Introduction au domaine de recherche:

Percolation Bootstrap et Modèles Cinétiquement Contraints

Ivailo Hartarsky

Dans ce document nous survolons une partie des résultats les plus centraux de percolation bootstrap et modèles cinétiquement contraints (KCM). Bien entendu, le contenu sera fortement influencé par les préférences de l'auteur et ne visera aucunement l'exhaustivité. Pour plus de références périphériques le lecteur pourrait consulter, par exemple, l'article recent de synthèse de Morris [64], qui partage un point de vue relativement similaire à celui de l'auteur.

1 Percolation Bootstrap

1.1 Un premier modèle concret

1.1.1 Le modèle à r voisins

La percolation bootstrap est une classe d'automates cellulaires, dont le premier représentant a été introduit en 1979 par Chalupa, Leath et Reich [29] en physique statistique. Étant donné un graphe G ($\mathbb{Z}^d$ dans le cas le plus courant) et un ensemble $A \subset V(G)$ de sites dits initialement *infectés*, on étudie la propagation de l'infection selon la dynamique suivante à temps discret. À chaque étape les sites dont au moins $r \in \mathbb{N}$ des voisins sont déjà infectés deviennent infectés, alors que les sites infectés ne guérissent jamais. Nous notons la clôture pour ce processus par $[A]$ et disons qu'il y a percolation si $[A] = V(G)$.

Ces modèles peuvent modéliser de nombreux phénomènes physiques (cf. [1, 2] par exemple) parmi lesquelles la nucléation métastable, la dynamique à température nulle d'Ising, les modèles cinétiquement contraints de la transition liquide-verre et beaucoup d'autres. Dans ces applications et la plupart des études mathématiques l'ensemble initial A est pris aléatoirement selon la mesure produit de Bernoulli $\mathbb{P}_p$ de sorte qu'un site est infecté avec probabilité p. On s'intéresse alors à la transition

$$p_c(d, r) = \inf\{p,\ \mathbb{P}_p([A] = \mathbb{Z}^d) = 1\}\,.$$

1.1.2 Premiers résultats

Les premiers résultats sur ces modèles sont dus à van Enter [75] et Schonmann [70], qui ont montré que la transition est triviale pour tous d et r.[1] Néanmoins, Aizenman et Lebowitz [4] ont montré en 1988 que la dynamique dans une boîte finie $[n]^d$ admet une probabilité critique

$$p_c([n]^d) = \inf\left\{p, \mathbb{P}_p([A] = [n]^d) \geqslant 1/2\right\}$$

qui échelle comme $\Theta\left((\log n)^{1-d}\right)$ pour $r = 2$.

Esquisons leur argument assez simple dans le cas $d = 2, r = 2$ (les dimensions supérieures ne sont pas plus difficiles). Notons que les ensembles stables d'infections sont des réunions de rectangles (parallèles aux axes) bien séparés. Le résultat d'Aizenman et Lebowitz est fondé sur une étude de ces rectangles et l'observation fondamentale suivante.

Lemme 1 (Aizenman-Lebowitz [4])**.** *Soit R un rectangle. Si $[A \cap R] = R$, alors pour tout $0 < k \leqslant \operatorname{long}(R)$ il existe un rectangle $S \subset R$ avec $k \leqslant \operatorname{long}(S) \leqslant 2k$ et $[A \cap S] = S$.*

En particulier, on peut trouver ce qu'on appelle une gouttelette critique – un rectangle R avec $[R \cap A] = R$ (que l'on appelle *intérieurement rempli*) d'une taille particulière – $\operatorname{long}(R) = \Theta(1/p)$. Mais un rectangle intérieurement rempli ne peut pas contenir deux lignes ou colonnes consécutives sans infection, ce qui montre que

$$\mathbb{P}_p([A \cap R] = R) \leqslant \left(1 - (1-p)^{2\operatorname{long}(R)}\right)^{\operatorname{long}(R)/2} = \exp\left(-\Theta\left(1/p\right)\right)$$

et donc $n^2 \exp\left(-\Theta(1/p_c)\right) \geqslant 1/2$, d'où $p_c([n]^2) = \Omega\left(1/\log n\right)$).

La borne supérieure vient par construction. La probabilité qu'un rectangle (indépendamment de sa taille) soit intérieurement rempli est au moins la probabilité qu'il y ait une infection au coin, qui trouve successivement des infections dans les prochaines ligne et colonne de sorte à continuer à croître. Autrement dit, cette probabilité est au moins

$$p\prod_{k=1}^{\infty}(1-(1-p)^k)^2 \approx \exp\left(2\int_0^\infty \log(1-e^{-px})\,\mathrm{d}x\right) = \exp(-\Theta(1/p))\,.$$

Par conséquent, dans un rectangle de taille $e^{\Theta(1/p)}$ il y a avec grande probabilité un rectangle intérieurement rempli de taille p^{-3}. De plus, avec grande probabilité chaque ligne et colonne de longueur p^{-3} contient une infection, car

$$(1-(1-p)^{p^{-3}})^{\exp(\Theta(1/p))} = 1 - o(1)\,.$$

Donc au total avec grande probabilité le rectangle $[\exp(\Theta(1/p))]^2$ est intérieurement rempli (comme c'est le cas si ces deux évènements arrivent). De là $p_c([n]^2) = O(1/\log n)$, ce qui conclue la preuve.

[1] Le lecteur est invité de se convaincre de cela pour $d = 2$ et $r \in \{2, 3\}$.

1.1.3 Résultats avancés pour $r = 2$

Le travail fondateur d'Aizenman et Lebowitz a été depuis fortement affiné. En 2003 Balogh et Bollobás [8] ont remarqué que la transition de phase est raide (entre $p = (1 \pm \varepsilon)p_c$ la probabilité de percolation passe de δ à $1-\delta$), ce qui découle d'un résultat général de Friedgut et Kalai [41]. Leur approche a été développée plus récemment par Bartha et Pete [17], qui ont établi que l'évènement de percolation bootstrap est sensible au bruit[2]. En même temps que le travail de Balogh et Bollobás [8], une grande avancée a été apportée par Holroyd [55], qui a déterminé l'asymptotique de $p_c([n]^2, r = 2)$ et, en particulier, il a aussi démontré que la transition est raide. Notamment, son résultat s'énonce

$$p_c([n]^2, r = 2) = \frac{\pi^2 + o(1)}{18 \log n}.$$

Le papier de Holroyd introduit quelques unes des idées importantes et récurrentes en percolation bootstrap. La borne supérieure est facile et repose sur une construction explicite assez semblable à celle d'Aizenman et Lebowitz dont on évalue la probabilité. C'est la borne inférieure qui demande plus d'effort. Pour l'obtenir Holroyd découpe l'évènement $[A \cap R] = R$ selon le mécanisme de croissance, qu'il appelle hiérarchie. Une hiérarchie est un arbre binaire, qui indique comment les rectangles fusionnent pour former un rectangle plus grand. On autorise aussi des nœuds unaires pour éviter de voir des fusions avec des rectangles trop petits, ce qui ferait exploser la quantité d'hiérarchies. Finalement on somme sur toutes les hiérarchies leur probabilité de réalisation. Pour calculer celle-ci, on observe que si un rectangle est intérieurement rempli, alors il existe deux rectangles *disjointement* intérieurement remplis plus petits, qui l'engendrent. Cela nous permet d'utiliser l'inégalité de van den Berg et Kesten [74]. Après certaines manipulations analytiques cela donne le résultat souhaité.

