

Universalité des modèles de percolation bootstrap et cinétiquement contraints en deux dimensions

Ivailo Hartarsky

Technische Universität Wien, Institut für Stochastik und
Wirtschaftsmathematik, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040, Vienna,
Austria `ivailo.hartarsky@tuwien.ac.at`

26 janvier 2024

1 Introduction

Nous nous intéressons à deux groupes de modèles de physique statistique – la percolation bootstrap et les modèles cinétiquement contraints (KCM). Ils sont apparus indépendamment vers le début des années 1980 [10, 13, 14, 31] pour rendre compte de phénomènes aussi divers que la dynamique à basse température des matériaux magnétiques, la nucléation des cristaux, la propagation d’infection ou rumeur dans une population et la dynamique des fluides surfondus.

Ici nous nous focalisons sur ces modèles sur la grille carrée $\mathbb{Z}^2$. Plus précisément, nous discuterons des travaux récents portant sur leurs aspects universaux qui est un sujet central et transversal en physique statistique. Il s’agit des traits (qualitatifs ou quantitatifs) du comportement du modèle qui sont indépendants de ses détails microscopiques, du moins au sein d’une sous-classe de modèles. Le but principal de ces études est de déterminer ces classes d’universalité, qui peuvent être dictées par des symétries du modèle, son caractère dirigé ou non, etc. Nous sommes tout particulièrement à la recherche des exposants critiques apparaissant lorsque le paramètre du modèle (température, densité initiale d’infection, etc.) tend vers sa valeur critique.

2 Définition des modèles

2.1 Percolation bootstrap

Un modèle de percolation bootstrap est défini par un entier strictement positif d (*dimension*) et une *famille de mise à jour* $\mathcal{U}$ qui est une famille finie non-vide de sous-ensembles finis non-vides de $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ appelés *règles de mise à jour*. Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{Z}^d$, on définit la *transformation de bootstrap*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(A) = A \cup \{x \in \mathbb{Z}^d : \exists U \in \mathcal{U}, x + U \subset A\}$$

avec $x + U = \{x + u : u \in U\}$. En mots, étant donné que l'ensemble A de *sites* est *infecté*, à la prochaine étape, on infecte de plus tout site tel qu'au moins une règle translatée en ce site est déjà entièrement infectée. Ce processus peut naturellement être vu comme un système dynamique en temps discret. Étant donné un ensemble de sites initialement infectés $A \subset \mathbb{Z}^d$, sa *clôture* est

$$[A]_{\mathcal{U}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^n(A),$$

où $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^n$ signifie $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ itéré n fois et $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels. On dit que A est *stable* si $A = [A]_{\mathcal{U}}$.

Pour donner un exemple, considérons le *modèle à r voisins*. Là on a $\mathcal{B}(A) = A \cup \{x \in \mathbb{Z}^d : |\{y \in A : y \sim x\}| \geq r\}$ avec $y \sim x$ si x et y sont voisins dans la structure de graphe usuelle de $\mathbb{Z}^d$. Alternativement, on peut voir ceci comme $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(A)$ avec $\mathcal{U}$ la famille des $\binom{2d}{r}$ ensembles de r voisins de l'origine. C'est-à-dire, si n'importe quels r voisins d'un site sont tous infectés, ce site le devient également.

Jusqu'alors le processus est entièrement déterministe. On introduit l'aléa seulement dans la condition initiale, en prenant $x \in A$ indépendamment pour chaque $x \in \mathbb{Z}^d$ avec probabilité $q \in [0, 1]$. On note la loi de A par μ_q . Habituellement en physique statistique, on peut à présent introduire la *probabilité critique*

$$q_c = \inf \{q \in [0, 1] : \mu_q([A]_{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}^d) > 0\}.$$

Puisque l'évènement ci-dessus est invariant par translation, l'ergodicité implique qu'en fait $\mu_q([A]_{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}^d) \in \{0, 1\}$ pour tout $q \in [0, 1]$. Tandis que pour $q \leq q_c$ on peut étudier la géométrie de $\mathbb{Z}^d \setminus [A]_{\mathcal{U}}$, dans le régime $q \geq q_c$ on peut souhaiter être plus quantitatif. À cette fin on introduit le *temps d'infection* (de percolation bootstrap)

$$\tau_0^{\text{BP}} = \min \{n \in \mathbb{N} : 0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^n(A)\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

qui est une variable aléatoire, en posant $\min \emptyset = \infty$ de manière usuelle.

