

Sur l'expérience de Mayer

Ivailo Hartarsky
Professeur encadrant: Jean-François Logeais

1 Préliminaires

1.1 Histoire de l'expérience

En 1878 Alfred Mayer monte une expérience de magnétisme[4], conçue pour «illustrer certains phénomènes de la structure moléculaire de la matière»[6]. Elle consiste à enfoncer des aiguilles également magnétisées dans des petits bouts de liège de sorte qu'elles soient toutes verticales et de même orientation des pôles avec les pôles nord à la même hauteur au dessus de l'eau. Les objets ainsi préparés sont mis dans une cuvette remplie d'eau. Enfin, un aimant puissant est mis au-dessus du dispositif avec son pôle sud orienté vers le bas et les figures célèbres de Mayer (Figure 1) apparaissent. Il qualifie les configurations de primaires, secondaires, ternaires, . . . , telles que les primaires sont les noyaux des secondaires, les secondaires – des ternaires.[5, 6, 7]

Ces expériences inspirèrent J.J.Thomson pour la conception du premier modèle de l'atome¹. [8, 9] Dans ce cadre il fit une étude plus quantitative de ces phénomènes dans le cadre électrique, mais peu adaptée au cas magnétique. Ses études ont donné naissance à la statique des tourbillons contemporaine, où des configurations analogues sont observées, mais une description analytique n'a pas été trouvée.[1, 2] C'est pour cette raison, que j'ai décidé d'en tenter une, toujours non analytique mais plus précise qu'une simple classification. La suite de ce texte présente les formalisation(1.2), simulation(2), modélisation(3.1), justification(3.2) et vérification expérimentale(4), toutes faites par moi, dont le but principal est de décrire les formes des polygones «réguliers», qui n'en sont pas.

1.2 Formalisation

Pour aborder rigoureusement le sujet, on aura besoin de quelques notions naturelles.

Définition. On appelle *couche externe* d'une configuration² l'intersection de la configuration avec la frontière de son enveloppe convexe.

Les *couches* d'une configuration sont définies itérativement en enlevant l'externe jusqu'à l'épuisement de la configuration.

La dernière couche non-vide est appelée *interne*.

La suite finie des cardinaux des couches d'une configuration, prises de l'interne vers l'externe est appelé *distribution*.

Deux configurations sont appelées *identiques* si leurs distributions sont les mêmes.

1. "the plum pudding model"
2. l'ensemble fini des points du plan, occupés par les aiguilles lorsqu'elles ne sont soumises à aucune accélération

Cette définition ne doit pas être prise au sens strict, car (comme on le verra) il y a des couches avec plus de deux points alignés et donc un petit écart pourrait changer la distribution au sens de la définition. Alors, en pratique, on va associer un point à la «couche la plus proche».

Exemple. Les configurations a , b et c de Figure 2 ont la distribution 2-7.

2 Simulation Informatique

Comme le dit Joseph Thomson «Malheureusement, les équations, qui déterminent la stabilité d'un tel groupement de particules augmentent tellement vite en complexité avec l'augmentation du nombre de particules, qu'une recherche mathématique générale paraît impossible.»[8] Ainsi le point de départ de mon étude a été une simulation informatique du mouvement des aiguilles. En première approximation elles sont modélisables par des dipôles magnétiques de direction verticale, de même moment magnétique, situés dans un plan horizontal. L'aimant est assimilé à un dipôle de même direction. Une solution est la méthode du gradient, qui consiste à envisager des déplacements simultanés de chaque aiguille d'un «petit» vecteur proportionnel à la force exercée par le reste du système. On réitère ce procédé jusqu'à obtenir un équilibre satisfaisant. En notant N le nombre d'aiguilles et T le nombre d'itérations, on obtient une complexité en $\Theta(N^2T)$, car on réévalue chaque fois toutes les forces des couples de dipôles. Dans les applications auxquelles on s'intéressera N est en général inférieur à 100, voire 50, et T à 2000, d'où une rapidité acceptable.

Malheureusement, l'algorithme du gradient ne permet pas d'assurer la convergence dans le cas étudié. Pour pallier ce défaut j'ai introduit des adaptations comme des vérifications, que la force n'est pas «trop grande» (ce qui arrive si deux aiguilles se rapprochent trop à cause d'une itération), car cela peut envoyer les aiguilles très loin. Or au-delà d'un certain rayon l'aimant central pousse les aiguilles au lieu de les attirer et donc le système diverge. Grâce au programme décrit on génère à partir d'une configuration initiale *une* configuration d'équilibre. Or on souhaite retrouver toutes les distributions possibles donc, guidé par les résultats expérimentaux(4), j'ai fait encore d'hypothèses : je n'ai cherché que des configurations de moins de 9 couches (pour $n < 40$), où la couche i contient N_i aiguilles avec : $N_{i-1} < N_i \leq \max(2N_{i-1}, N_{i-1} + 7)$. Alors, on génère des configurations initiales, qui leur ressemblent (non pas parfaitement pour éviter les équilibres instables). Avec ces contraintes, j'ai réussi à générer un grand nombre de configurations comme celles de Figure 3 (de l'ordre de 1000 pour $n < 40$). La plupart d'entre elles étant identiques, ce n'est qu'après un tri, qu'elles permettent de voir mieux le comportement du système.

C'est ici qu'on vérifie la pertinence des hypothèses simplificatrices faites : on retrouve un ensemble de distributions possibles tout à fait comparable à ceux trouvés par Mayer[6], Thomson[8] et moi-même(4). Par la suite ces configurations sont utilisées comme des données de départ.

