. On constate que $\frac{x+x''}{2} = \frac{\pi}{4}\cdot$ Cela signifie que, sur la droite réelle, $\frac{\pi}{4}$ est le milieu des nombres x et x''. Autrement dit, le nombre $x'' = \frac{\pi}{2} - x$ est le symétrique de x par rapport à $\frac{\pi}{4}\cdot$ Par conséquent, la formule $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ signifie que si on fait subir à la courbe de cos une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ (droite verticale en trait plein sur la figure), on trouve la courbe de sin.

   (c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Éléments de correction

La formule $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ signifie que, pour trouver l'ordonnée du point d'abscisse x sur la courbe représentative de la fonction cos, il suffit d'aller chercher l'ordonnée du point d'abscisse $\frac{\pi}{2} + x$ (décalé de $\frac{\pi}{2}$ vers la droite) sur la courbe de sin. En d'autres termes, la courbe de sin est décalée de $\frac{\pi}{2}$ vers la droite par rapport à la courbe de cos.

5. Résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$2\cos(2x)+4\cos(x)+3=0.$$

Éléments de correction

Utilisons la formule $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$. On peut alors réécrire l'équation étudiée en :

$$\begin{aligned} 2\left[2\cos^2(x)-1\right]+4\cos(x)+3=0 &\iff 4\cos^2(x)+4\cos(x)+1=0\\ &\iff [2\cos(x)+1]^2=0\\ &\iff \cos(x)=-\frac{1}{2}\cdot \end{aligned}$$

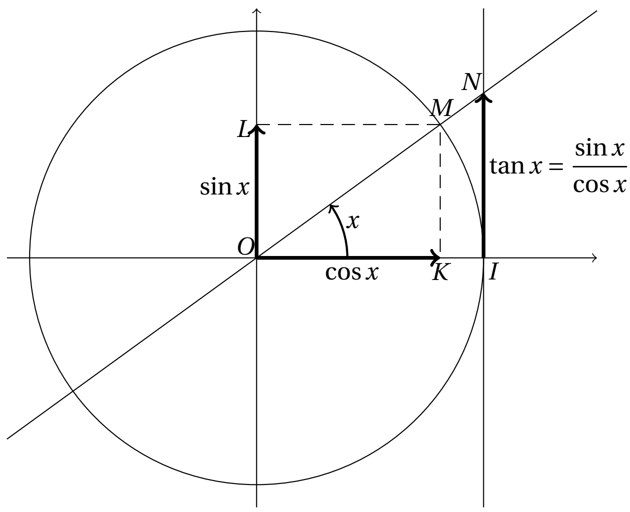
À l'aide du cercle trigonométrique, on voit qu'il existe deux angles (modulo 2π) dont le cosinus vaut $\frac{-1}{2}$: ce sont les angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-2\pi}{3}\cdot$ Par conséquent, les solutions de l'équation sont les nombres réels de l'une des deux formes suivantes :

$$2k\pi+\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad 2k\pi-\frac{2\pi}{3} \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}.$$

Exercice 21. Expliquer les formules ci-dessous à l'aide du cercle trigonométrique :

Éléments de correction

Le dessin ci-dessous rappelle comment on lit les nombres $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de l'angle x placé sur le cercle trigonométrique :

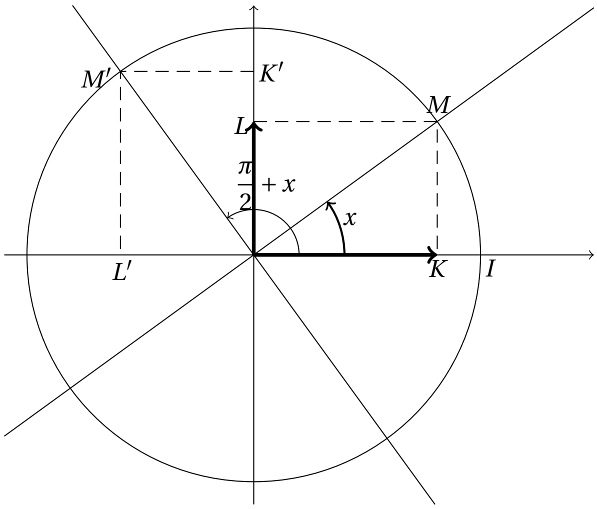


Dans la figure précédente, le point M est placé sur le cercle de centre O et de rayon 1 de sorte que l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)$ soit x. Alors $\cos x$ est l'abscisse de M et $\sin x$ est son ordonnée. Le point N est situé à l'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle issue de I. Le nombre $\tan x$ est l'ordonnée du point N (rappelons qu'il est égal à $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ d'après le théorème de Thalès).

1. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Éléments de correction

Si on place le point M' sur le cercle trigonométrique qui correspond à l'angle $x+\dfrac{\pi}{2}$, on constate qu'il s'agit de l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



On constate que L', l'image de L par la rotation, se trouve sur l'axe des ordonnées. De plus l'orientation de $\overrightarrow{OL'}$ est inversée par rapport à celle de l'axe des abscisses. Par conséquent, $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ correspond à l'opposé de l'abscisse de L', qui est l'opposé de l'ordonné de L, d'où la formule annoncée.

2. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

Éléments de correction

C'est le même principe avec une rotation d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$.

3. $\cos(x+\pi) = -\cos x$

Éléments de correction

On fait maintenant une rotation d'angle π ou, ce qui revient au même, une symétrie de centre O. Cela change les abscisses et les ordonnées en leurs opposées, d'où la formule annoncée.

4. $\cos\left(x+\dfrac{7\pi}{2}\right) = \sin x$

Éléments de correction

Il faut maintenant faire une rotation d'angle $\dfrac{7\pi}{2}$ mais

$$\frac{7\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$$

et donc cela revient à une rotation d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$. Faites un dessin pour constater la formule annoncée.

5. $\tan(x+\pi) = \tan x$

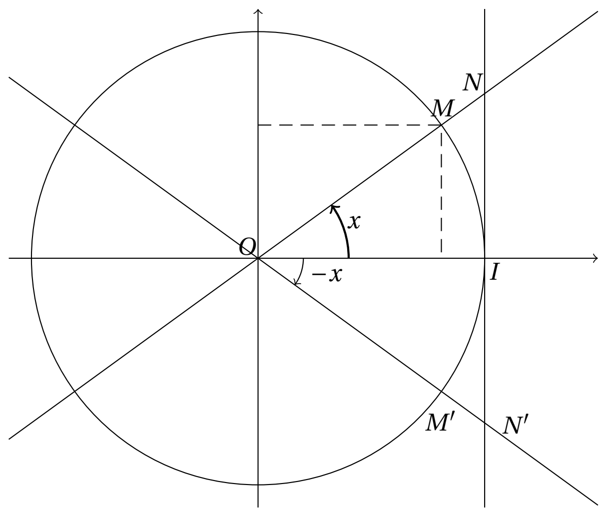
Éléments de correction

Comme précédemment, on fait une rotation de centre O et d'angle π, c'est-à-dire une symétrie de centre O. L'image M' de M par cette symétrie est le point diamétralement opposé à M. Mais on constate alors que les droites (OM) et (OM') sont confondues. Par conséquent, le point N servant à déterminer la tangente est le même pour $x+\pi$ et pour x d'où $\tan(x+\pi) = \tan x$.

6. $\tan(-x) = -\tan x$

Éléments de correction

Il s'agit ici de faire une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.



Le point N' est situé sur la tangente issue de I, symétrique de N par rapport à I. Il est donc clair que la tangente est changée en son opposé.

7. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Éléments de correction

C'est le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OKM ; rappelons que le cercle trigonométrique a un rayon égal à 1.

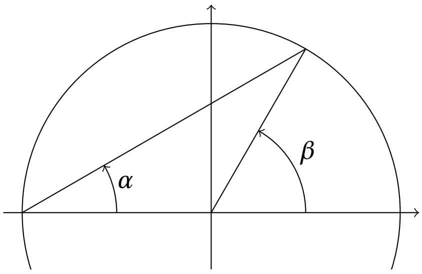
8. $\cos(-x) = \cos x$

Éléments de correction

Reprenons la figure précédente montrant la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Le point K n'est pas affecté par cette symétrie et donc le cosinus est inchangé.

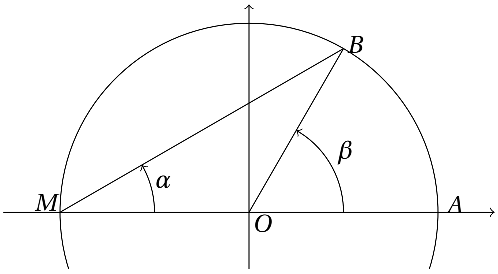
9. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

On démontrera la dernière formule pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ après avoir remarqué que, dans la figure ci-contre, l'angle β est le double de l'angle α :



Éléments de correction

Reprenons la figure de l'énoncé en nommant les points :



Montrons le lien entre les angles α et β. Nous commençons par écrire :

