Mathématique
L2 Sciences & Culture

Élie Gouzien [‡]

Université Nice Sophia Antipolis

16 janvier 2019 – 27 février 2019

[†]Cours initialement conçu par Estelle Blanquet.

[‡]elie.gouzien@unice.fr

Table des matières

Première partie

Arithmétique

1 Les Puissances

1.1 *Définition des puissances*

DÉFINITION. Si $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, on peut définir la puissance n**-ième** de a comme le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

On dit que a est la **base** et que n est l'**exposant**. On parle également de **notation exponentielle**.

1.2 *Propriétés des puissances*

— Même base, mais l'exposant est différent :

- $a^m \times a^n = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n+m \text{ fois}} = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m \text{ fois}} / \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m-n \text{ fois}} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = \underbrace{(a^m \times a^m \times \cdots \times a^m)}_{n \text{ fois}} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ fois}}} = a^{n \times m}$

— Base différente, même exposant :

- $a^n \times b^n = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(b \times b \times b \times \cdots \times b)}_{n \text{ fois}} = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ fois}}}{\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ fois}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Attention ! Une puissance est définie grâce à un produit. Il y a au moins 2 facteurs, $n \geq 2$.

- $a^1 \;= ? \;\rightarrow a^1 \;= \dfrac{a^2}{a} = \dfrac{a \cdot a}{a} = a \rightarrow a^1 = a$
- $a^0 \;= ? \;\rightarrow a^0 \;= \dfrac{a^2}{a^2} = \dfrac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1 \rightarrow a^0 = 1$
- $a^{-n} = ? \;\rightarrow a^{-n} = \dfrac{a^0}{a^n} = \dfrac{1}{a^n} \qquad \rightarrow a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\; n \in \mathbb{Z}$
- $0^0 \;= ? \;\rightarrow 0^0 \;= \dfrac{0^n}{0^n} = \dfrac{0}{0} \qquad \rightarrow$ forme indéterminée !

1.3 *Les identités remarquables*

Pour accélérer les calculs, simplifier des écritures, factoriser et développer certaines expressions c'est bien de se rappeler les identités suivantes :

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

  Avec un nombre quelconque de termes : il faut sommer au carré de chaque terme le double produit de chaque paire possible de termes.

  $$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

REMARQUE. On verra plus loin la formule du binôme de Newton qui généralise cela pour une puissance quelconque.

2 Les racines

2.1 *Définition des racines*

DÉFINITION. On dit **racine n-ième** de a le nombre b tel que

$$b^n = a$$

et on la note $b = \sqrt[n]{a}$.

Les racines peuvent être exprimées grâce à une notation dérivée des propriétés des puissances :

$$b^n = a \leftrightarrow b = (b^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$$

Attention !

— Si n est pair on doit forcément avoir $a \geq 0$, et on a alors $b \geq 0$.
  Par exemple : si $n = 2$, il n'existe pas de $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 \leq 0$!

— Si n est impair $b \in \mathbb{R}$.

2.2 *Propriétés des racines*

Vu que les racines sont des puissances dont l'exposant $\in \mathbb{Q}$, on peut obtenir les propriétés des racines à partir de celles des puissances !

- $a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/m \cdot 1/n} = a^{1/m.n} = \sqrt[m.n]{a}$
- $\sqrt[pn]{a^{pm}} = a^{pm/pn} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \to \sqrt[n]{a^n} = a$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}$

2.3 *Rationalisation d'une fraction*

Opération qui consiste à éliminer les racines des dénominateurs :

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b}{a^{m/n}} = \frac{b \cdot a^{n-m/n}}{a^{m/n} \cdot a^{n-m/n}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

EXEMPLE.

$$\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{b}{a^{2/3}} \cdot \frac{a^{1/3}}{a^{1/3}} = \frac{b\sqrt[3]{a}}{a}$$