La méthode d'Holroyd a été aussi améliorée par la suite, notamment par Gravner et Holroyd [46] en 2008, qui ont montré la borne supérieure, et par l'auteur et Morris [54] en 2018 pour la borne inférieure. Ensemble ces résultats donnent l'ordre du deuxième terme de p_c:

$$p_c([n]^2, r = 2) = \frac{\pi^2}{18 \log n} + \frac{\Theta(1)}{(\log n)^{3/2}}. \tag{1}$$

La borne inférieure demande une compréhension très fine du mécanisme de croissance d'un rectangle dès la taille $1/\sqrt{p}$ et donne de contraintes assez fortes sur le type d'hiérarchies, qui prédominent.

[2] C'est-à-dire reéchantilloner une proportion ε des sites conduit à une perte totale de l'information. Cette notion a été introduite par Benjamini, Kalai et Schramm [20].

1.1.4 Le cas $r > 2$

Les résultats ci-dessus donnent des renseignements très détaillés sur le modèle à 2 voisins, mais le cas $r > 2$ est bien plus difficile à traiter. Cela découle du fait que les ensembles stables d'infections ne sont plus de simples boîtes, mais peuvent avoir une géométrie assez riche, ce qui empêche l'analyse du modèle. Néanmoins, au niveau moral le mécanisme d'infection est récursif et assez simple, ce qui fait notamment que les bornes supérieures posent peu de problèmes. Si l'on dispose d'une boîte entièrement infectée, alors sur chacune de ses faces ce qu'on observe est moralement le processus avec r diminué de 1. Ainsi la taille d'une gouttelette critique est telle que ses faces ont la taille critique pour r et d diminués de 1. Cette intuition a été assez difficile à mettre en place rigoureusement et le résultat correspondant à Aizenman-Lebowitz [4] n'a été établi qu'en 1999 (pour $r = d = 3$) et 2002 (en toute généralité) par Cerf et Cirillo [27] et Cerf et Manzo [28] :

$$p_c([n]^d, r) = \frac{\Theta(1)}{\left(\log_{(r-1)} n\right)^{d-r+1}}\,, \tag{2}$$

où $\log_{(r)}$ est la r-ème itération du logarithme. L'asymptotique de la transition a dû attendre 2009 (pour $r = d = 3$) et 2012 (en toute généralité) pour être déterminée par Balogh, Bollobás et Morris [11] et Balogh, Bollobás, Duminil-Copin et Morris [10] avec une constante explicite à la place de $\Theta(1)$ dans (2) donnée par

$$\lambda(d, r) = \int_0^\infty g_{r-1}(z^{d-r+1})\,\mathrm{d}z\,,$$

où

$$g_k(z) = -\log(\beta_k(1 - e^{-z}))$$

et $\beta_k(u)$ est une racine de $x^2 = (1-(1-u)^k)x + u(1-u)^k$. Ce résultat demande un effort technique considérable, même si les idées fondamentales sont celles de [27,28,55]. La borne supérieure pour le deuxième terme correspondante à Gravner et Holroyd [46] a été établie en 2012 par Uzzell [73], mais la borne inférieure reste largement ouverte et même s'il s'agissait d'une simple concaténation des arguments de [54] et [10], cela demanderait un effort technique immense.

1.2 Un modèle anisotrope

1.2.1 Modèle et premiers résultats.

Considérons maintenant un deuxième modèle avant de gagner en généralité. Nous nous plaçons sur $\mathbb{Z}^2$ avec un ensemble d'infections initiales A de loi $\mathbb{P}_p$, mais changeons de règle d'infection. Un site $x \in \mathbb{Z}^2$ devient infecté si au moins 3 parmi les

6 sites $x+\{(\pm 2,0),(\pm 1,0),(0,\pm 1)\}$ sont déjà infectés. Ce modèle a été introduit par Gravner et Griffeath [43]. Ici l'échelle de p_c a pris nettement plus longtemps avant d'être trouvée par van Enter et Hulshof en 2007 [76]. Leur résultat est à la précision de celui d'Aizenman et Lebowitz [4] et s'énonce

$$p_c([n]^2)=\frac{\Theta\left((\log\log n)^2\right)}{\log n}. \tag{3}$$

Avant d'expliquer d'où vient le facteur correcteur, mentionnons qu'un tel résultat était obtenu pour un modèle plus simple (dirigé plutôt qu'anisotrope) par Mountford en 1995 [66], mais Gravner et Griffeeath [43] ont donnée une fausse preuve de (3) sans le carré au le numérateur.

D'abord, on voit comme dans [4] qu'une gouttelette de hauteur $C\log(1/p)/p$ pour C assez grand croît avec grande probabilité horizontalement jusqu'à arriver à largeur p^{-3} (il suffit d'avoir une infection par colonne). Après le rectangle ainsi obtenu croît aussi facilement verticalement aussi. Ainsi il suffit d'avoir un rectangle initial infecté de taille $2\times C\log(1/p)/p$, ce qui justifie la borne supérieure sur la probabilité critique.

La borne inférieure se base sur un lemme similaire à Lemme 1. Plus exactement, on montre que pour qu'un rectangle soit intérieurement rempli il faut qu'il y en ait un de toute taille, qui satisfait que toute ligne est à distance au plus 2 d'une infection et toute colonne est à distance au plus 4 d'un couple de sites infectés à distance mutuelle au plus 4. Si l'on applique ceci à un rectangle de taille convenable (d'ordre $p^{-3/2}$, par exemple), on obtient la borne souhaitée comme dans [4].

1.2.2 Résultats plus précis et paradoxe de la percolation bootstrap.

Par la suite il y a eu des améliorations de ce résultat. La constante à la place de Θ dans (3) a été trouvée par Duminil-Copin et van Enter [36] et récemment avec Hulshof [37] ils ont déterminé exactement les trois premiers termes de p_c. Ces termes se trouvent être très proches:

$$p_c([n]^2)=\frac{\log\log n}{12\log n}\left(\log\log n-4\log\log\log n+\left(2\log\frac{9e}{2}+o(1)\right)\right).$$

Une conséquence de cela concerne le «paradoxe de la percolation bootstrap». Ce terme désigne la tendance des simulations à donner de fausses prédictions suite à la convergence lente, malgré ce que la transition soit très raide. En effet, la fenêtre critique est de taille au plus $(\log n)^{-2}$ à un facteur polyloglog près, mais le deuxième et troisième termes de p_c sont beaucoup plus proches du premier et restent grands même pour des valeurs de n astronomiques. Ce phénomène a surgi en premier pour le modèle à 2 voisins, où à la place de $\pi^2/18$ dans (1) une valeur de 0.245 ± 0.015 a été estimée [3].

De fait, malgré les apparences, au niveau technique les auteurs de [37] ne déterminent que les deux premiers termes de la probabilité qu'un rectangle soit intérieurement rempli. La borne difficile demande de combiner les techniques de [36, 47] avec de nouvelles idées, mais expliquons au moins quel est le mécanisme dominant de croissance, qui donne aussi la borne supérieure facile. Ce mécanisme part d'une double colonne d'infection, qui croît, en restant un rectangle de taille $e^{3lp}/3p \times l$ pour l, qui croît de $2\log\log(1/p)/p$ à $\log(1/p)/(3p)$. Ensuite il est déjà assez probable que le rectangle croisse à l'infini.