2.2 KCM

Les KCM sont définis également par leurs dimension $d \geq 1$, famille de mise à jour $\mathcal{U}$ comme dans Section 2.1 et paramètre $q \in [0, 1]$. Le $\mathcal{U}$ -KCM est un processus de Markov à temps continu avec espace d'états $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, les zéros correspondant à des infections. On peut naturellement identifier toute configuration $\eta \in \Omega$ avec l'ensemble de ses infections (appelé A dans Section 2.1). La *contrainte en x* est donnée par

$$c_x(\eta) = \mathbb{1}_{\exists U \in \mathcal{U}, \forall u \in U, \eta_{x+u}=0},$$

en écrivant η_x pour l'état du site $x \in \mathbb{Z}^d$ dans la configuration $\eta \in \Omega$. On écrit η^x pour la configuration obtenue en retournant l'état du site x dans la configuration η , c'est-à-dire $(\eta^x)_y = \eta_y$ pour tout $y \in \mathbb{Z}^d \setminus \{x\}$ et $(\eta^x)_x = 1 - \eta_x$.

On note $\mu_q = \mu$ la mesure produit de Bernoulli, telle que $\mu(\eta_x = 0) = q$, η étant une configuration aléatoire de loi μ . On note $\mu_x(f)$ l'espérance conditionnelle $\mu(f(\eta) | \eta_{\mathbb{Z}^d \setminus \{x\}})$ sur l'état de $x \in \mathbb{Z}^d$ d'une fonction réelle $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On peut maintenant définir le

$\mathcal{U}$ -KCM par l'action de son générateur sur les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dépendant seulement des états d'un nombre fini de sites

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(f)(\eta) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c_x(\eta) \cdot (\mu_x(f) - f)(\eta) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c_x(\eta) \cdot (q\eta_x + (1-q)(1-\eta_x)) \cdot (f(\eta^x) - f(\eta)).\end{aligned}$$

Ce processus peut également être défini par une construction graphique plus intuitive comme suit (voir [32] pour plus de contexte). Chaque site est muni d'un processus de Poisson standard (*horloge*) indépendant, dont les atomes sont appelés *sonneries*. Lorsque l'horloge en x sonne, on se donne de plus une variable aléatoire indépendante de loi μ_x (c'est-à-dire Bernoulli de paramètre $1-q$). Si la contrainte c_x est satisfaite, la mise à jour est dite *légitime* et elle remplace l'état de x par celui de la variable. Dans le cas contraire (*mise à jour illégitime*) la configuration reste inchangée après la sonnerie. Puisque le nombre de sonneries est localement fini et les contraintes ont une portée finie, le processus est bien défini par cette construction [32]. Il est clair que, pour chacune des deux définitions, la mesure μ est réversible et invariante pour le KCM, comme $c_x(\eta)$ ne dépend pas de η_x . Pour cette raison on appelle μ la *mesure d'équilibre*. On peut également remarquer que la mesure de Dirac sur la configuration entièrement saine $\mathbf{1}$ est invariante aussi.

La quantité d'intérêt principale est le temps (aléatoire) d'infection de l'origine

$$\tau_0 = \min \{t \geq 0 : \eta_0(t) = 0\},$$

$\eta(t)$ étant l'état du KCM en temps $t \in [0, \infty)$. On s'intéressera à τ_0 pour le processus stationnaire avec condition initiale de loi μ . Il existe plusieurs définitions naturelles du paramètre critique q_c pour un KCM, mais il s'avère qu'il coïncide avec celui de la percolation bootstrap avec la même famille de mise à jour [9]. Pour en avoir une intuition, on peut vérifier que la clôture de l'ensemble d'infections est laissée invariante par la dynamique du KCM correspondant.

3 Universalité grossière

Lorsqu'on parle d'universalité pour les modèles de percolation bootstrap (resp. KCM) notre but ultime est de pouvoir classer les familles $\mathcal{U}$ de sorte que les éléments d'une même classe (d'universalité) aient des comportements macroscopiques identiques. Ici par comportement identique on entendra notamment avoir des τ_0^{BP} (resp. τ_0) de grandeur similaire lorsque $q \rightarrow q_c$. Bien entendu, une telle classification est satisfaisante seulement si elle permet, étant donnée une famille de mise à jour $\mathcal{U}$, de pouvoir déterminer à quelle classe elle appartient seulement à partir de sa géométrie et combinatoire. Sauf mention contraire, par la suite nous nous placerons exclusivement en deux dimensions.