3 Le modèle proposé

3.1 Formulation

À partir des images j'ai pu proposer un modèle, qui consiste à considérer que les aiguilles «essaient» de se mettre sous une forme *la plus compacte* possible, étant donnée la distance la plus courte entre deux points d . On verra dans (3.2) que la

configuration la plus compacte est réalisée par le réseau hexagonal :

$$\mathfrak{H} = \mathbb{Z} \left[e^{\frac{\pi \cdot i}{3}} \right] = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : z = a + b \cdot e^{\frac{\pi \cdot i}{3}} \right\}$$

On «devinera», alors, la configuration seulement à partir de la couche interne (celle d’après si elle est réduite à un point) et de la distance d . \mathfrak{H} nous permet de construire la configuration si la couche interne est 2,3,4 ou 6, ou si les deux premières sont 1-6 comme indiqué sur Figure 4. Certes ces configurations-là sont en très bon accord avec la réalité pour les quelques premières couches internes d’une configuration à beaucoup de points, mais cela n’épuise pas toutes les configurations observables. Alors, j’ai fait une deuxième observation – lorsqu’il manque plusieurs points pour remplir une couche, des points de la couche voisine interne «sortent» pour compenser et la distance entre les couches voisines devient proche de d (au lieu de $\frac{\sqrt{3}d}{2}$). Pour en tenir compte, on se fixe les k premières couches d’une configuration et essaie de remplir la $k + 1$ -ème avec un nombre de points, qui ne permet pas d’utiliser \mathfrak{H} . J’ai pu conjecturer qu’ils se répartissent de manière *équilibrée* (les distances entre les couples de voisins de la couche sont proches) sur l’enveloppe convexe de l’ensemble des points à distance au plus d du polygone associé à la k -ème couche. Par la suite le terme *enveloppe* sera employé en ce sens.

Ainsi, pour une distribution donnée, on utilise \mathfrak{H} tant que possible, i.e. tant que la distribution coïncide avec (2, 8, 14, 20, ...), (3, 9, 15, 21, ...), (4, 10, 16, 22, ...), (6, 12, 18, 24, ...) ou (1, 6, 12, 18, 24, ...) jusqu’au k -ème terme.³ Puis, on reitère les enveloppes jusqu’à la fin de la distribution. Remarquons que chaque couche construite comme enveloppe possède un degré de liberté (de «rotation») contrairement à celles obtenues par \mathfrak{H} , qui sont entièrement déterminées. Le résultat de cette procédure est illustré sur Figures 5 et 6 (Le résultat de la simulation est les points bleus, les courbes colorées sont les prévisions du modèle pour les couches, les cercles noirs – la construction de \mathfrak{H} et les segments verts – la distance d). On se permet une abstraction de la couche externe et des phénomènes dus à elle (le plus souvent à un *trou*⁴). Le modèle expliqué dans ce paragraphe paraît correspondre très bien à la simulation(2) et aux résultats expérimentaux(4).

3.2 Justification

Dans ce paragraphe je donne une justification pas toujours rigoureuse d’une partie des hypothèses et approximations faites dans le modèle discuté dans le paragraphe précédent(3.1).

Valeurs numériques Notons M et m respectivement les moments magnétiques de l’aimant central et d’une aiguille, h – la hauteur de l’aimant, n – le nombre d’aiguilles et \mathbf{R} – le vecteur de \mathbb{C}^n des vecteurs position des aiguilles. Une relation homogène entre $m, M, \mu_0, h, \mathbf{R}$ et n ne ferait pas apparaître μ_0 , car $[m] = [M] = IL^2$ et $[\mu_0] = I^{-2}MLT^{-2}$, donc la seule possibilité pour faire disparaître les intensités est d’avoir $\mu_0 M^\alpha m^{1-\alpha}$, qui fait intervenir un temps. Encore pour éliminer les intensités il n’y aurait que de $\frac{M}{m}$ et finalement la relation s’écrit

$$\left\{ \frac{\mathbf{R}}{h} \mid \mathbf{R} - \text{stable} \right\} = F \left(n, \frac{M}{m} \right).$$

Ainsi pour la recherche des formes des couches les seules grandeurs intéressantes sont *a priori* n et $\frac{M}{m}$. Or les expériences faites par Mayer, Thomson et moi donnent

3. cela pourrait arriver dès la couche interne, si elle contient 5 points

4. deux points voisins, situés à une distance nettement plus grande que les autres

toutes sensiblement les mêmes résultats tout en étant effectuées avec différents valeurs de $\frac{M}{m}$, donc on peut ne considérer que n comme variable. Cette approximation a bien sûr des limites – la simulation informatique(2) permet de voir que les valeurs de $\frac{M}{m}$ plus importantes permettent d’augmenter n et d’avoir \mathfrak{H} bien marqué et rectiligne. Par ailleurs, à partir de la mesure des distances pour $n = 3$ on trouve $\frac{M}{m} \sim 10^3$ pour l’expérience(4).

Compacité L’utilisation de \mathfrak{H} est justifié par le théorème suivant :

Théorème (Axel Thue). *\mathfrak{H} est le groupement le plus compact de cercles de rayon unitaire dans le plan avec une compacité de*

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.90690.$$

Une démonstration[3] utilise les triangulations de Delaunay⁵. On montre que le plus grand angle d’un triangle d’une telle triangulation est inférieur à $\frac{2\pi}{3}$ – ce qui montre que la compacité de chaque triangle est au plus $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$. \square

De plus, un calcul local montre la stabilité de l’équilibre du réseau hexagonal (vu que la force centrale est négligeable devant celles des aiguilles dans nos applications), ce qui est illustré sur Figure 8.

Intéraction par adjacence Justifions que seules les couches voisines influencent une couche donnée. On peut même affirmer que seulement les points voisins (à distance proche de d) importent. Il suffit de remarquer que la projection de la force entre deux dipôles sur le plan de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{3\mu_0 m^2 \vec{r}}{4\pi r^5}$$

est en $\Theta(r^{-4})$, où r est la distance entre les dipôles. Alors les aimants, qui ne sont pas adjacents, situés généralement à une distance d’au moins $2d$ exercent une force 16 fois moins importante. De plus, si on est près du centre, les forces, exercées par les couches extérieures sont presque nulles, car de loin, on peut les assimiler à des cercles, dont la force au centre est clairement nulle. Finalement, l’expérience montre aussi cette propriété – si on rajoute un point dans la couche externe, on ne voit de changement significatif que dans l’avant-dernière couche (Figure 7). On remarque aussi que la position systématiquement plus éloignée de la couche externe est explicable par cet effet. Un point de cette couche serait (selon le modèle) sur l’enveloppe de l’avant dernière couche, s’il y en avait encore à l’extérieur. Alors, si on fait disparaître les couches ajoutées, le point considéré n’est plus soumis à la force exercée par elles et donc se déplace vers l’extérieur, d’où le décalage et la décision de ne pas prendre en compte la couche externe, dont le comportement diffère de celui des autres (Figure 9).

