CHAPITRE 0 : CALCUL

Table des matières

Attention !

Les exercices qui suivent vous paraîtront probablement élémentaires, mais l'expérience prouvent que certain(e)s d'entre vous ne sont pas très à l'aise en calcul, et avant de pouvoir aborder de nouveaux concepts, il est impératif de maîtriser le calcul.

1 Simplification de fractions

Dans les calculs ci-dessous, effectuer les opérations avec les fractions les plus simples possibles et exprimer les résultats sous forme de fraction avec un dénominateur entier lorsque cela est possible.

Par exemple, $\frac{1}{48}-\frac{1}{80}$ ne se fera pas avec la calculatrice ni sous la forme $\frac{80-48}{48\times 80}$. Puisque 48 et 80 ont un multiple commun bien plus petit que leur produit :

$$\frac{1}{2^4\times 3}-\frac{1}{2^4\times 5}=\frac{5-3}{2^4\times 3\times 5}=\frac{1}{2^3\times 3\times 5}=\frac{1}{120}.$$

Exercice 1. Simplifier $A=\frac{1}{120}+\frac{1}{45}+\frac{3}{20}+\frac{1}{36}$.

Exercice 2. Lors des calculs de probabilités conditionnelles, on peut être amené à calculer une expression de la forme

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)}.$$

1. Simplifier : $p=\dfrac{\frac{4}{10}\times\frac{1}{50}}{\frac{4}{10}\times\frac{1}{50}+\frac{2}{3}\times\frac{15}{50}+\frac{1}{3}\times\frac{34}{50}}$.

2. Simplifier : $q=\dfrac{\frac{2}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{100}}{\frac{2}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}}$

Exercice 3. Simplifier les expressions ci-dessous sachant que a, x, y, z désignent des réels et que a est strictement positif.

1. $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^5\left(\frac{6}{5}\right)^{4+y}}{\left(\frac{9}{10}\right)^7\left(\frac{2}{15}\right)^{2y-3}}$
2. $\dfrac{a^{x+y}e^{(x-y)\ln(a)}}{a^2a^{(-2x-4)}}$
3. $\dfrac{6^{x-2}3^{2x+2}}{12^{2x-1}}$
4. $\dfrac{30^{3-x}}{6^{2-x}5^{x+1}}$
5. $(-3)^{-2}\cdot 2^4$
6. $(-xy^2)\cdot(-yz^2)\cdot(-zx^2)$
7. $\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2\cdot(-y)^3$

Exercice 4. Simplifier les fractions suivantes, sachant que a, b, c, d désignent des réels non nuls :

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)};\quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)};\quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$$

Exercice 5 (Racines et expressions conjuguées)**.** Écrire avec un dénominateur entier les expressions suivantes. Par exemple,

$$\frac{1}{1-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

en utilisant l'identité remarque $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ pour tout couple (a, b) de réels.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.
2. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}$
3. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} + \dfrac{3\sqrt{5}+1}{2-\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

Exercice 6 (Expressions conjuguées)**.** Il est utile de savoir écrire une fraction de complexes avec un dénominateur réel pour pouvoir déterminer facilement ses parties réelle et imaginaire. Par exemple, si $z = \frac{1+2i}{1+i}$, alors :

$$z = \frac{(1+2i)\overline{(1+i)}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{(1+2i)(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{1-i+2i+2}{2} = \frac{3+i}{2},$$

Donc

$$\Re\mathrm{e}\,(z) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}\,(z) = \frac{1}{2}.$$

Écrire avec un dénominateur entier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1+i}{i}$
2. $\dfrac{i-4}{2i}$
3. $\dfrac{3+4i}{5-7i}$
4. $\dfrac{4-3i}{i-1}$
5. $\dfrac{5-3i}{(4-i)(1+3i)}$
6. $\dfrac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)}$
7. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+2\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}-\dfrac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}$

Exercice 7. Lorsque des puissances interviennent, il est plus habile d'utiliser la forme trigonométrique des complexes, *i.e.* leur écriture sous la forme $re^{i\theta}$, où $r \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le module, un argument, les parties réelle et imaginaire de :
$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2}.$$
2. En déduire les parties réelle et imaginaire de :
   (a) $z_1 + z_2$,
   (b) $z_1 z_2$,
   (c) $\frac{z_1}{z_2}$,
   (d) $(z_1)^6(z_2)^{12}$
   (e) $(z_1)^8(z_2)^{-3}$
3. ($\star$) Trouver les parties réelle et imaginaire de : $\dfrac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$.

Exercice 8 (Factorielles)**.** On rappelle le sens de la notation factorielle :
$$0! = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$$
On définit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} puis simplifier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ainsi que l'écart relatif $\left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right|$.