Avant de définir les classes d'universalité grossière, nous avons besoin de quelques préparatifs. Soient $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire euclidiens respectivement. Soit $S^1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| = 1\}$ le cercle unité. On appelle ses éléments *directions*. Le demi-plan ouvert de normale extérieure $u \in S^1$ est

$$\mathbb{H}_u = \{x \in \mathbb{Z}^2 : \langle x, u \rangle < 0\}.$$

	Surcritique		Critique	Souscritique	
	Déraciné	Enraciné		Non trivial	Trivial
q_c	0	0	0	$\in (0, 1)$	1
τ_0^{BP}	$q^{-\Theta(1)}$	$q^{-\Theta(1)}$	$e^{q^{-\Theta(1)}}$	∞	∞
τ_0	$q^{-\Theta(1)}$	$e^{\Theta(\log^2(1/q))}$	$e^{q^{-\Theta(1)}}$	∞	∞

TABLE 1 – Résumé de Théorème 1 : paramètres critiques et temps caractéristiques des classes d’universalité grossière lorsque $q \rightarrow 0$.

Définition 1 (Direction stable). Fixons une famille de mise à jour $\mathcal{U}$. Une direction $u \in S^1$ est *instable* s’il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U \subset \mathbb{H}_u$ et *stable* sinon.

L’intérêt de cette définition vient du fait que $[\mathbb{H}_u]_{\mathcal{U}} = \mathbb{H}_u$ si u est stable et $[\mathbb{H}_u]_{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}^2$ si u est instable (i.e. u est stable ssi $\mathbb{H}_u$ l’est). Il n’est pas difficile de vérifier que l’ensemble des directions stables est une union finie d’intervalles fermés de S^1 . Les extrémités d’intervalles de directions stables sont appelées *isolées*, si l’intervalle est réduit à un point, et *semi-isolées* sinon. Toute direction stable qui n’est ni isolée, ni semi-isolée est dite *fortement stable*. Pour des exemples illustratifs voir Fig. 1.

On est à présent en mesure de définir les classes d’universalité grossière.

Définition 2 (Partition d’universalité grossière). Soit $\mathcal{C} = \{\{v \in S^1 : \langle u, v \rangle < 0\} : u \in S^1\}$ l’ensemble des demi-cercles ouverts de S^1 . Une famille $\mathcal{U}$ est :

- *surcritique* s’il existe un demi-cercle ouvert $C \in \mathcal{C}$ dont toutes les directions $u \in C$ sont instables. Si de plus
 - il existe deux directions stables non opposées, $\mathcal{U}$ est *enracinée* ;
 - il n’existe pas deux directions stables non opposées, $\mathcal{U}$ est *déracinée*.
- *critique* si tout demi-cercle ouvert contient une direction stable et il existe un demi-cercle contenant un nombre fini de directions stables.
- *souscritique* si tout demi-cercle contient une infinité de directions stables. De plus, la famille $\mathcal{U}$ est
 - *non triviale*, s’il existe une direction instable ;
 - *triviale*, si toutes les directions sont stables.

Il est possible de montrer [8] qu’une famille de mise à jour $\mathcal{U}$ est surcritique si et seulement si un grand disque infecté s’étend idéfiniment par la $\mathcal{U}$ -percolation bootstrap (dans la direction donnée par le milieu du demi-cercle C). La famille $\mathcal{U}$ est critique si un grand disque infecté peut s’étendre, à condition de rencontrer un nombre borné d’infections sur sa frontière à chaque étape. Les modèles triviaux sont ceux pour lesquels un grand disque sain n’est pas entièrement infecté par la percolation bootstrap. Enfin, pour les modèles enracinés un grand disque infectée ne peut pas engendrer d’infection à l’infini à la fois dans une direction et son opposée [33].

Avec ces définitions, l’universalité grossière est énoncée dans le résultat suivant et résumée dans Tableau 1.