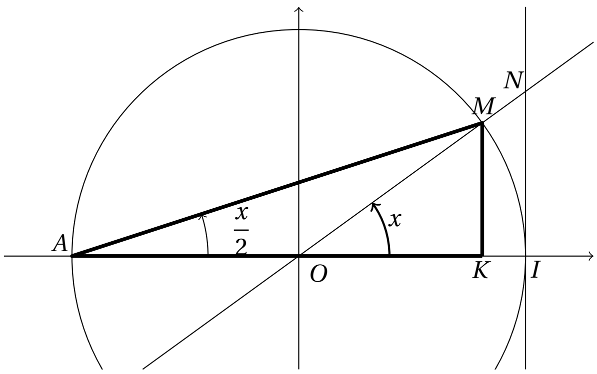
$$\beta = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}}\right) = \pi - \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}}\right)$$

Mais le triangle MOB est isocèle en O et donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}}\right) = \pi - 2\alpha$ si bien que :

$$\beta = \pi - \pi + 2\alpha = 2\alpha.$$

C'est un cas particulier d'un théorème appelé *théorème de l'angle au centre*.

Étudions maintenant la figure suivante :



La tangente de l'angle $\frac{x}{2}$ peut se calculer dans le triangle rectangle AKM puisque l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AM}}\right)$ est la moitié de l'angle x d'après le résultat que nous venons de prouver. Or l'abscisse de $\overrightarrow{AK}$ est $1+\cos x$ et l'ordonnée de $\overrightarrow{KM}$ est $\sin x$ d'où la formule :

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Exercice 22. Soient a et b deux réels. On pose $u = \dfrac{a+b}{2}$ et $v = \dfrac{a-b}{2}$.

1. Calculer $u+v$ et $u-v$. En déduire les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos a + \cos b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\cos a - \cos b &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\sin a + \sin b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\sin a - \sin b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

Éléments de correction

On constate immédiatement que $u+v=a$ et $u-v=b$. Les formules d'addition et de soustraction des cosinus et des sinus donnent :

$$\begin{aligned}
\cos(u+v) &= \cos u\cos v - \sin u \sin v\\
\sin(u+v) &= \sin u\cos v + \sin v \cos u\\
\cos(u-v) &= \cos u\cos v + \sin u \sin v\\
\sin(u-v) &= \sin u\cos v - \sin v \cos u
\end{aligned}$$

et donc $\cos a + \cos b = \cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos u \cos v$.

On procède de même pour les autres formules.

2. Montrer les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]\\
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]
\end{aligned}$$

Éléments de correction

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b)+\cos(a-b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b + \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
&= 2\cos a\cos b.
\end{aligned}$$

En divisant cette égalité par 2, on trouve la première formule demandée. On procède de même pour les autres formules.

Remarque : Les 7 formules énoncées dans les questions 1 et 2 seront à apprendre.

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

$$(1)\ \sin(2x)+\sin(6x)=\sin(4x) \qquad (2)\ \cos(x)\cos(7x)=\cos(3x)\cos(5x)$$

Éléments de correction

D'après la troisième formule énoncée à la question 1 :

$$\begin{aligned}\sin(2x)+\sin(6x)=\sin(4x) &\iff 2\sin(4x)\cos(-2x)=\sin(4x)\\ &\iff \sin(4x)[1-2\cos(2x)]=0.\end{aligned}$$

On a utilisé la parité de la fonction cos.

Attention !

Attention à ne pas simplifier par $\sin(4x)$ qui peut être nul !

L'équation (1) se réécrit encore :

$$\sin(4x)=0 \quad \text{ou} \quad \cos(2x)=\frac{1}{2}\cdot$$

Grâce au cercle trigonométrique, on sait que les angles de sinus nul sont 0 et π (modulo 2π) et ceux de cosinus égal à $\frac{1}{2}$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π). Cela peut s'écrire de la façon suivante : il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $4x=k\pi$ ou bien il existe $l\in\mathbb{Z}$ tel que $2x=\frac{\pi}{3}+2l\pi$ ou bien il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $x=\frac{-\pi}{3}+2m\pi$. Après division, on obtient :

$$x=\frac{k\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x=\frac{\pi}{6}+l\pi \quad \text{ou} \quad x=\frac{-\pi}{6}+m\pi\cdot$$

Il y a donc trois familles de solutions.