Enveloppes Enfin, j’ai su montrer qu’asymptotiquement (ce résultat n’est pas vrai pour des cas marginaux comme celui de Figure 10) les enveloppes sont la seule possibilité, en admetant que les couches doivent être convexes et équilibrées de distance entre les voisins proche de d . La démonstration assez technique est illustrée sur Figure 11.

5. pour tout triangle il n’y a pas de points strictement compris dans le cercle circonscrit du triangle

4 Réalisation pratique

Après avoir fait l'étude décrite antérieurement j'ai refait l'expérience moi-même pour pouvoir chercher plus soigneusement les distributions, données par la simulation(2) et prévues par le modèle(3), qui n'apparaissent pas dans la liste de Thomson pour être sûr de leur existence réelle. D'abord j'ai réussi à obtenir *toutes* les distributions, données par la simulation avec au plus 17 aimants, représentées dans Tableau 1. Ensuite, j'ai essayé d'obtenir quelques configurations mettant en évidence l'arrangement compact. Le grand nombre de dipôles et la manipulation manuelle ont posé beaucoup de difficultés, mais les distributions attendues ont été obtenues (Figure 12). Elles sont représentées dans Tableau 2. Ces résultats montrent la cohérence de la simulation(2) et du modèle(3) proposés avec la réalité. Notamment, quant aux hypothèses de la simulation, on peut remarquer qu'en pratique les aiguilles sont

- toutes bien verticales, car les morceaux de liège les empêchent de s'incliner
- dans le même plan horizontal, car les morceaux de liège sont assez minces
- assimilables à des dipôles, étant assez petites devant les distances entre elles, d'où la cohérence avec la simulation.

5 Conclusion

Cette étude générale de l'expérience de Mayer permet d'obtenir des résultats très concrets pour les distributions possibles. Par exemple, il en découle que le nombre maximal d'aiguilles sur la 5-ème couche d'une distribution à 4 aiguilles au centre est 28; que les nombres d'aiguilles sur deux couches successives ne diffèrent pas de plus de 6; que le nombre minimal d'aiguilles nécessaires à l'intérieur d'une couche pour qu'elle en ait 38 est $32 + 26 + 20 + 14 + 8 + 2 = 102$ et que cette relation est en $\Theta(N^2)$; que lorsque le nombre de couches enveloppes devient grand devant celui de celles obtenues par \mathfrak{H} , les couches externes ressemblent à des cercles concentriques et d'autres corollaires intéressants – tous des résultats *a priori* non-triviaux.

Ces résultats pourraient être comparés à ceux issus d'autres modèles comme celui de J.J.Thomson, qui prit des cercles concentriques équilibrés, ou d'autres propositions naturelles comme des polygones homothétiques, des translations de leurs côtés d'une certaine distance perpendiculairement à eux, etc., que j'ai pu essayer, mais qui collaient moins bien à la réalité. Cependant, d'autres questions, auxquelles je n'ai pas répondu, peuvent se poser : combien de couches suivent \mathfrak{H} – est-ce asymptotiquement presque toutes, presque aucune, ou y a-t-il un compromis et quelle serait sa signification; pourquoi retrouve-t-on directement les enveloppes et non pas un passage «continu» entre elles et le réseau; comment quantifier les effets aux bords.

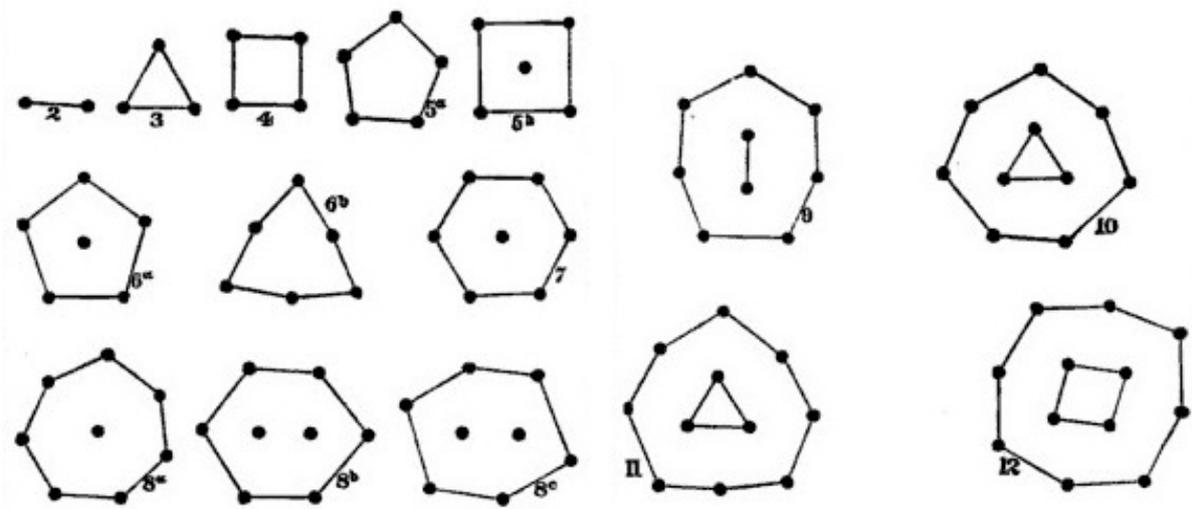
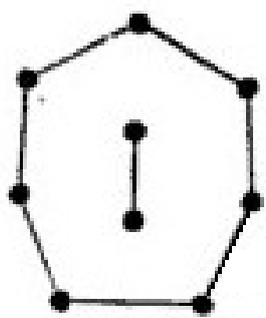
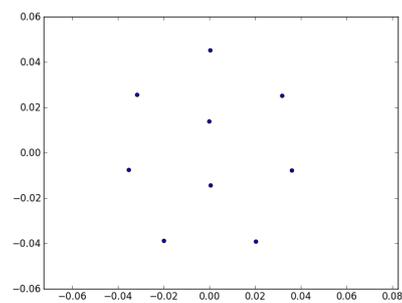