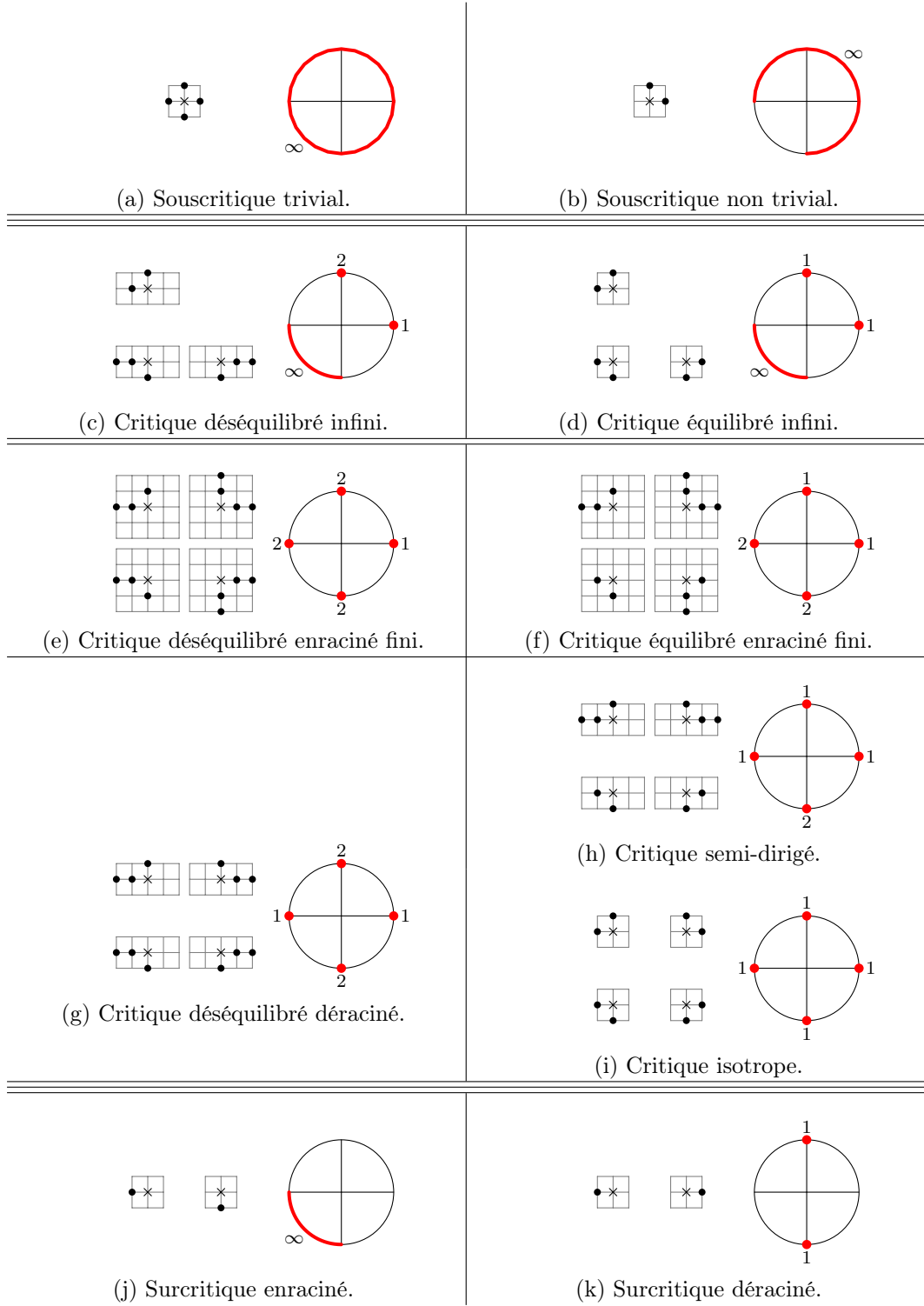


FIGURE 1 – Représentants des classes d'universalité. Les règles de mise à jour sont présentées à gauche avec 0 marqué par une croix et les sites de la règle marqués par des points. Les directions stables sont en gras sur la droite avec leurs difficultés indiquées. Les modèles critiques ont tous difficulté $\alpha = 1$.

Théorème 1 (Universalité grossière [5, 7, 33–35]). Soit $\mathcal{U}$ une famille de mise à jour bidimensionnelle. Si $\mathcal{U}$ est¹

- *surcritique déracinée*, alors $q_c = 0$, $\tau_0^{\text{BP}} = q^{-\Theta(1)}$ et $\tau_0 = q^{-\Theta(1)}$,
- *surcritique enracinée*, alors $q_c = 0$, $\tau_0^{\text{BP}} = q^{-\Theta(1)}$ et $\tau_0 = \exp(\Theta(\log^2(1/q)))$,
- *critique*, alors $q_c = 0$, $\tau_0^{\text{BP}} = \exp(q^{-\Theta(1)})$ et $\tau_0 = \exp(q^{-\Theta(1)})$,
- *souscritique non triviale*, alors $0 < q_c < 1$, $\tau_0^{\text{BP}} = \infty$ et $\tau_0 = \infty$ avec probabilité strictement positive pour q assez petit,
- *souscritique triviale*, alors $q_c = 1$, $\tau_0^{\text{BP}} = \infty$ et $\tau_0 = \infty$ avec probabilité strictement positive pour tout $q \in (0, 1)$,

où les asymptotiques sont vraies avec grande probabilité lorsque $q \rightarrow 0$.