Utilisons maintenant la première formule de la question (2). Il vient :

$$\begin{aligned}&\cos(x)\cos(7x)=\cos(3x)\cos(5x)\\ \iff\ &\frac{1}{2}[\cos(-6x)+\cos(8x)]=\frac{1}{2}[\cos(-2x)+\cos(8x)]\\ \iff\ &\cos(6x)=\cos(2x)\\ \iff\ &\cos(6x)-\cos(2x)=0.\end{aligned}$$

Grâce à la deuxième formule de la première question, cela est encore équivalent à :

$$-2\sin(4x)\sin(2x)=0 \iff \sin(4x)=0 \text{ ou } \sin(2x)=0.$$

Cela revient à dire qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $4x=k\pi$ ou qu'il existe $l\in\mathbb{Z}$ tel que $2x=l\pi$. Mais il est clair que si $2x=l\pi$ alors $4x=2l\pi$ et $2l$ est un entier relatif. Par conséquent, la deuxième famille de solutions n'est qu'un cas particulier de la première famille. Finalement, l'équation (2) équivaut à : il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=\frac{k\pi}{4}\cdot$

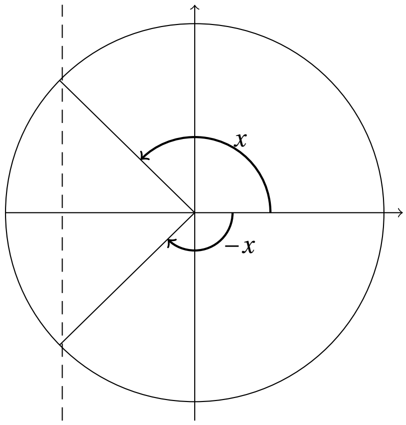
Exercice 23.

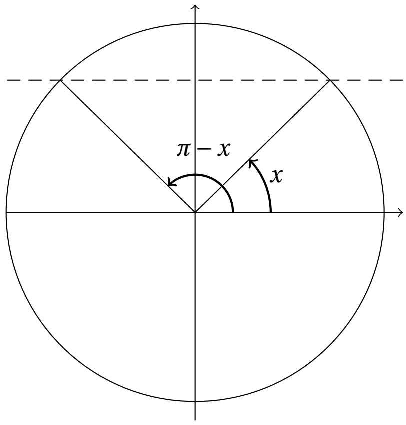
1. Grâce au cercle trigonométrique, préciser à quelle condition sur les réels x et y, on a :

$$(1)\ \cos x = \cos y \qquad (2)\ \sin x = \sin y.$$

Éléments de correction

Les dessins ci-dessous illustrent les possibilités pour que deux angles aient le même cosinus (ou le même sinus) :





Ainsi deux réels x et y vérifient $\cos x = \cos y$ si, et seulement si, ils représentent le même angle (modulo 2π) ou des angles opposés (modulo 2π), autrement dit si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$ ou il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $y = -x + 2l\pi$.

De même $\sin x = \sin y$ si, et seulement si, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$ ou il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $y = \pi - x + 2l\pi$.

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle θ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(1)\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3\theta) \qquad (2)\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(3\theta)$$

Éléments de correction

- Résolution de (1) : d'après la première question, l'équation (1) est vérifiée lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3\theta = \theta + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (cas 1.1) ou bien qu'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $3\theta = -\theta - \frac{\pi}{3} + 2l\pi$ (cas 1.2). On peut poursuivre ainsi :

$$(1.1) \iff 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$(1.2) \iff 4\theta = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \iff \theta = -\frac{\pi}{12} + l\frac{\pi}{2}$$

Si on souhaite raisonner avec des angles modulo 2π, cela revient à :

  - pour (1.1) : les angles $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-5\pi}{6}$.
  - pour (1.2) : les angles $\frac{-\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$.

Ces angles (modulo 2π) sont représentés par un point accompagné de la lettre C sur la figure ci-dessous.

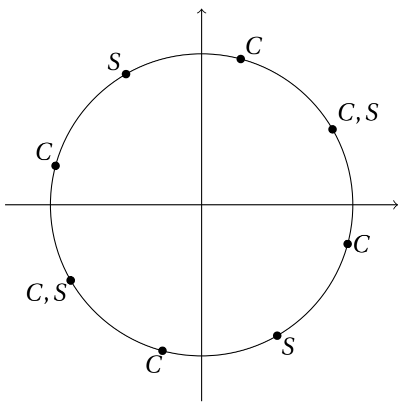
- Résolution de (2) : d'après la première question, l'équation (2) est vérifiée lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3\theta = \theta + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (cas 2.1) ou bien qu'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $3\theta = \pi - \theta - \frac{\pi}{3} + 2l\pi$ (cas 2.2). On peut poursuivre ainsi :

$$(2.1) \iff 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$(2.2) \iff 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \iff \theta = \frac{\pi}{6} + l\frac{\pi}{2}$$

Si on souhaite raisonner avec des angles modulo 2π, cela revient à :

- pour (2.1) : les angles $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-5\pi}{6}$.
- pour (2.2) : les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{3}$, $\frac{-5\pi}{6}$.