3 Les Logarithmes

3.1 *Définition des logarithmes*

DÉFINITION. Le **logarithme en base** a d'un nombre réel positif b est le nombre c tel que $a^c = b$, c'est-à-dire que c est la puissance à laquelle il faut élever la base a pour obtenir le nombre b :

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

3.2 *Propriétés des logarithmes*

- $\log_a b = c\,;\ a^c = b \implies b = a^c = a^{\log_a b}$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

  Démonstration. Par définition $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ et $xy = a^{\log_a xy}$.

  $$\begin{cases} xy = a^{\log_a xy} \\ xy = a^{\log_a x} \times a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y} \end{cases}$$
  $$\implies a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

  □

- $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

  Démonstration. Par définition $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ et $x/y = a^{\log_a x/y}$.

  $$\begin{cases} x/y = a^{\log_a x/y} \\ x/y = a^{\log_a x} / a^{\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y} \end{cases}$$
  $$\implies a^{\log_a x/y} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

  □

- $\log_a x^n = n \log_a x$

  Démonstration. Par définition $x = a^{\log_a x}$ et $x^n = a^{\log_a x^n}$.

  $$\begin{cases} x^n = a^{\log_a x^n} \\ x^n = \left(a^{\log_a x}\right)^n = a^{n \log_a x} \end{cases}$$
  $$\implies a^{\log_a x^n} = a^{n \log_a x}$$

  □

4 La notation scientifique

DÉFINITION. La **notation scientifique** est une représentation d'un nombre décimal qui est exprimé sous la forme

$$a \times 10^n$$

où a est un nombre décimal qui appartient à l'intervalle $[1, 10[$.

Cette représentation utilise les puissances de 10 et l'exposant avec lequel 10 apparaît (n) est un entier relatif $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$. Le décimal a doit avoir un seul chiffre non nul à gauche de la virgule qui sera suivi d'un nombre variable de chiffres décimales qui dépend du nombre de **chiffres significatifs**.

Le grand avantage de cette notation vient du fait qu'on peut connaître de façon immédiate l'**ordre de grandeur** du nombre considéré vu qu'il correspond à la valeur de l'exposant de 10. En outre, la notation scientifique nous permet d'écrire de façon rapide et claire des nombres très grands et très petits. Ces caractéristiques rendent cette notation très appropriée afin d'exprimer les grandeurs physiques. Le **Système international d'unités** a associé aux principales puissances de 10 un préfixe pour aider à exprimer plus simplement les mesures :

10^9	$\Rightarrow$	giga, G	10^{-1}	$\Rightarrow$	déci, d
10^6	$\Rightarrow$	méga, M	10^{-2}	$\Rightarrow$	centi, c
10^3	$\Rightarrow$	kilo, k	10^{-3}	$\Rightarrow$	milli, m
10^2	$\Rightarrow$	hecto, h	10^{-6}	$\Rightarrow$	micro, μ
10	$\Rightarrow$	déca, da	10^{-9}	$\Rightarrow$	nano, n

4.1 *Règles pour le calcul avec les puissances de 10*

1. Si on déplace la virgule vers la gauche, la puissance de 10 augmente d'une unité pour chaque déplacement.

   $$\Longrightarrow\ 315{,}2 = 3{,}152 \cdot 10^2$$

2. Si on déplace la virgule vers la droite, la puissance de 10 diminue d'une unité pour chaque déplacement.

   $$\Longrightarrow\ 0{,}000\,42 = 4{,}2 \cdot 10^{-4}$$

   $$\boxed{\begin{array}{c} \text{gauche} \leftrightarrow n \nearrow \\ \text{droite} \leftrightarrow n \searrow \end{array}}$$

3. Pour sommer ou soustraire des nombres en notation scientifique, il faut que leurs exposants soient les mêmes ($\Longrightarrow$ même ordre de grandeur).

   $$\Longrightarrow\ 3{,}5 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^2 = (3{,}5 + 0{,}12) \cdot 10^3 = 3{,}62 \cdot 10^3$$