Ce résultat fournit de premières informations sur les quantités d'intérêt. Informations qui méritent d'être affinées notamment dans le cas critique. Ce sera l'objet de la prochaine section.

4 Universalité raffinée des modèles critiques

Pour aller plus loin que Théorème 1 pour les modèles critiques, on a besoin d'affiner notre partition et la notion de direction stable (voir Fig. 1 pour des exemples).

Définition 3 (Difficulté). Étant donnée une famille de mise à jour $\mathcal{U}$, la *difficulté* $\alpha(u)$ de $u \in S^1$ est

- 0 si u est instable ;
- ∞ si u est stable, mais pas isolé ;
- $\min\{n \in \mathbb{N} : \exists Z \subset \mathbb{Z}^2, |Z| = n, |[\mathbb{H}_u \cup Z]_{\mathcal{U}} \setminus \mathbb{H}_u| = \infty\}$ sinon.

La *difficulté* de $\mathcal{U}$ est

$$\alpha = \min_{C \in \mathcal{C}} \max_{u \in C} \alpha(u).$$

On dit qu'une direction $u \in S^1$ est *difficile* si $\alpha(u) > \alpha$.

Les difficultés affinent non seulement la notion de direction stable, mais aussi celle des classes d'universalité grossière. Plus précisément, il n'est pas difficile [7] de vérifier qu'un modèle est surcritique ssi sa difficulté α est 0 ; critique ssi α est un entier strictement positif ; souscritique ssi $\alpha = \infty$. La difficulté d'une direction stable isolée u quantifie combien d'infections supplémentaires sont nécessaires pour faire croître le demi-plan $\mathbb{H}_u$ entièrement infecté. À titre illustratif, pour l'exemple de Fig. 1g, la clôture du demi-plan ouvert de gauche plus l'origine est le demi-plan fermé ; le demi-plan inférieur plus l'origine est stable, tandis que sa clôture avec $\{(0, 0), (1, 0)\}$ ajouté est le demi-plan fermé.

Notons de plus que la tâche de déterminer l'ensemble des directions stables ou la classe d'universalité grossière d'une famille de mise à jour est facile, tandis que calculer les difficultés des directions stables ou la difficulté globale d'une famille critique est moins

1. Ici et dans la suite, pour une fonction réelle positive f , nous utilisons la notation asymptotique $\Theta(f)$ pour désigner une fonction g telle qu'il existe $c > 0$ tel que $cf(q) \leq g(q) \leq f(q)/c$ pour tout $q > 0$ assez petit.

immédiat. Plus précisément, il est possible de calculer α en temps fini, étant donné $\mathcal{U}$, mais il est NP-difficile de le faire [27]. Malgré la complexité de déterminer les difficultés, on les considérera données par la suite.

Avec Définition 3 à notre disposition, on peut définir toutes les notions qui apparaîtront dans la partition d'universalité raffinée.

Définition 4 (Types raffinés). Une famille de mise à jour bidimensionnelle est

- *enracinée* s'il existe deux directions difficiles non opposées ;
- *déracinée* si elle n'est pas enracinée ;
- *déséquilibrée* s'il existe deux directions difficiles opposées ;
- *équilibrée* si elle n'est pas déséquilibrée, soit, il existe un demi-cercle *fermé* ne contenant aucune direction difficile.

On partitionne les familles équilibrées déracinées davantage en

- *semi-dirigées* s'il y a exactement une direction difficile ;
- *isotropes* s'il n'y a aucune direction difficile.

On sera amené à considérer de plus la distinction entre modèles à nombre fini ou infini de directions stables (soit, sans ou avec une direction fortement stable). Les derniers sont nécessairement enracinés, mais peuvent être équilibrés ou non. Ainsi on se retrouve avec une partition de toutes les familles de mise à jour critiques en deux dimensions en sept classes représentées sur Fig. 1 dont nous discuterons par la suite.

L'universalité raffinée en percolation bootstrap ne prend en compte que le caractère équilibré ou déséquilibré de la famille de mise à jour.

Théorème 2 (Universalité raffinée en percolation bootstrap [7]). *Soit $\mathcal{U}$ une famille de mise à jour bidimensionnelle critique de difficulté α . Si $\mathcal{U}$ est*

- *déséquilibrée, alors*

$$\tau_0^{\text{BP}} = \exp \left(\frac{\Theta((\log(1/q))^2)}{q^\alpha} \right) ;$$

- *équilibrée, alors*

$$\tau_0^{\text{BP}} = \exp \left(\frac{\Theta(1)}{q^\alpha} \right) ,$$

où les asymptotiques sont vraies avec grande probabilité lorsque $q \rightarrow 0$.