1.3 Modèle général et pré-universalité

1.3.1 Pré-universalité.

Les avancées que nous venons de discuter restent très dépendantes du modèle et une théorie unifiée manquait jusqu'à très récemment, alors que quelques autres modèles avec des comportements assez différents étaient considérés [37, 43, 66, 70, 76]. Un premier essai de classification générale a été fait par Gravner et Griffeath [43, 44] dans les années 90. Elle a été largement étendue et rectifiée par les preuves rigoureuses de pré-universalité de Bollobás, Smith et Uzzell [24] en 2015 et Balister, Bollobás, Przykucki et Smith [6] en 2016. Pour l'instant la classification est complète en dimension 2, mais Balister, Bollobás, Morris et Smith ont annoncé à plusieurs reprises que son analogue en dimension supérieure est en cours de rédaction. Pour ces raisons-là nous nous concentrerons sur $\mathbb{Z}^2$ (resp. $[n]^2$).

Un modèle de percolation bootstrap est paramétré par une *famille de mises à jour* – une famille finie $\mathcal{U}$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ dits *règles*. L'ensemble d'infections initiales $A = A_0$ est pris aléatoirement selon $\mathbb{P}_p$ comme au dessus et on définit l'évolution de la dynamique par

$$A_{t+1} = A_t \cup \{x \in \mathbb{Z}^2,\ \exists U \in \mathcal{U},\ x + U \subset A_t\},$$

de sorte qu'un site devient infecté si une des règles translatée par lui est entièrement infectée. Ainsi on obtient tous les automates cellulaires déterministes monotones transitifs avec cette condition initiale aléatoire. Le résultat de [6, 24] est une partition de ces modèles en trois classes de pré-universalité. Pour les définir nous avons besoin de la notion de direction stable – une direction $u \in S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$ est *instable* s'il existe $U \in \mathcal{U}$ entièrement contenue dans le demi-plan $\mathbb{H}_u = \{x \in \mathbb{Z}^2, x \cdot u < 0\}$ et *stable* sinon. Ainsi la partition est comme suit.

- $\mathcal{U}$ est *surcritique* s'il existe un demi-cercle ouvert de directions instables. Dans ce cas $p_c((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2) = n^{-\Theta(1)}$.

- $\mathcal{U}$ est *critique* s'il existe un demi-cercle avec un nombre fini de directions stables, mais n'est pas surcritique. Dans ce cas $p_c((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2) = (\log n)^{-\Theta(1)}$.
- $\mathcal{U}$ est *souscritique* sinon. Dans ce cas $p_c(\mathbb{Z}^2) > 0$.

Notons déjà pour le lecteur méfiant que les directions instables d'un modèle sont très faciles à déterminer et qu'elles forment une réunion finie d'intervalles ouverts du cercle de sorte qu'aucune question d'ordre topologique ne se pose. Par contre, le besoin de considérer les tores plutôt que les boîtes finies $[n]^2$ vient de problèmes de bord triviaux – il se peut, par exemple qu'un des coins n'ait aucune règle, qui reste dans la boîte, donc il s'infecte si et seulement s'il est initialement infecté.

1.3.2 Modèles surcritiques

L'exemple le plus simple, mais représentatif des modèles surcritiques est le modèle à 1 voisin. Là il est clair qu'une seule infection infecte tout le plan (puisqu'il est connexe), d'où

$$p_c([n]^2, \mathcal{U} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}) = 1 - 2^{-n^{-2}} \sim \log 2/n^2\,,$$

bien sûr en accord avec [24].

Plus généralement, les modèles surcritiques sont ceux, qui admettent un ensemble fini d'infections qui infecte un nombre infini de sites par lui-même [24, Theorem 7.1] et donc leur étude se réduit surtout à l'étude de ces ensembles finis. De plus, la démonstration des résultats de pré-universalité pour ceux-ci est une version simplifiée de celle pour les modèles critiques, donc on ne la discutera pas séparément.

1.3.3 Modèles critiques

Origine. On a en fait déjà regardé en détail deux exemples typiques de modèles critiques – celui à 2 voisins et le modèle anisotrope. Dans les deux cas les directions stables sont $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, ce qui les rend critiques. Discutons déjà les idées de Bollobás, Smith et Uzzell [24] pour établir la pré-universalité.

La spécificité cruciale des modèles critiques est que si l'on a une gouttelette assez grande, dont les côtés sont dirigés convenablement, entièrement infectée, alors pour qu'elle puisse croître il lui faut un nombre borné d'infections sur chaque côté. Ainsi il devient facile de croître dès que la gouttelette a une taille $(\log(1/p))^{\Theta(1)}$. Par gouttelette on entend un polygone convexe.

Un problème notable est que si l'on a un bon bloc de quelques sites infectés sur un des côtés dirigé par une direction stable (pour les directions instables on n'a pas besoin d'infection supplémentaire pour avancer), la nouvelle ligne, qui sera générée ne croît pas nécessairement jusqu'à la toute fin du côté. Cela est assez problématique, car les gouttelettes commencent à créer de côtés supplémentaires, mais le remède utilisé dans [24] est d'introduire l'ensemble fini de directions dites quasi-stables. Ces directions avec les directions stables forment des gouttelettes, qui croissent pour créer des gouttelettes plus grandes avec les mêmes directions des côtés. Cela permet d'établir la borne supérieure sur p_c, alors que pour la borne inférieure il suffit de procéder par une généralisation du procédé d'Aizenman et Lebowitz.

Mentionnons finalement la raison de faire apparaître un demi-cercle ouvert avec un nombre fini de directions stables. En effet, ces directions ne permettent pas à une gouttelette de croître dans toutes les directions, mais seulement dans celle du milieu du demi-cercle (sans nuire à la généralité $(1,0)$). Néanmoins, cela suffit parce que si l'on arrive à croître dans cette direction-là pendant assez longtemps, on finit par trouver des infections au dessus et en dessous de la gouttelette, ce qui la fait croître dans les directions perpendiculaires aussi. Pour plus de détails cf. Figure 7 de [24].

Rafinements. En 2014 Bollobás, Duminil-Copin, Morris et Smith [22] ont fortement affiné les bornes de [24] pour les modèles critique, en établissant l'équivalent du résultat d'Aizenman et Lebowitz [4] en toute généralité et en obtenant la partition d'universalité. Ils trouvent qu'il y a deux sous-classes de pré-universalité – les modèles dits équilibrés comme celui à 2 voisins et les modèles déséquilibrés comme le modèle anisotrope. Ce sont les seconds, qui posent plus de problèmes techniques dans leur approche. Pour énoncer leur résultat on a besoin de la notion de difficulté. La difficulté $\alpha(u)$ d'une direction u est non-triviale pour les directions stables isolées et correspond au plus petit nombre d'infections dont on a besoin d'ajouter à un demi-plan infecté $\mathbb{H}_u$ de sorte qu'elles engendrent une infinité d'infections. Pour les directions instables on pose $\alpha(u) = 0$ et pour les directions stables non-isolées – $\alpha(u) = \infty$. Finalement, on définit la difficulté du modèle par

$$\alpha = \min_{C \in \mathcal{C}} \max_{u \in C} \alpha(u)\,, \tag{4}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des demi-cercles ouverts de S^1. Un modèle est équilibré, si la valeur de α est la même si l'on remplace les demi-cercles ouverts par des demi-cercles fermés dans (4) et déséquilibré sinon.