2 Polynômes

Exercice 9 (Relations coefficients-racines)**.**

1. Soit $a \in \mathbb{C}^\star$, et b, c, z_1 et z_2 des complexes. À quelle condition nécessaire et suffisante pour que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2) \quad ?$$
2. Trouver les solutions de l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et vérifier la condition ci-dessus.
3. En sachant que ses racines sont entières, factoriser le trinôme $x^2 + 5x + 6$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 (Factorisation)**.** Factoriser sans utiliser le discriminant les trinômes suivants pour tout $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^2 + 3z$,
2. $z^2 - 9$,
3. $4z^2 + 25$,
4. $z^2 + 4z + 4$.

Exercice 11 (Mise sous forme canonique et factorisation)**.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $a \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Cette dernière expression s'appelle forme canonique du polynôme $aX^2 + bX + c$. Elle peut être factorisée en utilisant l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
Mettre $49X^2 + 21X + \frac{3}{2}$ sous forme canonique et en déduire ses racines.

Exercice 12 (Fractions rationnelles)**.** Comme pour les fractions d'entiers, pour réduire au même dénominateur une somme de fractions rationnelles, il convient de trouver un plus petit commun multiple des dénominateurs en les écrivant sous forme factorisée. Si, après réduction au même dénominateur, le numérateur et le dénominateur ont un facteur en commun, on le simplifie.

1. Simplifier $A = \dfrac{1}{u^2 + 3u + 2} + \dfrac{1}{u^2 - 1} + \dfrac{-2}{u^2 + u} - \dfrac{1}{u^2 + u - 2}$.
2. Simplifier $B = \dfrac{2(x-1)}{9x^2 - 4} - \dfrac{2 - x}{9x^2 + 12x + 4} + \dfrac{x + 4}{9x^2 - 4}$.

3 Exponentielle et logarithme

Exercice 13. Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{e^3 \times e^{-1}}{e^7}$
2. $B = \dfrac{(e^{-2})^3 \times e^{-5}}{(e^2)^2}$
3. $C = \dfrac{1}{e^{0,3}} \times \dfrac{1}{e}$
4. $D = e^{\frac{1}{2}\ln(8) + 1}$
5. $E = \dfrac{e^{2\ln(3)}}{e^{3\ln(2)}}$
6. $F = \ln\left(\dfrac{e^5}{e^3}\right)$
7. $G = \ln(\sqrt{e}) - \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{3x+1} = e^x$
2. $e^{x(x+1)} = 1$
3. $e^x = \dfrac{1}{e^{x+1}}$
4. $e^{3x-1} = 3$
5. $e^{1/x} = 2$
6. $e^{2x} - 2e^{-2x} = 1$ *On pourra poser $X = e^{2x}$.*
7. $\ln(1+3x) = \ln(x+1)$
8. $\ln(x-1) + \ln(2-x) = \ln(6x)$
9. $\ln(2x+1) = \ln(x^2-1)$

Exercice 15 (Monotonie et inéquations)**.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des assertions, dire si elles sont vraies :

- jamais.
- Si f est croissante.
- Si f est strictement croissante.

1. Pour tous réels a, b tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
2. Pour tous réels a, b tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) < f(b)$.
3. Pour tous réels a, b tels que $a < b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
4. Pour tous réels a, b tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
5. Pour tous réels a, b tels que $f(a) < f(b)$, on a $a < b$.
6. Pour tous réels a, b tels que $f(a) < f(b)$, on a $a \leqslant b$.
7. Pour tous réels a, b tels que $f(a) \leqslant f(b)$, on a $a < b$.
8. Pour tous réels a, b tels que $f(a) \leqslant f(b)$, on a $a \leqslant b$.

Exercice 16. Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. $e^{3x-1} \leqslant e^{2x}$
2. $e^{2x} - e^{x+1} \leqslant 0$
3. $e^{x^2} > e^{2x^2-x}$

4 Dérivées, primitives

Exercice 17. Pour chacune des fonctions numériques réelles suivantes, donner son domaine de définition, préciser en quels points elle est dérivable et calculer sa dérivée en ces points :

1. $x \mapsto x^3 - x^2$
2. $x \mapsto \dfrac{x^2-3}{x+1}$
3. $x \mapsto xe^{-x}$
4. $x \mapsto \sqrt{x^2+2x-1}$
5. $x \mapsto \ln(x^2+x+1)$
6. $x \mapsto \dfrac{(2x+1)^3}{x+1}$
7. $x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$
8. $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$
9. $x \mapsto e^{x^2-x} + \dfrac{3}{4}x^4$
10. $x \mapsto e^{\omega x} - x$, où ω est un réel fixé.