FIGURE 1 – Mayer



(a) Mayer



(b) Simulation



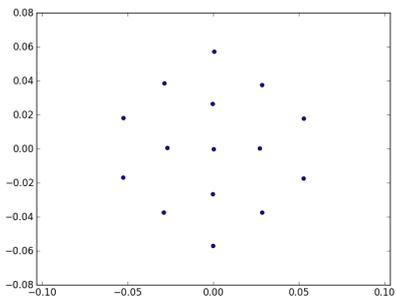
(c) Expérience

FIGURE 2 – 2-7

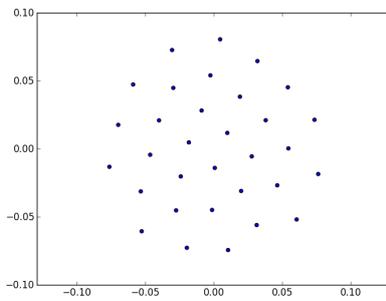
total	couche		
	n° 1	n° 2	n° 3
1			1
2			2
3			3
4			4
5			5
		1	4
6			6
		1	5
7		1	6
		1	7
8		2	6
		2	7
9		3	6
		2	8
10		3	7
		3	8
11		4	7

total	couche		
	n° 1	n° 2	n° 3
		3	9
12		4	8
		4	9
13	1	4	8
		4	10
14		5	9
		5	10
		6	9
15	1	4	10
	1	5	9
	1	6	8
		5	11
		6	10
16	1	5	10
	1	6	9
17	1	5	11
	1	6	10

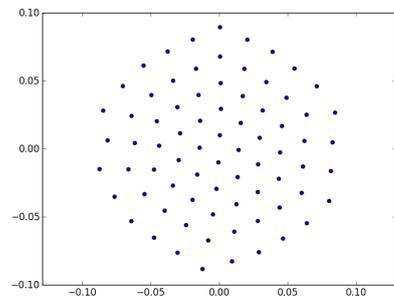
TABLE 1 – Distributions, au plus 17 points



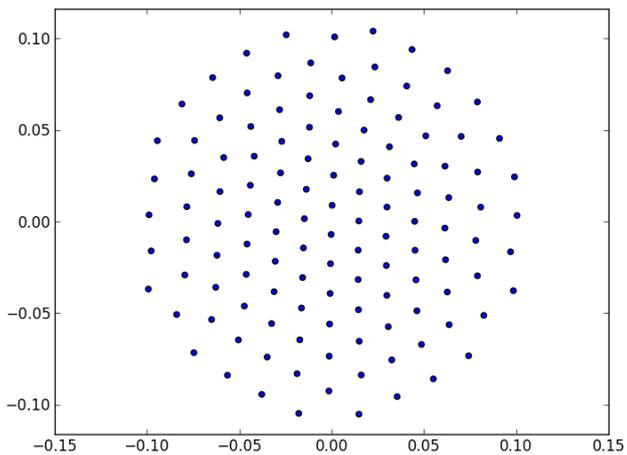
(a) 1-4-10



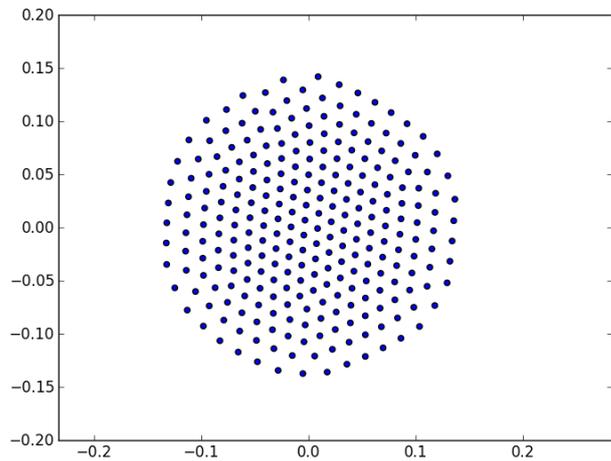
(b) 6-12-14



(c) 4-10-16-21-25

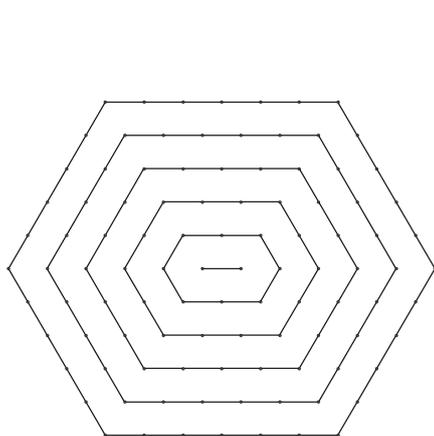


(d) 2-8-14-20-24-26-29

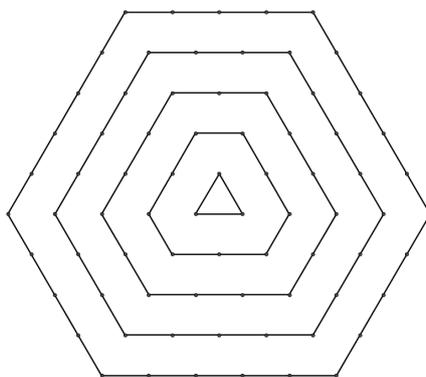


(e) 2-8-14-20-26-32-38-42-43-43

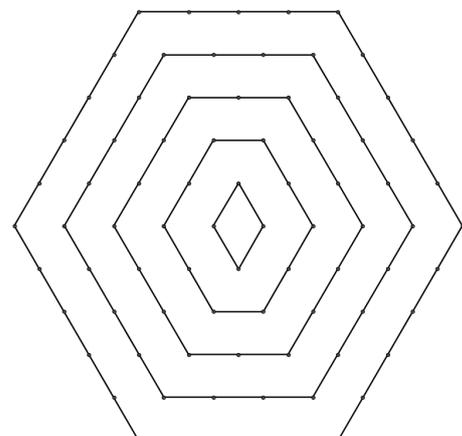
FIGURE 3 – Images simulation



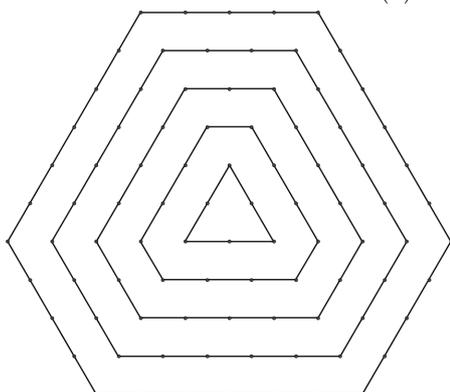
(a) 2-8-14-20-...