Le comportement des KCM à ce niveau de précision se relève beaucoup plus riche et intriqué. En effet, le résultat suivant, résumé dans Tableau 2, exclut des conjectures de [35, 37].

Théorème 3 (Universalité raffinée des KCM [20, 21] (voir aussi [15, 22–24, 26, 35, 36])). *Soit $\mathcal{U}$ une famille de mise à jour critique en deux dimensions de difficulté α . Si $\mathcal{U}$ est*

- (a) *déséquilibrée avec nombre infini de directions stables (donc enracinée), alors*

$$\tau_0 = \exp \left(\frac{\Theta((\log(1/q))^4)}{q^{2\alpha}} \right) ;$$

(b) équilibrée avec nombre infini de directions stables (donc enracinée), alors

$$\tau_0 = \exp \left(\frac{\Theta(1)}{q^{2\alpha}} \right);$$

(c) déséquilibrée enracinée avec nombre fini de directions stables, alors

$$\tau_0 = \exp \left(\frac{\Theta((\log(1/q))^3)}{q^\alpha} \right);$$

(d) déséquilibrée déracinée (donc avec nombre fini de directions stables), alors

$$\tau_0 = \exp \left(\frac{\Theta((\log(1/q))^2)}{q^\alpha} \right);$$

(e) équilibrée enracinée avec nombre fini de directions stables, alors

$$\tau_0 = \exp \left(\frac{\Theta(\log(1/q))}{q^\alpha} \right);$$

(f) semi-dirigée (donc équilibrée déracinée avec nombre fini de directions stables), alors

$$\tau_0 = \exp \left(\frac{\Theta(\log \log(1/q))}{q^\alpha} \right);$$

(g) isotrope (donc équilibrée déracinée avec nombre fini de directions stables), alors

$$\tau_0 = \exp \left(\frac{\Theta(1)}{q^\alpha} \right),$$

où les asymptotiques sont vraies avec grande probabilité lorsque $q \rightarrow 0$.

	Directions stables infinies	Directions stables finies	
		Enraciné	Déraciné
Déséquilibré	(a) 2, 4, 0	(c) 1, 3, 0	(d) 1, 2, 0
Équilibré	(b) 2, 0, 0	(e) 1, 1, 0	(f) 1, 0, 1
			S.-dir. Iso. (g) 1, 0, 0

TABLE 2 – Classification des KCM critiques avec difficulté α du Théorème 3. Pour chaque classe $\tau_0 = \exp \left(\Theta(1) \left(\frac{1}{q^\alpha} \right)^\beta \left(\log \frac{1}{q} \right)^\gamma \left(\log \log \frac{1}{q} \right)^\delta \right)$ lorsque $q \rightarrow 0$. L'étiquette de la classe et les exposants β, γ, δ figurent dans cet ordre. Pour comparaison, $\tau_0^{\text{BP}} = \exp \left(\frac{\Theta(1)}{q^\alpha} \left(\log \frac{1}{q} \right)^{\gamma'} \right)$ avec $\gamma' = 2$ pour $\mathcal{U}$ déséquilibré et $\gamma' = 0$ pour $\mathcal{U}$ équilibré par Théorème 2.

Notons qu'en percolation bootstrap pour certaines familles de mise à jour critiques des résultats plus précis que le Théorème 2 sont à disposition [6, 11, 12, 19, 28]. A contrario, Théorème 3 est l'état de l'art pour tout KCM critique à l'exception de celui à deux voisins (voir [26], ou [25] pour un aperçu). L'unique famille pour laquelle ce résultat était connu au préalable est celle de Duarte [34].

Nous n'entrons pas dans l'heuristique sous-jacente du Théorème 3, mais renvoyons le lecteur intéressé à [20, Section 2] et [21, Section 2] pour une description détaillée des mécanismes et outils de nature analytique, combinatoire et probabiliste mis en jeu dans sa démonstration.

5 Directions futures

Terminons par quelques mots sur certaines des directions de recherche les plus naturelles en vue des résultats d'universalité présentés ci-dessus.