Le résultat de [22] est que pour les modèles équilibrés

$$p_c((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2) = \frac{\Theta(1)}{(\log n)^{1/\alpha}}\,,$$

tandis que pour les modèles déséquilibrés

$$p_c((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2) = \Theta\left(\frac{(\log\log n)^2}{\log n}\right)^{1/\alpha}.$$

Ainsi ils arrivent à réduire le calcul de la probabilité critique du modèle à une simple recherche d'ensemble fini purement géométrique. Il est intéressant de noter que, malgré l'apparence simple de la définition de la difficulté (4), l'auteur et Mezei [53] ont montré que son calcul à partir de $\mathcal{U}$ est NP-difficile.

Avant de passer aux modèles souscritiques, mentionnons que pour une famille bien plus restreinte de modèles critiques équilibrés l'équivalent du résultat de Holroyd [55] a été obtenu par Duminil-Copin et Holroyd en 2012 [34]. Étendre ce résultat à tous les modèles critiques et notamment les déséquilibrés est une question ouverte très ambitieuse. Signalons aussi qu'il y a encore un modèle déséquilibré très spécifique (en plus du modèle anisotrope et ses variantes), pour lequel l'asymptotique exacte a été récemment déterminée par Bollobás, Duminil-Copin, Morris et Smith [23]. Ce modèle a été introduit en 1989 par Duarte [33] et l'échelle de p_c a été donnée par Mountford [66] en 1995.

1.3.4 Modèles souscritiques

Un exemple de modèle souscritique est donné par le modèle à 3 voisins et un peu moins trivialement par toute famille à une règle. En fait, on peut distinguer les modèles *souscritiques triviaux* (comme ceux à 3 ou 4 voisins) – ceux qui admettent un ensemble fini de sites sains stable et, de manière équivalente ont $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1$. L'exemple le plus simple considéré déjà en 1992 par Schonmann [70] est donné par $\mathcal{U} = \{(1,0),(0,1)\}$. Il est trivialement identifié à la percolation orientée classique par sites (OP).

La démonstration que les modèles souscritiques ont une probabilité critique positive de [6] (ce qui justifie la partition de pré-universalité) passe par une renormalisation multi-échelle assez technique. En quelques mots, il s'agit de trouver (à toute échelle) des rubans suffisamment épais essentiellement non-infectés, qui séparent les régions essentiellement infectées et les empêchent donc de croître.

Il faut remarquer que le résultat de Balister, Bollobás, Przykucki et Smith [6] donne en pratique une borne tellement petite, que le seul résultat exploitable est qualitatif: $p_c(\mathbb{Z}^2) > 0$. Néanmoins il existe deux modèles où bien plus de choses sont connues. Le premier est OP qu'on a déjà introduit et dont toute la théorie peut se retranscrire dans le langage de bootstrap. L'autre est Spiral introduit en 2007 en physique par Toninelli, Biroli et Fisher [72]. Il est donné par la règle $\{(0,1),(1,1),(1,0),(1,-1)\}$ et les trois autres obtenues d'elle par rotations successives par $\pi/4$. Pour celui-ci on sait d'après Toninelli et Biroli [71] que p_c est le même que pour OP, que la transition est discontinue (modulo une extension du résultat de Duminil-Copin, Tassion et Teixeira [35] pour la percolation orientée par arrêtes à OP) et même certaines bornes sur le comportement de la longueur de corrélation près de criticalité.

Un article récent de l'auteur [51] réunit les connaissances sur ces deux modèles et les étend pour obtenir (en conjugaison avec un travail de percolation à venir [50]) une borne supérieure quantitative pour tout modèle sous-critique. La borne est notamment une égalité pour Spiral. Pour l'obtenir on établit une décomposition de p_c[3] en termes de quantités directionnelles dites *densités critiques*, qui jouent le rôle des difficultés de [22] pour les modèles critiques. De plus, on identifie un point critique $\tilde{q}_c$ (qui est conjecturé égal à p_c [51]), qui est notamment le point critique de décroissance exponentielle, le point critique d'un évènement «un-bras» et de l'espérance du temps d'infection de l'origine, ainsi que le point critique du trou spectral du KCM associé au modèle qu'on discutera dans la prochaine section. Finalement, dans [51] on relie aussi la sensitivité au bruit à la continuité de la transition au point $\tilde{q}_c$.

Les modèles souscritiques étant les moins bien compris, il y reste de nombreux problèmes ouverts. Le plus central est de montrer que $p_c = \tilde{q}_c$ et, dans la mesure du possible, «déterminer» cette valeur étant donné la famille $\mathcal{U}$. Un but ultérieur serait de déterminer quand la transition est continue, i.e. $\mathbb{P}_{p_c}([A] = \mathbb{Z}^d) = 1$ et comprendre le comportement critique.

1.4 Autres cadres de percolation bootstrap

Bien que la voie la plus centrale et traditionnelle soit de se placer sur $\mathbb{Z}^d$ ou des troncatures comme $[n]^d$ ou $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$, de nombreux autres graphes standards ont été considérés. Pour éviter de se disperser trop, nous mentionnons juste quelques exemples avec des références et très peu de commentaires et ne visons surtout pas l'exhaustivité.

1.4.1 Hypercubes

Nous commençons par le cadre le plus proche de ce qu'on a considéré jusqu'à présent. On se place toujours sur $[n]^d$, mais cette fois c'est d, qui tend vers l'infini, alors que n reste fixe. Les premiers travaux sur ce cas sont dus à Balogh et Bollobás [9], qui ont trouvé que $p_c([2]^d, r = 2)$ vaut $2^{-2\sqrt{d}}d^{-2}$ á une constante près. Leur résultat a été amélioré par Balogh, Bollobás et Morris [13], qui ont même trouvé le deuxième terme à un facteur $\log d$ près ainsi que l'asymptotique de $p_c([n]^d, 2)$ pour $d \gg \log n$. L'étude des modèles avec $r > 2$, mais fixé, sur l'hypercube reste ouverte avec une conjecture énoncée dans [13].

[3] En fait la caractérisation porte plutôt sur un autre point critique $\tilde{q}_c$, qu'on discutera ultérieurement.

Un autre cas particulier – la règle de la majorité – a été étudié aussi par les mêmes auteurs [12], qui ont trouvé les deux premiers termes de $p_c([2]^{2n}, n)$ ainsi que des résultats moins précis sur des boîtes plus grandes. En s'appuyant sur cela, Morris a déduit des résultats sur la dynamique du modèle d'Ising à température nulle [63].

1.4.2 Arbres et graphes réguliers.

Si l'on cherche à changer drastiquement de graphe, le choix le plus simple est celui des arbres. Ce cas a été étudié en détail par Balogh, Peres et Pete [14]. Ils ont trouvé la valeur exacte de la probabilité critique sur l'arbre infini d-régulier pour la percolation bootstrap à r voisins pour tous r et d.