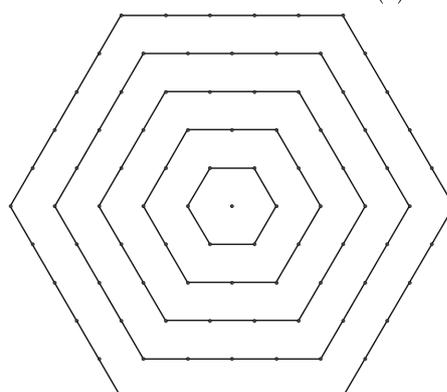
(b) 3-9-15-21-...



(c) 4-10-16-22-...



(d) 6-12-18-24-...



(e) 1-6-12-18-24-...

FIGURE 4 – Réseau hexagonal

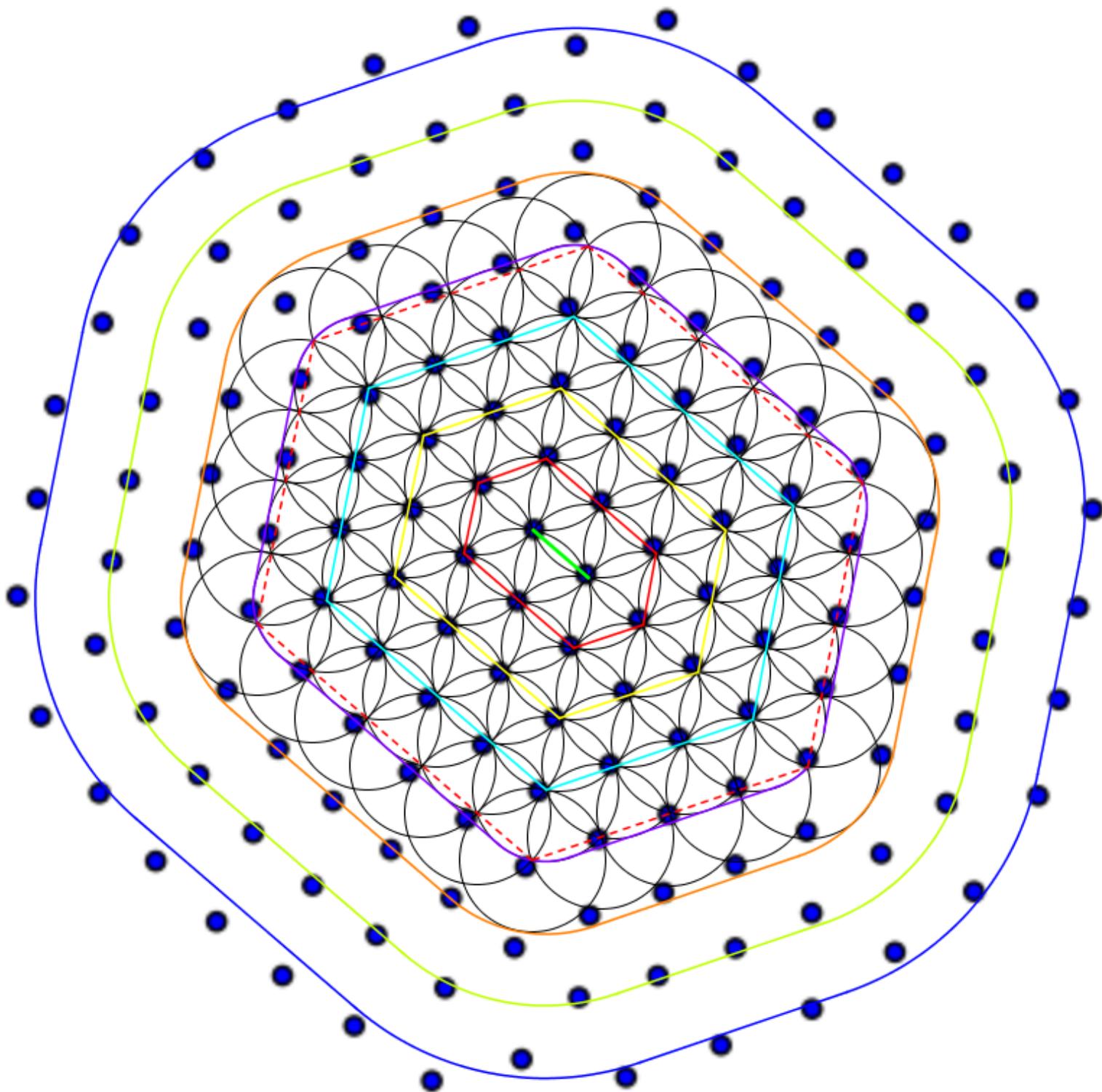
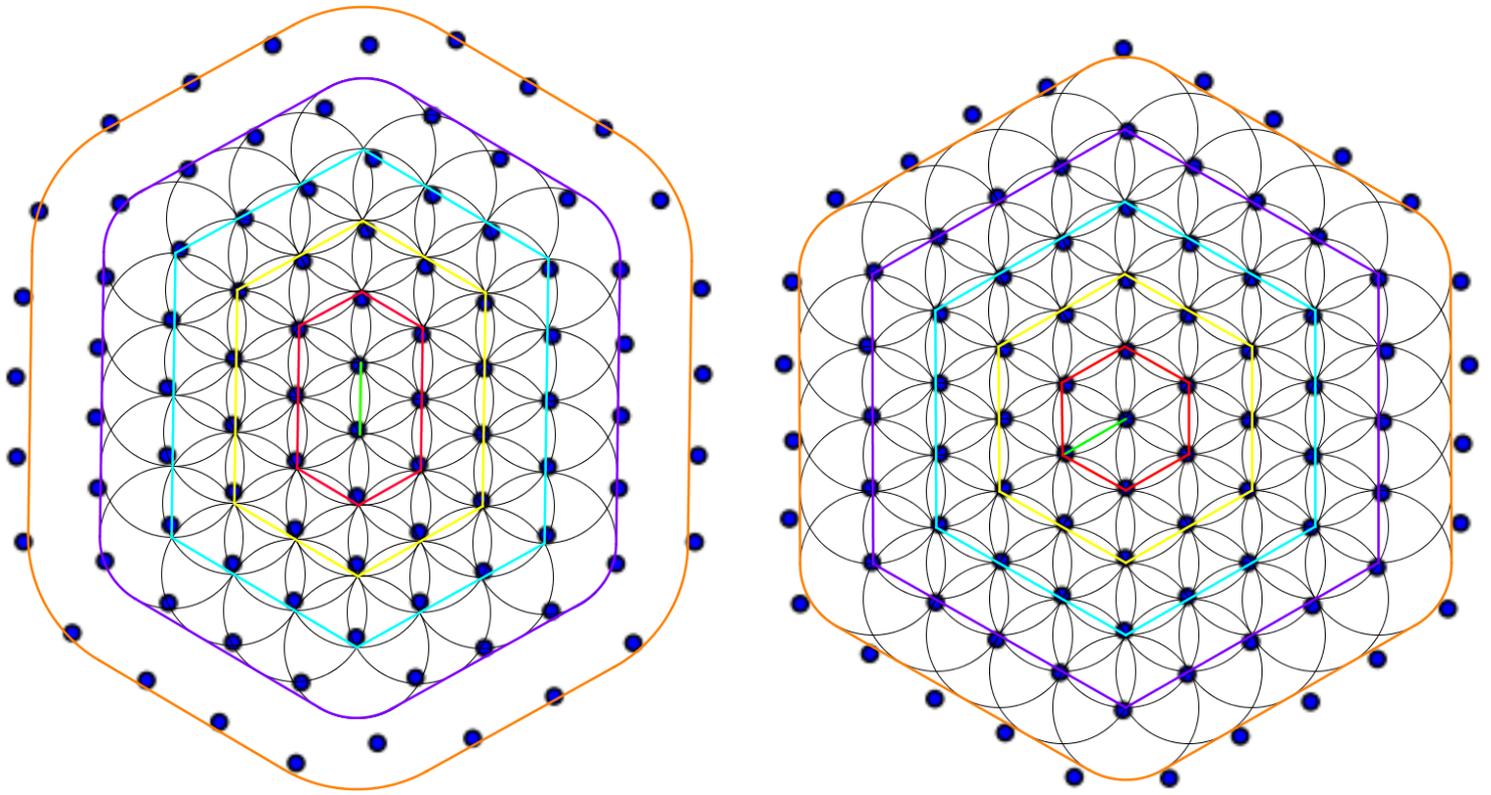