En ce qui concerne les modèles surcritiques, en vue de résultats d'indécidabilité [3], on peut principalement espérer des résultats plus précis en une dimension pour les KCM. Il serait nettement plus intéressant d'avoir des résultats hors équilibre (tant pour les modèles surcritiques que les autres), c'est-à-dire partant d'une condition initiale non pas distribuée selon la mesure d'équilibre μ . Les résultats généraux dans cette direction [30] sont encore limités au régime de haute température (q proche de 1), qui est physiquement peu significatif.

Une autre extension naturelle concerne les dimensions supérieures. L'analogue du Théorème 1 en dimension arbitraire pour la percolation bootstrap a été établi récemment [1, 2, 4] et l'on s'attend à ce que son analogue pour les KCM, tenant compte des modèles surcritiques enracinés, soit toujours valide. En vue de l'indécidabilité susvisée, on ne peut espérer un analogue du Théorème 2 (ou Théorème 3) en dimension arbitraire que possiblement pour les familles de résistance maximale (voir [4] pour la définition).

Enfin, les modèles souscritiques posent toujours de nombreux problèmes. Parmi les plus importants on pourrait citer l'existence d'un moment exponentiel de τ_0^{BP} pour $q > q_c$ (voir [16, 18]), ainsi que le manque de compréhension pour le fait que la transition de phase peut être continue ou discontinue, selon la famille de mise à jour, même en deux dimensions (voir [29, 38]).

Remerciements

Ce travail a été financé par le Fond de Recherche Autrichien (FWF) : P35428-N. Nous tenons à remercier tout particulièrement Laure Marêché, Fabio Martinelli, Réka Szabó et Cristina Toninelli pour de nombreuses discussions sur ces sujets au fil des années et David Coupier pour des remarques sur la présentation. Le présent texte est adapté d'après Sections 1, 3 et 4 du résumé de la thèse de doctorat de l'auteur [17].

Références

- [1] P. Balister, B. Bollobás, R. Morris, and P. Smith, *Universality for monotone cellular automata*, arXiv e-prints (2022), available at arXiv:2203.13806.

- [2] P. Balister, B. Bollobás, R. Morris, and P. Smith, *Subcritical monotone cellular automata*, Random Structures Algorithms **64** (2024), no. 1, 38–61 pp. MR4672996
- [3] P. Balister, B. Bollobás, R. Morris, and P. Smith, *Uncomputability of the percolation threshold for monotone cellular automata* (In preparation).
- [4] P. Balister, B. Bollobás, R. Morris, and P. Smith, *The critical length for growing a droplet*, Mem. Amer. Math. Soc. (To appear).
- [5] P. Balister, B. Bollobás, M. Przykucki, and P. Smith, *Subcritical $\mathcal{U}$ -bootstrap percolation models have non-trivial phase transitions*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 10, 7385–7411 pp. MR3471095
- [6] B. Bollobás, H. Duminil-Copin, R. Morris, and P. Smith, *The sharp threshold for the Duarte model*, Ann. Probab. **45** (2017), no. 6B, 4222–4272 pp. MR3737910
- [7] B. Bollobás, H. Duminil-Copin, R. Morris, and P. Smith, *Universality for two-dimensional critical cellular automata*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **126** (2023), no. 2, 620–703 pp. MR4550150
- [8] B. Bollobás, P. Smith, and A. Uzzell, *Monotone cellular automata in a random environment*, Combin. Probab. Comput. **24** (2015), no. 4, 687–722 pp. MR3350030
- [9] N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli, *Kinetically constrained spin models*, Probab. Theory Related Fields **140** (2008), no. 3-4, 459–504 pp. MR2365481
- [10] J. Chalupa, P. L. Leath, and G. R. Reich, *Bootstrap percolation on a Bethe lattice*, J. Phys. C **12** (1979), no. 1, L31–L35 pp.
- [11] H. Duminil-Copin and I. Hartarsky, *Sharp metastability transition for two-dimensional bootstrap percolation with symmetric isotropic threshold rules*, arXiv e-prints (2023), available at arXiv:2303.13920.
- [12] H. Duminil-Copin and A. C. D. van Enter, *Sharp metastability threshold for an anisotropic bootstrap percolation model*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 3A, 1218–1242 pp. MR3098677
- [13] G. H. Fredrickson and H. C. Andersen, *Kinetic Ising model of the glass transition*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), no. 13, 1244–1247 pp.
- [14] G. H. Fredrickson and H. C. Andersen, *Facilitated kinetic Ising models and the glass transition*, J. Chem. Phys. **83** (1985), no. 11, 5822–5831 pp.
- [15] I. Hartarsky, *Bisection for kinetically constrained models revisited*, Electron. Commun. Probab. **26** (2021), Paper No. 60, 10 pp. MR4346864
- [16] I. Hartarsky, *$\mathcal{U}$ -bootstrap percolation : critical probability, exponential decay and applications*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **57** (2021), no. 3, 1255–1280 pp. MR4291442
- [17] I. Hartarsky, *Bootstrap percolation and kinetically constrained models : two-dimensional universality and beyond*, Ph.D. Thesis, Université Paris Dauphine, PSL University, 2022. Available at <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03527333>.
- [18] I. Hartarsky, *Bootstrap percolation, probabilistic cellular automata and sharpness*, J. Stat. Phys. **187** (2022), no. 3, Article No. 21, 17 pp. MR4408459
- [19] I. Hartarsky, *Sensitive bootstrap percolation second term*, Electron. Commun. Probab. **28** (2023), Paper No. 29, 7 pp. MR4627411
- [20] I. Hartarsky, *Refined universality for critical KCM : upper bounds*, Comm. Math. Phys. (To appear).
- [21] I. Hartarsky and L. Marêché, *Refined universality for critical KCM : lower bounds*, Combin. Probab. Comput. **31** (2022), no. 5, 879–906 pp. MR4472293
- [22] I. Hartarsky, L. Marêché, and C. Toninelli, *Universality for critical KCM : infinite number of stable directions*, Probab. Theory Related Fields **178** (2020), no. 1, 289–326 pp. MR4146539
- [23] I. Hartarsky, F. Martinelli, and C. Toninelli, *Universality for critical KCM : finite number of stable directions*, Ann. Probab. **49** (2021), no. 5, 2141–2174 pp. MR4317702
- [24] I. Hartarsky, F. Martinelli, and C. Toninelli, *Coalescing and branching simple symmetric exclusion process*, Ann. Appl. Probab. **32** (2022), no. 4, 2841–2859 pp. MR4474521
- [25] I. Hartarsky, F. Martinelli, and C. Toninelli, *Fredrickson-Andersen model in two dimensions*, ESAIM Proc. Surveys **74** (2023), 108–118 pp.