Puisque les graphes aléatoires réguliers $G(n, d)$ sont localement des arbres il n'est pas surprenant que Balogh et Pittel [16] ont montré que la probabilité critique pour ces graphes tend vers celle déterminée dans [14], même si les techniques sont assez différentes. Le travail de Bartha et Pete [17] a établi que dans ce cadre il n'y a pas de sensitivité au bruit.

1.4.3 Plan de Hamming

Une direction plus récente introduite en premier par Gravner, Hoffman, Pfeiffer et Sivakoff [45] considère des interatctions à portée infinie, en se plaçant sur le tore de Hamming. Ce modèle est simplement donné par $[n]^d$ avec des arêtes entre points, qui ont une coordonnée en commun, avec le modèle à r voisins sur ce graphe. Un modèle similaire dit de percolation par ligne a été introduit par Balister, Bollobás, Lee et Narayanan [7]. Une généralisation commune de ces modèles a été étudiée par Gravner, Sivakoff et Slivken [48].

1.5 Questions extrémales de bootstrap

Dans tout ce qui précède nous avons considéré la percolation bootstrap avec des règles différentes et sur des graphes différents, mais toujours avec condition initiale aléatoire. Dans chacun de ces cadres on peut légitimement se poser de nombreuses questions extrémales. Les quantités les plus naturelles que l'on peut considérer sont les tailles extrémales d'ensembles percolants (eux-mêmes extrémaux ou non), les temps extrémaux de percolation, ... Il s'agit ainsi de tout un univers parallèle purement combinatoire, mais qui a reçu bien moins d'attention. Une raison importante pour s'y intéresser est simplement que les raisonnements sur des questions conjointes probabilistes peuvent tirer profit de telles bornes extrémales. Paradoxalement, une des raisons principales de ne pas s'y intéresser est que les modèles s'avèrent tellement riches, que les réponses aux questions extrémales sont souvent ingénieuses, inattendues et totalement inadaptées pour les questions probabilistes. Mentionnons quelques résultats intéressants sans viser l'exhaustivité.

1.5.1 Modèles en basse dimension

Pour ce modèle il y a principalement des résultats «négatifs», mais commençons par un exercice classique «positif», qui sert dans tous les travaux sur le modèle.

Exercice 2. *Prouver que la taille minimale d'un ensemble percolant dans* $[n]^2$ *est* n*.*

Une généralisation à $[n]^d$ donne $\lceil d(n-1)/2 \rceil + 1$ [21, Problem 35] (cf. aussi [9]). Les seuls résultats généraux sur le cas à $r > 2$ voisins sont mentionnés dans [15,65], mais l'asymptotique exacte à d et r fixés n'est pas connue sauf le cas $d = r$.

Malgré Exercice 2, Morris [62] a montré que les ensembles percolants minimaux peuvent être de taille $\Omega(n^2)$, ce qui est assez contre-intuitif. Le temps maximal de percolation (le nombre de pas de la dynamique nécessaires pour infecter tous les sites) apporte aussi une surprise. Le premier travail dessus par Benevides et Przykucki [18] a montré que ce temps dans $[n]^2$ vaut exactement $(5n^2 - 2n)/8$ (à l'arrondis près), si l'on se restreint aux ensembles percolants de taille minimale (donc n). Pour des ensembles percolants sans contrainte ils ont montré [19] que le temps maximal est environ $13/18n^2$, donc essentiellement on peut percoler plus ou moins «un site à la fois», même s'il la percolation est engendrée par très peu de sites.

1.5.2 Modèles sur l'hypercube

Taille minimale d'ensembles percolants. Lorsque la dimension tend vers l'infini les résultats changent complètement. L'asymptotique de la taille minimale des ensembles percolants (pour $r > 2$, comme nous avons déjà expliqué que $r = 2$ est fait dans [21]) a été déterminée récemment pour $[2]^d$ par Morrison et Noel [65] par des techniques d'algèbre linéaire. Leur preuve a été simplifiée par Hambardzumyan, Hatami et Qian [49], qui ont utilisé une belle méthode polynomiale.

Taille maximale d'ensemble percolant minimal. La taille maximale d'ensemble percolant minimal a été exactement déterminée pour le modèle à 2 voisins sur l'hypercube $[2]^d$ par Riedl [68]. Il est intéressant qu'elle vaut $2^{d/4}$ à un facteur borné, qui ne converge pas, près. On peut déduire de [62, 68] certaines contraintes sur cette taille dans $[n]^d$ significatives pour $d \gg n$, mais l'asymptotique est loin d'être connue. La situation pour $r > 2$ était essentiellement totalement ouverte, mais en fait la construction de l'auteur que l'on discutera dans le paragraphe suivant [52] montre que pour tout $r > 2$ la taille maximale sur $[2]^d$ est 2^d à un facteur d près.

Temps maximal de percolation. Le premier résultat sur le temps maximal de percolation pour $r = 2$ est dû à Przykucki [67]. Il a déterminé que ce temps vaut seulement $\lfloor d^2/3 \rfloor$, ce qui n'est pas du tout similaire à ce qu'on a dans le cas $d = 2$, $n \to \infty$, où le temps peut être une proportion positive du volume du carré [18]. Recemment, le cas $r > 2$ a été résolu aussi, mais le résultat est très surprenant. L'auteur a montré que pour tout $r > 2$ le temps maximal de percolation est asymptotiquement $2^d/d$ à un facteur $\log d$ près [52], soit presque tout le volume de l'hypercube. Ce résultat repose sur un lien avec le problème du «serpent-dans-la-boîte»[4] étudié pour les besoins des codes correcteurs dans les années 60-70 et notamment le résultat conclusif d'Evdokimov de 1976 [38].

2 Modèles cinétiquement contraints (KCM)

2.1 Définition et généralités

Les KCM sont des systèmes de particules en interaction. Ils ont été introduits par Fredrickson et Andersen [39, 40] en 1984 indépendamment de la littérature de percolation bootstrap. Il s'agit de processus de Markov η sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ avec dynamique de Glauber contrainte et mesure stationnaire réversible $\mathbb{P}_p$. Définissons-les directement dans le cadre général via la représentation graphique. On se donne une famille $\mathcal{U}$ de bootstrap et un processus de Poisson standard N^x indépendant sur chaque site $x \in \mathbb{Z}^2$. À chaque atome du processus de Poisson N^x on vérifie si dans la configuration actuelle $\eta(t) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ le site x serait infecté (les sites infectés sont les sites vides, i.e. dont la variable d'occupation vaut 0) au prochain pas de la dynamique de bootstrap donnée par $\mathcal{U}$ (i.e. s'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\eta_y(t) = 0$ pour tout $y \in x + U$). Si ce n'est pas le cas, on ne prend pas l'atome en compte. Dans le cas contraire, on remplace l'état du site par une nouvelle variable de Bernoulli de paramètre p indépendante de tout le reste. Ceci définit bien un processus de Markov avec les propriétés énoncées par les techniques standards de systèmes de particules (cf. Liggett [57]).