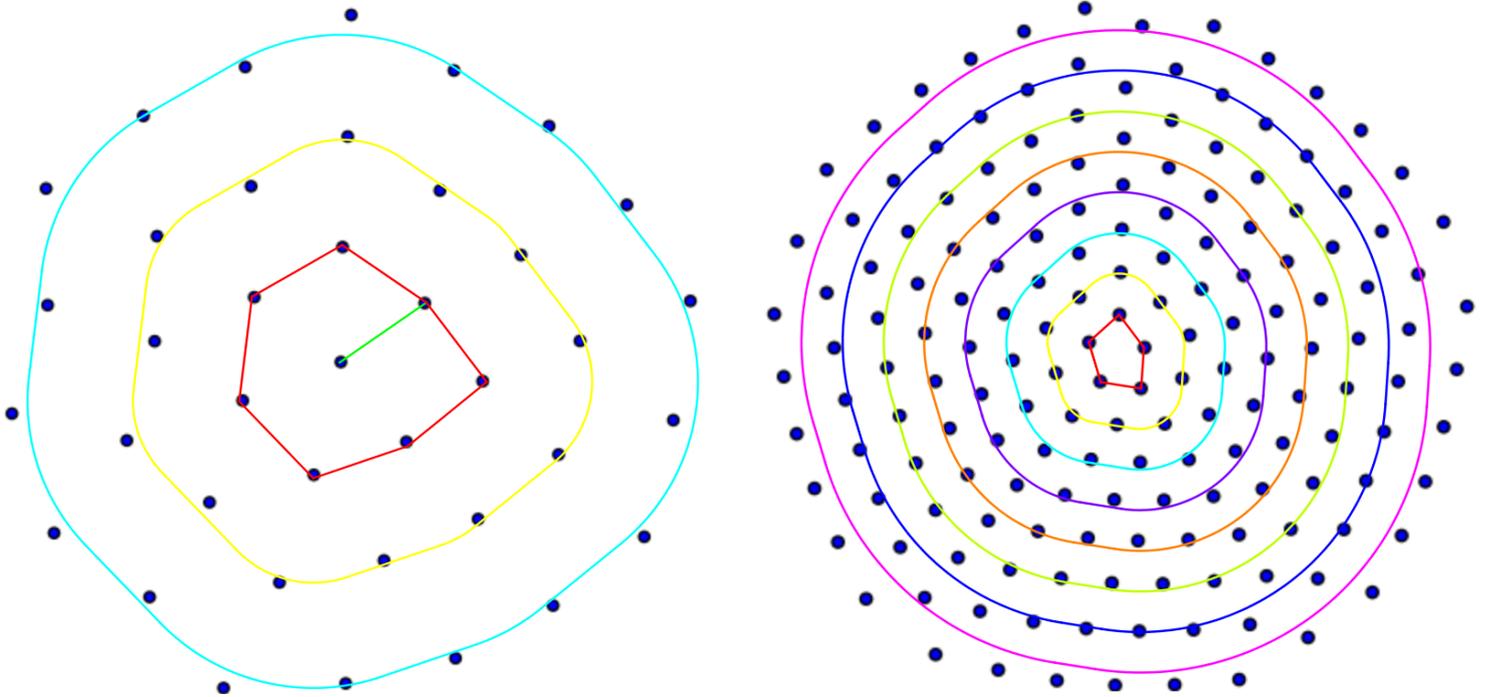
FIGURE 5 – Simulation et modèle (2-8-14-20-25-29-32-34)

total	couche n° 1	couche n° 2	couche n° 3
19	1	6	12
24	2	8	14
27	3	9	15
30	4	10	16
32	5	11	16

