SAVOIR MENER UN CALCUL

1 Règles de priorité entre les opérations

Les opérations sont listées ci-dessous dans l'ordre décroissant de priorité (de la plus prioritaire à la moins prioritaire) :

1. fonction usuelle pour laquelle on omet les parenthèses ;
2. exposant ;
3. multiplication et division ;
4. addition et soustraction.

Dès qu'on veut un autre résultat que celui donné par les règles de priorité, les parenthèses sont obligatoires. Les parenthèses inutiles doivent être évitées (sauf si on tient à attirer l'attention sur un groupe pour le mettre en évidence). Tout parenthésage incorrect est une erreur de calcul.

Exemples 1.

1. L'écriture $\ln x+1$ se comprend comme $1+\ln x$; si on veut prendre le logarithme de $x+1$, il faut écrire $\ln(x+1)$.
2. Si on écrit $2n!$, il s'agit de $2(n!)$; pour prendre la factorielle de $2n$, il faut écrire $(2n)!$.
3. $2x^2$ signifie $2(x^2)$; si on veut le carré de $2x$, il faut écrire $(2x)^2$.
4. L'écriture $2x+5(3x+4)$ signifie $2x+15x+20$; pour faire le produit de $2x+5$ par $3x+4$, il faut écrire $(2x+5)(3x+4)$.
5. L'écriture $1/x+3$ signifie $\frac{1}{x}+3$ et non pas $\frac{1}{x+3}$.

Méthode !

Finissons par un règle de priorité souvent méconnue : a^{b^c} signifie $a^{(b^c)}$ et non $(a^b)^c = a^{bc}$. Par exemple, pour tout x réel, x^{2^3} signifie x^8 et non pas $(x^2)^3$, qui vaut x^6.

Pour les opérations du même niveau de priorité, on effectue les opérations de la gauche vers la droite.

Exemples 2.

1. L'écriture $1/2x$ signifie $\frac{x}{2}$ et non pas $\frac{1}{2x}$. En règle générale, en maths, on évite d'écrire la division avec / car c'est moins facile à lire. On préfère l'écrire avec une fraction. La division avec / s'utilise parfois dans les exposants lorsqu'elle rend la lecture plus facile : on peut préférer écrire $x^{1/3}$ plutôt que $x^{\frac{1}{3}}$ (mais ça n'a rien d'obligatoire).
2. L'écriture $x-y+z$ signifie $(x-y)+z$ et non pas $x-(y+z)$.

2 Les fractions

- La barre de fraction est un délimiteur qui marque une priorité. Par exemple, dans $\dfrac{x^2}{2}$, seul le x est mis au carré.

- La barre de fraction doit être alignée sur la ligne de calcul (avec le signe =, les signes d'opération, etc). La position de la barre sert elle aussi à marquer une priorité. Par exemple, l'écriture $x = \frac{\frac{a}{b}}{c}$ signifie $x = \frac{a}{bc}$ tandis que $x = \frac{a}{\frac{b}{c}}$ signifie $x = \frac{ac}{b}$.

- Dans un résultat final, il FAUT **simplifier** les fractions au maximum. Lorsque la fraction est numérique, on utilise la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur afin de détecter les facteurs communs qu'il convient d'éliminer. Par exemple :

  $$\frac{52}{39} = \frac{4 \times 13}{3 \times 13} = \frac{4}{3}.$$

  Laisser une fraction non simplifiée est une **erreur** (sauf cas très particulier ; par exemple quand on veut comparer des fractions, il est préférable de les avoir toutes écrites avec le même dénominateur).

- Lorsque la fraction n'est pas numérique (présence d'une inconnue x par exemple), il faut simplifier au maximum en faisant bien attention de ne pas introduire d'hypothèse supplémentaire.

  Par exemple,

  $$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}.$$

  Attention toutefois que l'expression de gauche n'est pas définie en $x = 1$ tandis que celle de droite l'est.

3 Les racines carrées

La notation $\sqrt{x}$ n'est définie que lorsque x est un réel positif. Lorsque $x > 0$, le nombre x possède deux racines carrées, c'est-à-dire deux nombres dont le carré vaut x. La racine carrée **positive** est notée $\sqrt{x}$. La racine carrée négative est $-\sqrt{x}$. Il est très important de bien comprendre et retenir la définition ci-dessous :

Définition 1

Le nombre $\sqrt{x}$ n'est défini que si $x \geq 0$. Dans ce cas, $\sqrt{x}$ est le réel t défini par :

$$t = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\, t^2 = x \text{ et } t \geqslant 0 \,\right]$$

Remarques 1.

- L'affirmation suivante est fausse :
$$t = \sqrt{x} \Longleftrightarrow t^2 = x$$
En effet, en prenant $x = 9$ et $t = -3$, on voit que $t^2 = x$ bien que t ne soit pas égal à $\sqrt{x}$.
- Pour tout réel x, il vient $x^2 \geqslant 0$ donc l'écriture $\sqrt{x^2}$ est correctement définie. De plus, on retiendra la formule suivante :
$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$
- Par contre, on a $(\sqrt{x})^2 = x$ mais l'écriture $(\sqrt{x})^2$ n'a de sens que si x est positif.