La raison d'être initiale de ces modèles est d'expliquer la transition vitreuse par des moyens purement cinétiques (cf. [42, 69] pour des synthèses de physique sur le sujet). L'idée est que les particules peuvent être gênées par les voisins pour se déplacer (la non-conservativité du modèle vient du fait qu'il porte sur un point de vue renormalisé) et le comportement attendu du modèle est une forte divergence du temps de relaxation (ou de mélange) lorsque p decroît. Avant d'entamer les résultats sur les KCM, notons que ces systèmes ne sont pas attractifs (ajouter des particules ne favorise pas nécessairement l'apparition de particules, comme les

[4]C'est la recherche de longs chemins plongés dans l'hypercube par une isométrie locale, par exemple longs chemins induits.

particules ajoutées peuvent empêcher la création de nouvelles par la dynamique), ce qui rend l'analyse mathématique beaucoup moins aisée par comparaison avec le modèle d'Ising stochastique, par exemple.

De manière générale pour tout processus de Markov beaucoup de propriétés asymptotiques sont gouvernées par le trou spectral de son générateur. L'autre question qui nous occupera est si $\mathbb{P}_p$ est ergodique. Cette question-là s'avère facile et Cancrini, Martinelli, Roberto et Toninelli [25] ont montré que le KCM est ergodique si et seulement si la percolation bootstrap correspondante infecte tout le plan p.s.[5] Comme nous avons vu, p_c pour la percolation bootstrap n'est pas du tout facile à trouver pour les modèles souscritiques, mais c'est déjà une réduction notable, qui rend la question déterministe et monotone. Comme nous avons évoqué, dans [51], en utilisant le résultat principal de [25], l'auteur a identifié la transition où le trou spectral devient 0 en termes de $\tilde{q}_c$ – la transition de décroissance exponentielle de la percolation bootstrap associée. La preuve de [25] utilise une technique de découpage – on se place sur une boîte finie et on relie son trou spectral à celui d'une boîte deux fois plus petite, en considérant une dynamique par blocs.

Une autre quantité d'intérêt plus naturelle est le temps moyen d'infection de l'origine dans le KCM $\mathbb{E}_p[\tau_0]$. Mais dans [26, Théorème 4.7] Cancrini, Martinelli, Roberto et Toninelli ont montré

$$\mathbb{E}_p[\tau_0] \leqslant T_{\mathrm{rel}}(p)/p\,,$$

où T_{rel} est l'inverse du trou spectral. De plus, Martinelli et Toninelli [61, Lemma 4.3] ont observé que

$$\mathbb{E}_p[\tau_0] = \Omega(T_{\mathcal{U}})\,,$$

où $T_{\mathcal{U}}$ est le temps médian d'infection de l'origine en percolation bootstrap. Ainsi on a une borne «a priori» donnée par la percolation bootstrap.[6]

Mis à part les résultats ci-dessus, essentiellement rien n'est connu sur les KCM souscritiques en général. Seulement les modèles très spéciaux OP (dit Nord-Est dans le cadre KCM) et Spiral ont été étudiés avec succès. Ainsi on ne traitera que les deux autres classes de pré-universalité.

2.2 Modèles surcritiques

Commençons par les modèles surcritiques (le vocabulaire de pré-universalité de bootstrap s'applique identiquement aux KCM) dont la compréhension est la meilleure. Pour ces modèles on peut déduire du raisonnement de [25, 51] une borne

[5] En fait leur Proposition 2.4. énonce un résultat légèrement moins fort, mais la preuve donne cette version plus forte.

[6] Notons que déterminer $T_{\mathcal{U}}$ est essentiellement équivalent à déterminer p_c et avec les résultats d'universalité viennent de bonnes estimées du temps d'infection aussi.

supérieure sur T_{rel}, mais elle n'est pas tendue. En 2017 Martinelli et Toninelli [61] ont développé une méthode pour obtenir de bonnes bornes supérieures sur T_{rel}, qu'ils ont étendues avec Morris [60] pour obtenir des bornes supérieures, qu'ils conjecturent bonnes pour tout modèle critique ou surcritique. Cette conjecture a été démontrée très récemment dans certains cas (et notamment pour les modèles surcritiques) par Marêché, Martinelli et Toninelli [59], en utilisant le résultat combinatoire de Marêché [58]. Avant de l'énoncer on a besoin d'une définition. On appelle un KCM surcritique *enraciné* s'il existe 2 directions stables non-opposées et *déraciné* sinon (en particulier il y a soit aucune direction stable, soit une, soit 2 directions stables opposées). Pour les KCM déracinés on a

$$\mathbb{E}_p[\tau_0] = p^{-\Theta(1)}$$

lorsque $p \to 1$, donc c'est la borne donnée par la bootstrap, qui est bonne. Par contre, pour les KCM enracinés un autre phénomène entre en jeu pour donner

$$\mathbb{E}_p[\tau_0] = \exp\left(\Theta\left((\log p)^2\right)\right) , \tag{5}$$

ce qui diffère de la borne de bootstrap.

La différence est mise en avant le mieux pour le modèle unidimensionnel dit Est, donné par la famille $\mathcal{U} = \{\{-1\}\}$. Il a été introduit en 1991 par Jäckle et Eisinger [56] et a reçu beaucoup d'attention depuis. Notamment, Aldous et Diaconis [5] ont montré (5) pour Est, plus tard Cancrini, Martinelli, Roberto et Toninelli [25] ont obtenu l'asymptotique de $\log \mathbb{E}_p[\tau_0]$ et depuis des résultats encore plus précis ont été établis par Chleboun, Faggionato et Martinelli [30] basés sur des résultats combinatoires de Chung, Diaconis et Graham [32]. L'idée fondamentale est que l'infection la plus proche de l'origine (en une dimension) se trouve à distance $1/p$ et pour infecter l'origine il est nécessaire de traverser cette région remplie, ce qui demande de passer par une configuration avec au moins $\log(1/p)$ infections. Ce nombre étant grand devant 1, ces configurations sont très atypiques pour $\mathbb{P}_p$, donc il faut passer cette «barrière d'énergie», ce qui prend beaucoup plus de temps que $1/p$.

La démonstration de (5) formalise l'idée qu'à cause des directions stables non-opposées les infections peuvent se déplacer dans un cône sans revenir, ce qui induit une dynamique semblable à celle d'Est. Par contre, pour les modèles non-enracinés les déplacements dans les deux sens sont autorisés et la barrière d'énergie n'est plus présente.

2.3 Modèles critiques

La situation avec les modèles critiques est similaire, mais plus complexe et moins établie. Néanmoins l'intuition reste la même – il y a deux sous-classes de modèles. Les uns peuvent se déplacer (facilement) seulement dans une direction et on y attend une dynamique de type Est avec des temps de relaxation plus longs. Un problème technique est que pour les modèles critiques la dynamique (Est ou autre) porte sur les gouttelettes critiques, qui sont de taille logarithmique plutôt que constante. L'autre obstacle est qu'il faut prendre en compte les difficultés des différentes directions et le fait qu'il est possiblement difficile, mais pas impossible, de se déplacer dans la direction opposée à la plus facile. Finalement, pour certains modèles bidirectionnels il peut être plus avantageux d'utiliser une dynamique bidirectionnelle, mais pas dirigée par la direction la plus facile.