TABLE 2 – Distributions, plus de 17 points

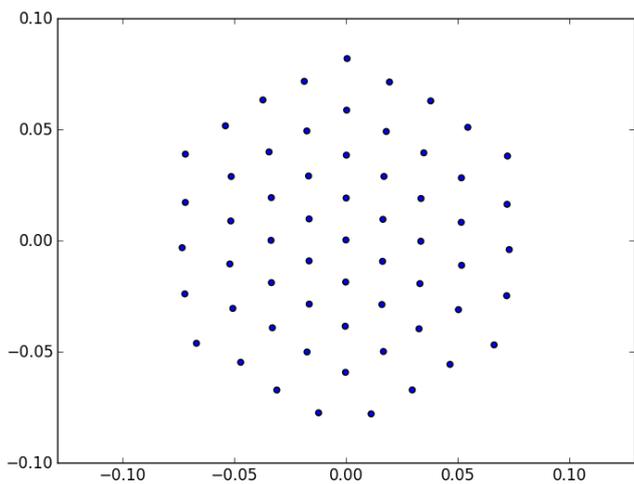


(a) Réseau hexagonal

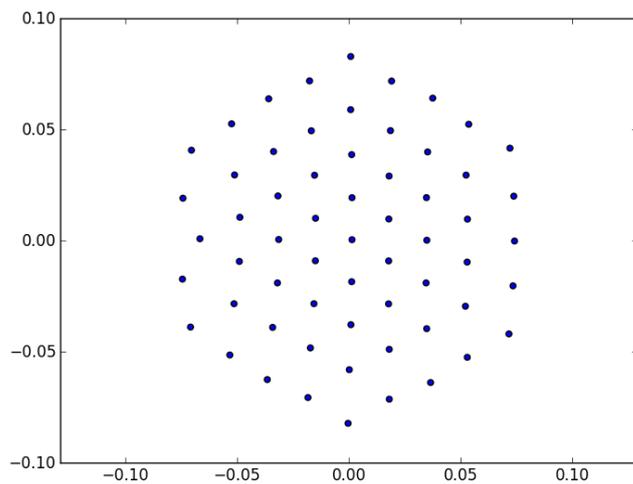


(b) Enveloppes

FIGURE 6 – Modèle



(a) 1-6-12-18-23



(b) 1-6-12-18-24

FIGURE 7 – Comparaison

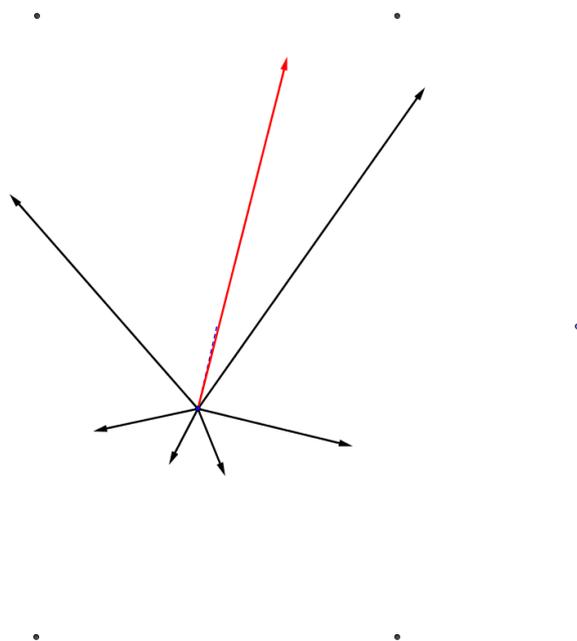


FIGURE 8 – Stabilité de \mathfrak{H}



FIGURE 9 – Couche externe

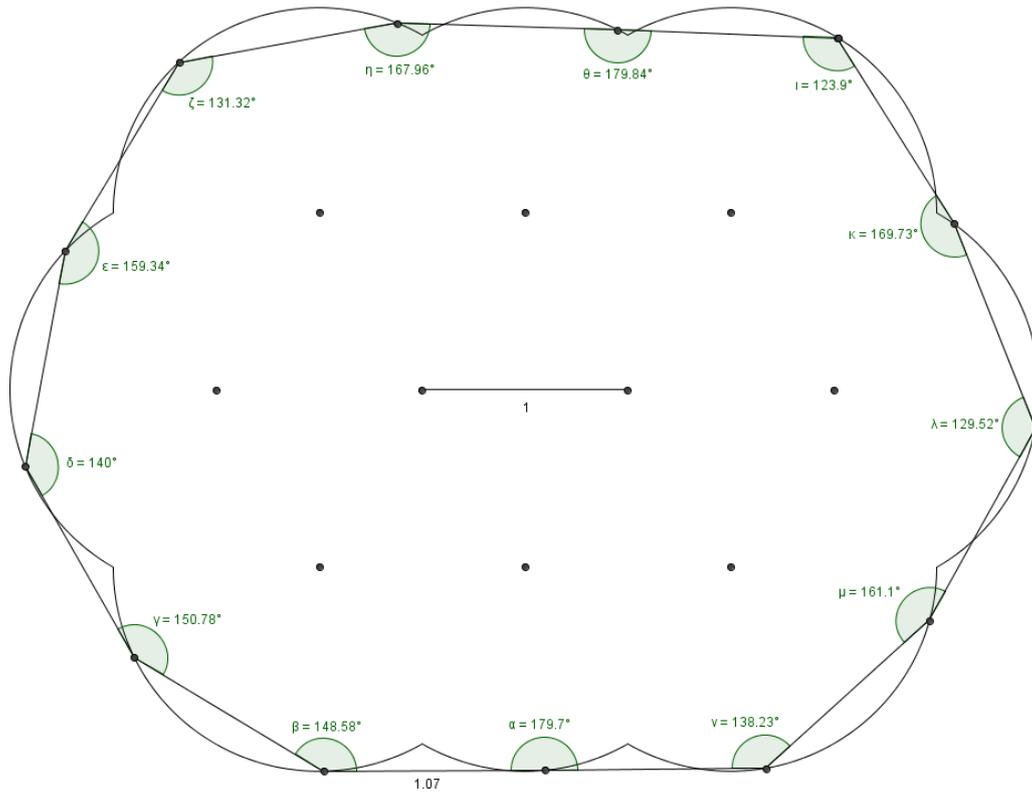


FIGURE 10 – Cas anormal

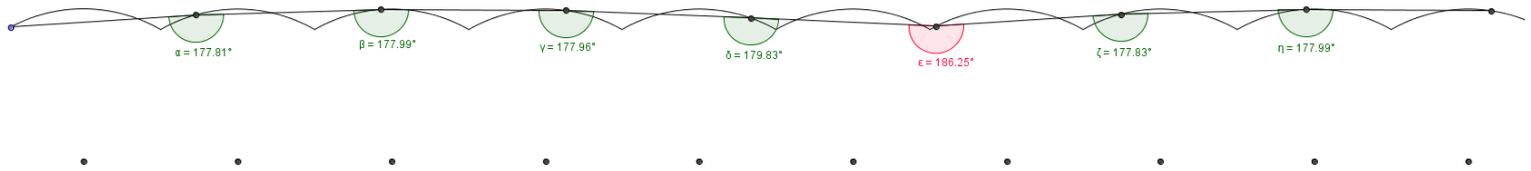
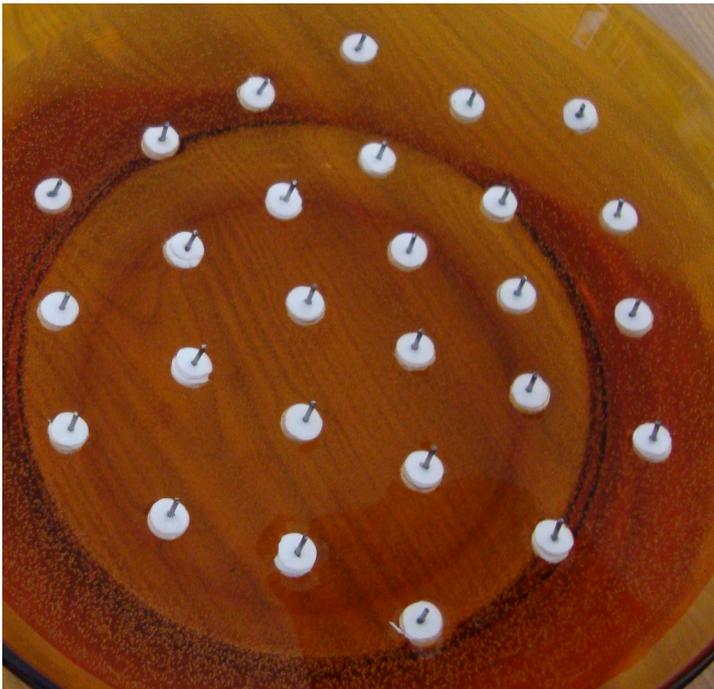
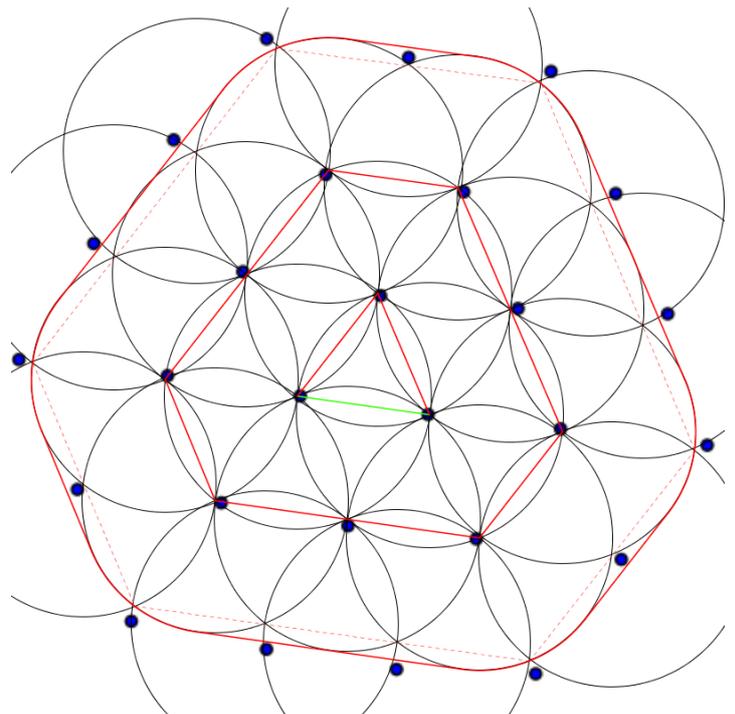


FIGURE 11 – Justification enveloppes



(a) Expérience



(b) Simlutaion et Modèle

FIGURE 12 – 3-9-15

Références

- [1] Aref, H. ; Newton, P.K. ; Stremler, M.A. ; Tokieda, T. ; Vainchtein, D.L. (2002) Vortex crystals — *Advances in Applied Mathematics* **39** (October)
- [2] Campbell, L.J. ; Ziff, Robert (1978) *A catalog of two-dimensional vortex patterns* (October 22)
- [3] Hai-Chau, Chang ; Lih-Chung, Wang (2010) *A Simple Proof of Thue's Theorem on Circle Packing* (September 22)
- [4] Mayer, Alfred G. ; Woodward, Robert S. (1916) *Biographical Memoir of Alfred Marshall Mayer 1836-1897* (January)
- [5] Mayer, Alfred M. (1878) *A Note on Experiments with Floating Magnets ; Showing the Motions and Arrangements in a Plane of Freely Moving Bodies, Acted on by Forces of Attraction and Repulsion ; and Serving in the Study of the Directions and Motions of the Lines of Magnetic Force* American Journal of Science, 3 ser., 15 : 276-277