- [26] I. Hartarsky, F. Martinelli, and C. Toninelli, *Sharp threshold for the FA-2f kinetically constrained model*, Probab. Theory Related Fields **185** (2023), no. 3, 993–1037 pp. MR4556287
- [27] I. Hartarsky and T. R. Mezei, *Complexity of two-dimensional bootstrap percolation difficulty : algorithm and NP-hardness*, SIAM J. Discrete Math. **34** (2020), no. 2, 1444–1459 pp. MR4117299
- [28] I. Hartarsky and R. Morris, *The second term for two-neighbour bootstrap percolation in two dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), no. 9, 6465–6505 pp. MR4024528
- [29] I. Hartarsky and R. Szabó, *Generalised oriented site percolation*, Markov Process. Related Fields **28** (2022), no. 2, 275–302 pp. MR4560695
- [30] I. Hartarsky and F. Toninelli, *Kinetically constrained models out of equilibrium*, arXiv e-prints (2022), available at arXiv:2212.08437.
- [31] P. M. Kogut and P. L. Leath, *Bootstrap percolation transitions on real lattices*, J. Phys. C **14** (1981), no. 22, 3187–3194 pp.
- [32] T. M. Liggett, *Interacting particle systems*, Classics in mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005. Originally published by Springer, New York (1985). MR2108619
- [33] L. Marêché, *Combinatorics for general kinetically constrained spin models*, SIAM J. Discrete Math. **34** (2020), no. 1, 370–384 pp. MR4062795
- [34] L. Marêché, F. Martinelli, and C. Toninelli, *Exact asymptotics for Duarte and supercritical rooted kinetically constrained models*, Ann. Probab. **48** (2020), no. 1, 317–342 pp. MR4079438
- [35] F. Martinelli, R. Morris, and C. Toninelli, *Universality results for kinetically constrained spin models in two dimensions*, Comm. Math. Phys. **369** (2019), no. 2, 761–809 pp. MR3962008
- [36] F. Martinelli and C. Toninelli, *Towards a universality picture for the relaxation to equilibrium of kinetically constrained models*, Ann. Probab. **47** (2019), no. 1, 324–361 pp. MR3909971
- [37] R. Morris, *Bootstrap percolation, and other automata*, European J. Combin. **66** (2017), 250–263 pp. MR3692148
- [38] C. Toninelli and G. Biroli, *A new class of cellular automata with a discontinuous glass transition*, J. Stat. Phys. **130** (2008), no. 1, 83–112 pp. MR2375957