Une borne supérieure générale a été obtenue pour tous les modèles critiques par Martinelli, Morris et Toninelli [60], en développant les techniques de Martinelli et Toninelli [61]. Ils définissent, en supplément de la difficulté α, une *difficulté bilatérale*

$$\beta = \min_{C\in\mathcal{C}} \max_{u\in C} \max(\alpha(u), \alpha(-u))\,.$$

On peut alors envisager deux mécanismes d'infection de l'origine – soit on utilise une dynamique de type Est pour la direction la plus facile, mais on paye pour les barrières d'énergie, soit on utilise une dynamique bidirectionnelle pour la direction, qui donne la difficulté bilatérale. Ainsi on obtient deux bornes différentes et c'est l'une ou l'autre, qui est meilleure selon le rapport β/α. Plus précisément, pour les modèles avec $\beta \geqslant 2\alpha$ (dits α-enracinés) on a

$$\log T_{\mathrm{rel}} = \tilde{O}(p^{-2\alpha})\,. \tag{6}$$

Pour les autres (dits β-déracinés) on a

$$\log T_{\mathrm{rel}} = \tilde{O}(p^{-\beta})\,. \tag{7}$$

À présent il manque de borne inférieure correspondante. Cela dit, pour la classe de modèles avec $\alpha = \beta$ la borne de bootstrap montre que (7) est la bonne échelle. Très récemment Marêché, Martinelli et Toninelli [59] ont montré que (6) est la bonne échelle (même avec le bon facteur logarithmique) pour le modèle de Duarte. C'est le représentant le plus simple des modèles α-enracinés, puisque $\beta = \infty$ et la propagation est possible uniquement dans une direction – celle qui donne α.

Un des problèmes ouverts principaux est d'établir que (6) et (7) sont toujours des égalités (à des facteurs logarithmiques près), comprendre les facteurs logarithmiques et notamment ce qui se passe lorsque $\beta = 2\alpha$. Une autre question, qui reste largement ouverte est le comportement hors équilibre, qui est inaccessible par les techniques actuelles (sauf des exceptions marginales comme [31]).

References

[1] J. Adler. Bootstrap percolation. *Phys. A*, 171(3):453 – 470, 1991.

[2] J. Adler and U. Lev. Bootstrap Percolation: visualizations and applications. *Brazilian Journal of Physics*, 33:641 – 644, 09 2003.

[3] J. Adler, D. Stauffer, and A. Aharony. Comparison of bootstrap percolation models. *J. Phys. A*, 22(7):L297, 1989.

[4] M. Aizenman and J. L. Lebowitz. Metastability effects in bootstrap percolation. *J. Phys. A*, 21(19):3801–3813, 1988.

[5] D. Aldous and P. Diaconis. The asymmetric one-dimensional constrained Ising model: rigorous results. *J. Stat. Phys.*, 107(5-6):945–975, 2002.

[6] P. Balister, B. Bollobás, M. Przykucki, and P. Smith. Subcritical $\mathcal{U}$-bootstrap percolation models have non-trivial phase transitions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(10):7385–7411, 2016.

[7] P. Balister, B. Bollobás, J. Lee, and B. Narayanan. Line percolation. *Random Structures Algorithms*, 52(4):597–616, 2018.

[8] J. Balogh and B. Bollobás. Sharp thresholds in bootstrap percolation. *Phys. A*, 326(3-4):305–312, August 2003.

[9] J. Balogh and B. Bollobás. Bootstrap percolation on the hypercube. *Probab. Theory Related Fields*, 134(4):624–648, 2006.

[10] J. Balogh, B. Bollobás, H. Duminil-Copin, and R. Morris. The sharp threshold for bootstrap percolation in all dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(5):2667–2701, 2012.

[11] J. Balogh, B. Bollobás, and R. Morris. Bootstrap percolation in three dimensions. *Ann. Probab.*, 37(4):1329–1380, 2009.

[12] J. Balogh, B. Bollobás, and R. Morris. Majority bootstrap percolation on the hypercube. *Combin. Probab. Comput.*, 18(1-2):17–51, 2009.

[13] J. Balogh, B. Bollobás, and R. Morris. Bootstrap percolation in high dimensions. *Combin. Probab. Comput.*, 19(5-6):643–692, 2010.

[14] J. Balogh, Y. Peres, and G. Pete. Bootstrap percolation on infinite trees and non-amenable groups. *Combin. Probab. Comput.*, 15(5):715–730, 2006.

[15] J. Balogh and G. Pete. Random disease on the square grid. In *Proceedings of the Eighth International Conference "Random Structures and Algorithms" (Poznan, 1997)*, volume 13, pages 409–422, 1998.

[16] J. Balogh and B. G. Pittel. Bootstrap percolation on the random regular graph. *Random Structures Algorithms*, 30(1-2):257–286, 2007.

[17] Z. Bartha and G. Pete. Noise sensitivity in bootstrap percolation. *ArXiv e-prints*, September 2015.

[18] F. Benevides and M. Przykucki. On slowly percolating sets of minimal size in bootstrap percolation. *Electron. J. Combin.*, 20(2):Paper 46, 20, 2013.

[19] F. Benevides and M. Przykucki. Maximum percolation time in two-dimensional bootstrap percolation. *SIAM J. Discrete Math.*, 29(1):224–251, 2015.

[20] I. Benjamini, G. Kalai, and O. Schramm. Noise sensitivity of Boolean functions and applications to percolation. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (90):5–43 (2001), 1999.

[21] B. Bollobás. *The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis*. Cambridge University Press, 2006.

[22] B. Bollobás, H. Duminil-Copin, R. Morris, and P. Smith. Universality of two-dimensional critical cellular automata. *Proc. Lond. Math. Soc.* To appear.

[23] B. Bollobás, H. Duminil-Copin, R. Morris, and P. Smith. The sharp threshold for the Duarte model. *Ann. Probab.*, 45(6B):4222–4272, 2017.

[24] B. Bollobás, P. Smith, and A. Uzzell. Monotone cellular automata in a random environment. *Combin. Probab. Comput.*, 24(4):687–722, 2015.

[25] N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli. Kinetically constrained spin models. *Probab. Theory Related Fields*, 140(3-4):459–504, 2008.

[26] N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli. Facilitated spin models: recent and new results. In *Methods of contemporary mathematical statistical physics*, volume 1970 of *Lecture Notes in Math.*, pages 307–340. Springer, Berlin, 2009.

[27] R. Cerf and E. N. M. Cirillo. Finite size scaling in three-dimensional bootstrap percolation. *Ann. Probab.*, 27(4):1837–1850, 1999.

[28] R. Cerf and F. Manzo. The threshold regime of finite volume bootstrap percolation. *Stochastic Process. Appl.*, 101(1):69–82, 2002.

[29] J. Chalupa, P. L. Leath, and G. R. Reich. Bootstrap percolation on a Bethe lattice. *J. Stat. Phys.*, 12(1):L31–L35, 1979.

[30] P. Chleboun, A. Faggionato, and F. Martinelli. Time scale separation and dynamic heterogeneity in the low temperature East model. *Comm. Math. Phys.*, 328(3):955–993, 2014.

[31] P. Chleboun, A. Faggionato, and F. Martinelli. Mixing time and local exponential ergodicity of the East-like process in $\mathbb{Z}^d$. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 24(4):717–743, 2015.

[32] F. Chung, P. Diaconis, and R. Graham. Combinatorics for the East model. *Adv. in Appl. Math.*, 27(1):192–206, 2001.