- [6] Mayer, Alfred M. (1878) *Experiments with Floating and Suspended Magnets, Illustrating the Action of Atomic Forces, the Molecular Structure of Matter, Allotropy, Isomerism, and the Kinetic Theory of Gases* Scientific American, supplement 5 [N° 129] (June 22) : 2045-2047
- [7] Mayer, Alfred M. (1878) *On the Morphological Laws of the Configurations Formed by Magnets Floating Vertically and Subjected to the Attraction of a Superposed Magnet ; with Notes on Some of the Phenomena in Molecular Structure Which These Experiments May Serve to Explain and Illustrate* American Journal of Science, 16 : 247-256
- [8] Thomson, Joseph J. (1897) *Cathode Rays* Philosophical Magazine, 44, 293
- [9] Thomson, Joseph J. (1904) *On the Structure of the Atom : an Investigation of the Stability and Periods of Oscillation of a number of Corpuscles arranged at equal intervals around the Circumference of a circle ; with application of the results to the Theory of Atomic Structure* Philosophical Magazine, Series 6, Vol. 7, N° 39. March, 237-265
- [10] [Hmolpedia](http://www.eoht.info/page/Floating+magnets+experiment) ([http ://www.eoht.info/page/Floating+magnets+experiment](http://www.eoht.info/page/Floating+magnets+experiment))