Exercice 18. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué :

1. $I = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 2x$
2. $I = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 6x^{11} - 8x^3$
3. $I =]0;+\infty[$, $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$
4. $I =]-\infty;2[$, $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$
5. $I =]-\dfrac{3}{2};+\infty[$, $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^5}$
6. $I =]1;+\infty[$, $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 19 (Introduction aux équations différentielles)**.** On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction a continue sur I vérifiant $f'(t) = a(t)f(t)$ pour tout t dans I.

1. On suppose dans cette question uniquement que a est constante. Montrer que f est infiniment dérivable (c'est à dire que f est dérivable, et que sa dérivée est-elle dérivable, etc.). On notera $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ (c'est à dire que $f^{(n)}$ est la dérivée n-ème de f).
2. Rappeler pourquoi a admet au moins une primitive sur I. On note A une telle primitive.
3. Démontrer que $F : t \mapsto f(t)e^{-A(t)}$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
4. En déduire qu'il existe un réel K tel que, pour tout réel t appartenant à I, $f(t) = Ke^{A(t)}$.

5. Application pratique : dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les fonctions f vérifiant l'égalité proposée sur l'intervalle I indiqué :

   (a) $\forall t \in I, \quad f'(t) = 3f(t)$, $I = \mathbb{R}$
   (b) $\forall t \in I, \quad f'(t) = -\frac{1}{2}f(t)$, $I = [0, +\infty[$
   (c) $\forall t \in I, \quad f'(t) = 2tf(t)$, $I = \mathbb{R}$
   (d) $\forall t \in I, \quad f'(t) = \dfrac{1}{t}f(t)$, $I = [1, 2]$
   (e) $\forall t \in I, \quad f'(t) = -\dfrac{1}{t}f(t)$, $I =]-\infty, 0[$

5 Trigonométrie

Exercice 20. Dans cet exercice, on considère la fonction $\tan : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dite fonction tangente.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Rappeler les formules d'addition du cosinus et du sinus.
3. Soient a et b deux réels. Démontrer les formules ci-dessous :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$

   en précisant pour quels réels a et b ces formules sont valables.
4. Tracer les graphes des fonctions sin et cos sur une même figure. Expliquer comment on interprète les formules suivantes sur les graphes des deux fonctions : pour tout réel x,

   (a) $\sin(\pi - x) = \sin x$
   (b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
   (c) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
5. Résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x :

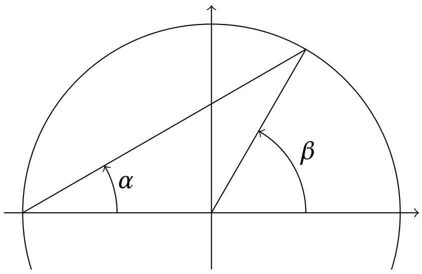
$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 = 0.$$

Exercice 21. Expliquer les formules ci-dessous à l'aide du cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
2. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
3. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos x$
5. $\cos\left(x + \dfrac{7\pi}{2}\right) = \sin x$
6. $\tan(x + \pi) = \tan x$
7. $\tan(-x) = -\tan x$
8. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
9. $\cos(-x) = \cos x$

10. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

On démontrera la dernière formule pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ après avoir remarqué que, dans la figure ci-contre, l'angle β est le double de l'angle α :



Exercice 22. Soient a et b deux réels. On pose $u = \frac{a+b}{2}$ et $v = \frac{a-b}{2}$.

1. Calculer $u+v$ et $u-v$. En déduire les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \cos a - \cos b &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sin a + \sin b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sin a - \sin b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

2. Montrer les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]\\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]\\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]\end{aligned}$$

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

$$(1)\ \sin(2x)+\sin(6x) = \sin(4x) \qquad (2)\ \cos(x)\cos(7x) = \cos(3x)\cos(5x)$$

Exercice 23.

1. Grâce au cercle trigonométrique, préciser à quelle condition sur les réels x et y, on a :

$$(1)\ \cos x = \cos y \qquad (2)\ \sin x = \sin y.$$

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle θ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(1)\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \cos(3\theta) \qquad (2)\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \sin(3\theta)$$

Exercice 24 (Utilisation de nombres complexes en trigonométrie)**.** Dans cet exercice, on fixe deux réels non nuls a et b.

1. Pour tout réel θ, montrer que : $\quad a\cos\theta + b\sin\theta = \Re\mathrm{e}\left((a-ib)e^{i\theta}\right)$.

2. Soit $z = a+ib$, r le module de z et ϕ un argument de z. Montrer que, pour tout réel θ, on a :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos\left(\theta-\phi\right).$$

3. Utiliser cette transformation pour déterminer tous les réels x de l'intervalle $[-\pi,\pi]$ tels que :

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x \leqslant 1.$$