[33] J.A.M.S Duarte. Simulation of a cellular automaton with an oriented bootstrap rule. *Phys. A*, 157(3):1075–1079, 1989.

[34] H. Duminil-Copin and A. Holroyd. Finite volume bootstrap percolation with balanced threshold rules on $\mathbb{Z}^2$. 2012. Preprint available at http://www.ihes.fr/~duminil/.

[35] H. Duminil-Copin, V. Tassion, and A. Teixeira. The box-crossing property for critical two-dimensional oriented percolation. *Probab. Theory Related Fields*, Jun 2017.

[36] H. Duminil-Copin and A. C. D. Van Enter. Sharp metastability threshold for an anisotropic bootstrap percolation model. *Ann. Probab.*, 41(3A):1218–1242, 2013.

[37] H. Duminil-Copin, A. C. D. van Enter, and T. Hulshof. Higher order corrections for anisotropic bootstrap percolation. *Probab. Theory Related Fields*, Nov 2017.

[38] A. A. Evdokimov. Chain codes with arbitrary distance. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 228(6):1273–1276, 1976.

[39] G. H. Fredrickson and H. C. Andersen. Kinetic ising model of the glass transition. *Phys. Rev. Lett.*, 53:1244–1247, Sep 1984.

[40] G. H. Fredrickson and H. C. Andersen. Facilitated kinetic ising models and the glass transition. *The Journal of Chemical Physics*, 83(11):5822–5831, 1985.

[41] E. Friedgut and G. Kalai. Every monotone graph property has a sharp threshold. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(10):2993–3002, 1996.

[42] P. Garrahan, P. Sollich, and C. Toninelli. Kinetically constrained models. In L. Berthier, G. Biroli, J-P. Bouchaud, L. Cipelletti, and W. van Saarloos,

editors, *Dynamical heterogeneities in Glasses, colloids and granular media and jamming transitions*, International series of monographs on physics 150, pages 341–369. Oxford University Press, 2011.

[43] J. Gravner and D. Griffeath. First passage times for threshold growth dynamics on $\mathbb{Z}^2$. *Ann. Probab.*, 24(4):1752–1778, 1996.

[44] J. Gravner and D. Griffeath. Scaling laws for a class of critical cellular automaton growth rules. In *Random walks (Budapest, 1998)*, volume 9 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 167–186. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999.

[45] J. Gravner, C. Hoffman, J. Pfeiffer, and D. Sivakoff. Bootstrap percolation on the hamming torus. *Ann. Appl. Probab.*, 25(1):287–323, 02 2015.

[46] J. Gravner and A. E. Holroyd. Slow convergence in bootstrap percolation. *Ann. Appl. Probab.*, 18(3):909–928, 2008.

[47] J. Gravner, A. E. Holroyd, and R. Morris. A sharper threshold for bootstrap percolation in two dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, 153(1-2):1–23, 2012.

[48] J. Gravner, D. Sivakoff, and E. Slivken. Neighborhood growth dynamics on the Hamming plane. *Electron. J. Combin.*, 24(4):Paper 4.29, 55, 2017.

[49] L. Hambardzumyan, H. Hatami, and Y. Qian. Polynomial method and graph bootstrap percolation. *ArXiv e-prints*, August 2017.

[50] I. Hartarsky. Generalised oriented site percolation. In preparation.

[51] I. Hartarsky. $\mathcal{U}$-bootstrap percolation: critical probability, exponential decay and applications. *ArXiv e-prints*, June 2018.

[52] I. Hartarsky. Maximal Bootstrap Percolation Time on the Hypercube via Generalised Snake-in-the-Box. *Electron. J. Combin.*, 25(3), July 2018.

[53] I. Hartarsky and T. Mezei. Computing the difficulty of critical bootstrap percolation models is NP-hard. *ArXiv e-prints*, September 2018.

[54] I. Hartarsky and R. Morris. The second term for two-neighbour bootstrap percolation in two dimensions. *ArXiv e-prints*, June 2018.

[55] A. E. Holroyd. Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation. *Probab. Theory Related Fields*, 125(2):195–224, 2003.

[56] J. Jäckle and S. Eisinger. A hierarchically constrained kinetic ising model. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 84(1):115–124, Feb 1991.

[57] T. M. Liggett. *Interacting particle systems*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.

[58] L. Marêché. Combinatorics for general kinetically constrained spin models. *ArXiv e-prints*, July 2017.

[59] L. Marêché, F. Martinelli, and C. Toninelli. Exact asymptotics for Duarte and supercritical rooted kinetically constrained models. *ArXiv e-prints*, July 2018.

[60] F. Martinelli, R. Morris, and C. Toninelli. Universality results for kinetically constrained spin models in two dimensions. *ArXiv e-prints*, January 2018.

[61] F. Martinelli and C. Toninelli. Towards a universality picture for the relaxation to equilibrium of kinetically constrained models. *ArXiv e-prints*, January 2017.

[62] R. Morris. Minimal percolating sets in bootstrap percolation. *Electron. J. Combin.*, 16(1):Research Paper 2, 20, 2009.

[63] R. Morris. Zero-temperature Glauber dynamics on $\mathbb{Z}^d$. *Probab. Theory Related Fields*, 149(3-4):417–434, 2011.

[64] R. Morris. Bootstrap percolation, and other automata. *European J. Combin.*, 66:250–263, 2017.

[65] N. Morrison and J. A. Noel. Extremal bounds for bootstrap percolation in the hypercube. *J. Combin. Theory Ser. A*, 156:61–84, 2018.

[66] T. S. Mountford. Critical length for semi-oriented bootstrap percolation. *Stochastic Process. Appl.*, 56(2):185–205, 1995.

[67] M. Przykucki. Maximal percolation time in hypercubes under 2-bootstrap percolation. *Electron. J. Combin.*, 19(2):Paper 41, 13, 2012.

[68] E. Riedl. Largest minimal percolating sets in hypercubes under 2-bootstrap percolation. *Electron. J. Combin.*, 17(1):Research Paper 80, 13, 2010.

[69] F. Ritort and P. Sollich. Glassy dynamics of kinetically constrained models. *Advances in Physics*, 52(4):219–342, 2003.

[70] R. H. Schonmann. On the behavior of some cellular automata related to bootstrap percolation. *Ann. Probab.*, 20(1):174–193, 1992.

[71] C. Toninelli and G. Biroli. A new class of cellular automata with a discontinuous glass transition. *J. Stat. Phys.*, 130(1):83–112, 2008.

[72] C. Toninelli, G. Biroli, and D. S. Fisher. Toninelli, Biroli, and Fisher reply:. *Phys. Rev. Lett.*, 98:129602, Mar 2007.

[73] A. Uzzell. An improved upper bound for bootstrap percolation in all dimensions. *ArXiv e-prints*, 2012.

[74] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities with applications to percolation and reliability. *J. Appl. Probab.*, 22(3):556–569, 1985.

[75] A. C. D. van Enter. Proof of Straley's argument for bootstrap percolation. *J. Statist. Phys.*, 48(3-4):943–945, 1987.

[76] A. C. D. van Enter and T. Hulshof. Finite-size effects for anisotropic bootstrap percolation: logarithmic corrections. *J. Stat. Phys.*, 128(6):1383–1389, 2007.