Ces angles (modulo 2π) sont représentés par un point accompagné de la lettre S sur la figure ci-dessous.



Exercice 24 (Utilisation de nombres complexes en trigonométrie)**.** Dans cet exercice, on fixe deux réels non nuls a et b.

1. Pour tout réel θ, montrer que : $a\cos\theta + b\sin\theta = \Re\mathrm{e}\left((a-ib)e^{i\theta}\right)$.

Éléments de correction

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On remplace $e^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$ puis on développe et il vient :

$$(a-ib)e^{i\theta} = (a-ib)(\cos\theta + i\sin\theta) = [a\cos\theta + b\sin\theta] + i[a\sin\theta - b\cos\theta]$$

En prenant la partie réelle, on trouve bien $a\cos\theta + b\sin\theta$.

2. Soit $z = a+ib$, r le module de z et ϕ un argument de z. Montrer que, pour tout réel θ, on a :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos\left(\theta - \phi\right).$$

Éléments de correction

D'après les définitions de r et ϕ, il vient $a+ib = re^{i\phi}$ et donc $a-ib = re^{-i\phi}$. Par conséquent :

$$(a-ib)e^{i\theta} = re^{i(\theta-\phi)} \quad \text{et donc} \quad \Re\mathrm{e}\left((a-ib)e^{i\theta}\right) = r\cos(\theta-\phi).$$

En identifiant cela avec la partie réelle calculée à la première question, on trouve bien :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta-\phi).$$

3. Utiliser cette transformation pour déterminer tous les réels x de l'intervalle $[-\pi,\pi]$ tels que :

$$\cos x-\sqrt{3}\sin x\leqslant 1.$$

Éléments de correction

Appliquons ce qui précède avec $\theta=x$, $a=1$ et $b=-\sqrt{3}$. Nous constatons que le module de $a+ib$ est

$$r=\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2$$

puis nous écrivons :

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)=2e^{-i\pi/3}.$$

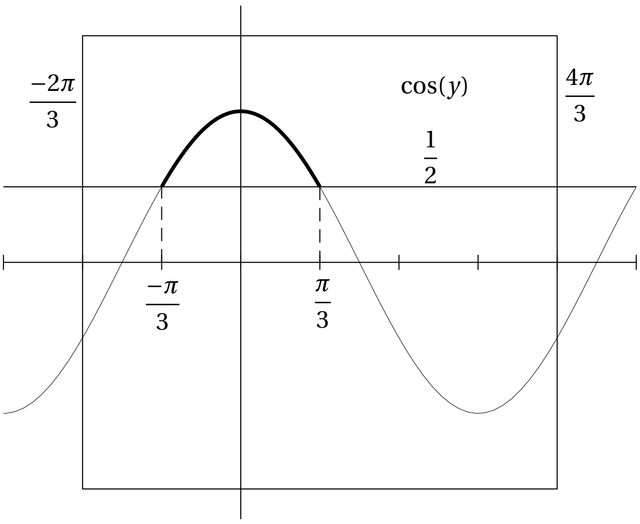
Cela permet de déterminer un argument de $1-i\sqrt{3}$ qui est $\phi=\frac{-\pi}{3}\cdot$ D'après la deuxième question, il vient finalement :

$$\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).$$

Nous pouvons maintenant résoudre l'inéquation proposée :

$$\begin{aligned}\cos x-\sqrt{3}\sin x\leqslant 1 &\iff 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1\\ &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\end{aligned}$$

Pour plus de simplicité, posons $y=x+\frac{\pi}{3}\cdot$ Puisque $x\in[-\pi,\pi]$, il vient : $y\in\left[\frac{-2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]\cdot$ Traçons maintenant le graphe de la fonction $y\mapsto\cos y$ sur l'intervalle $\left[\frac{-2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ et faisons-y figurer également la valeur $\frac{1}{2}$ en ordonnée :



On constate que $\cos y\leqslant\frac{1}{2}$ lorsque $y\leqslant\frac{-\pi}{3}$ ou que $y\geqslant\frac{\pi}{3}$ ce qui revient à dire :

$$-\pi\leqslant x\leqslant\frac{-2\pi}{3}\quad\text{ou}\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$