Lorsque des racines sont présentes au dénominateur, la convention veut qu'on les ramène au numérateur. Par exemple, on écrira $\frac{\sqrt{2}}{2}$ plutôt que $\frac{1}{\sqrt{2}}$· Cependant cette convention n'est pas stricte et, dans certains cas, on peut considérer que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est plus simple que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, en particulier lorsqu'une inconnue se trouve dans la racine (dans ce cas, on préfère l'écriture qui fait apparaître la lettre le moins de fois possible). Par exemple, on écrira $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et non pas $\frac{\sqrt{x}}{x}$.

Il peut être un peu plus délicat de ramener les racines au numérateur lorsqu'il y en a plusieurs. Par exemple, que faire de $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$? La technique adaptée consiste à multiplier haut et bas par **la forme irrationnelle conjuguée** $\sqrt{5}-\sqrt{7}$· Cela donne :

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$$

4 Quelques règles de présentation

Certains étudiants pensent que les questions de présentation sont des questions secondaires et sans grande importance. C'est une erreur de débutant consistant à perdre de vue qu'une copie est un outil de communication. Il faut donc systématiquement se poser les questions suivantes :

- Ce que j'écris est-il clair ?
- Y a-t-il une seule façon de comprendre ce qui est écrit ?
- Est-ce facile à lire ? agréable à lire ?

Bien présenter sa copie nécessite d'avoir clairement compris ce qu'on souhaite exposer, d'avoir fait la part des choses entre ce qui est important et ce qui est secondaire puis d'être capable d'expliquer la réponse à un lecteur en mettant en valeur l'essentiel. Ce n'est pas une activité si simple que cela et il est donc légitime qu'elle soit, elle aussi, prise en compte dans la note.

Quelques règles à suivre :

- Les copies seront propres. On évitera les ratures trop nombreuses et on barrera proprement plutôt que d'utiliser une trop grande quantité d'effaceur. Les lettres seront correctement formées (on ne doit pas confondre les lettres entre elles). Les exposants et les indices sont écrits suffisamment gros pour être lisibles. Rendre la lecture de sa copie désagréable revient à se tirer une balle dans le pied car la notation est humaine et a fortiori un peu subjective.
- On met en évidence le résultat des calculs / les arguments importants (autre couleur, encadrement, centrage, etc).
- On peut écrire des successions d'égalités en alignant les signes = les uns en dessous des autres sans répéter le terme de gauche de l'égalité. En cas de changement de page au milieu d'un calcul, il faut réécrire les deux côtés de l'égalité. Par exemple,

  Pour simplifier $P(x) = x(x-3)-(x-2)(x-1)$ pour un certain x réel fixé, on écrit :

  $$\begin{aligned} P(x) &= x(x-3)-(x-2)(x-1) \\ &= (x^2-3x)-(x^2-3x+2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

  et donc :

  $$\boxed{P(x) = -2}$$

  Le résultat dans le cadre doit pouvoir être lu de façon directe. On n'écrit pas un seul des deux côtés d'une égalité dans le cadre. Par exemple, on évitera :

  $$\begin{aligned} P(x) &= \dots \\ &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

- Il faut annoncer (à l'aide d'une phrase en français) ce qu'on fait avant de se lancer dans un calcul. De même, les calculs trop longs doivent être entrecoupés de passages en français (toutes les 3 ou 4 lignes). Par exemple :

  Pour tout réel x, factorisons l'expression suivante :

  $$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)+6$$

  En développant successivement les deux produits, il vient :

  $$\begin{aligned} P(x) &= [x^2-3x+2](x-3)+6 \\ &= x^3-3x^2+2x-3x^2+9x-6+6 \\ &= x^3-6x^2+11x \end{aligned}$$

Finalement, en factorisant, on trouve :

$$\boxed{P(x) = x\left(x^2 - 6x + 11\right)}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 6x + 11$ vaut $\Delta = 36 - 44 = -8$. Puisqu'il est strictement négatif, ce trinôme ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

- Dans la plupart des cas, le symbole de multiplication $\times$ est sous-entendu. En particulier, on le sous-entend entre deux lettres ou entre un chiffre et une lettre (dans ce cas, on met en général le chiffre avant la lettre) [on écrit xy et $2x$ à la place de $x \times y$ et $2 \times x$]. Cela est particulièrement vrai lorsque l'une des lettres est un x, facilement confondu avec $\times$. On sous-entend également le symbole de multiplication avant ou après une parenthèse [on écrit $2(a+b)$ et non pas $2 \times (a+b)$]. On peut utiliser le point centré à la place de la croix pour désigner la multiplication. Par exemple, on peut écrire $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$