4. Pour multiplier, diviser ou élever à une puissance des nombres en notation scientifique, il faut utiliser les propriétés des puissances.

$$(2 \cdot 10^2)^2 (5 \cdot 10^3) = 2 \cdot 10^8$$

5 Les fractions

DÉFINITION. Une **fraction** est un objet mathématique qui représente une division non calculée entre deux nombres $n,\ d \in \mathbb{Z}$ où $d \neq 0$. Elle s'écrit comme :

$$n/d \in \mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d} | n \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{Z}^\star \right\}$$

Le nombre en haut s'appelle **numérateur**, celui en bas s'appelle **dénominateur**. Ces deux nombres sont séparés par la **barre de fraction**.

Une image de ce que représente une fraction s'obtient en considérant un gâteau : si on le coupe en d parts et qu'on en mange n, on aura mangé $\frac{n}{d}$ du gâteau.

5.1 *Définitions*

Fraction propre : fraction pour laquelle $n < d \implies n/d < 1$

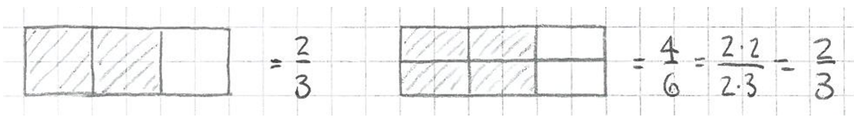
Fraction impropre : fraction pour laquelle $n > d \implies n/d > 1$

Fraction apparente : fraction pour laquelle $n = kd \implies n/d = kd/d = k \in \mathbb{Z}$

Fraction irréductible : fraction pour laquelle n et d sont premiers entre eux

Fractions équivalentes : fractions telles que le numérateur et le dénominateur de l'une sont des multiples (avec le même coefficient) du numérateur et du dénominateur de l'autre fraction

$$m = kn,\ e = kd \implies m/e = kn/kd = n/d$$



5.2 *Comparaison entre fractions*

— Si les deux fractions ont le même numérateur, plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande.

— Si les deux fractions ont le même dénominateur, plus le numérateur est grand, plus la fraction est grande.

— Si les numérateurs et les dénominateurs des deux fractions, sont différents il faut avant réduire les fractions au même dénominateur et ensuite les comparer grâce au deuxième critère.

5.3 *Calculs avec des fractions*

Addition et soustraction : pour pouvoir sommer ou soustraire des fractions il faut que les fractions aient le même dénominateur

Multiplication : pour multiplier des fractions il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux

Division : pour diviser des fractions on utilise les puissances négatives

Puissances : pour élever à la puissance des fractions on utilise simplement les propriétés des puissances

5.4 *Transformation d'une fraction en nombre décimal*

Il est toujours possible d'écrire le développement décimal d'une fraction, il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur. On obtient trois types de développements décimaux différents.

1. Si le dénominateur de la fraction équivalente irréductible possède comme facteurs que des 2 et des 5 on aura un **décimal fini**.

$$1/5 = 0,2 \qquad 5/20 = 1/4 = 0,25 \qquad 6/15 = (3 \times 2)\ /\ (3 \times 5) = 2/5 = 0,4$$

2. Si le dénominateur de la fraction équivalente irréductible possède comme facteurs que des nombres différents de 2 et de 5 on aura un **périodique simple** : les chiffres après la virgule se répètent infiniment ; la période commence immédiatement après la virgule.

$$7/3 \approx 2,3333\ldots \qquad 1/7 \approx 0.142857142857142857\ldots$$

3. Si le dénominateur de la fraction équivalente irréductible possède comme facteurs 2 et 5 et d'autres nombres on aura un **périodique mixte** : les premiers chiffres après la virgule sont non périodiques, puis une période se répète infiniment.

$$1/35 \approx 0.02857142857142857\ldots$$

5.5 *Transformation d'un décimal en fraction*

On considère deux cas : celui des nombres décimaux finis et celui des nombres ayant un développement décimal périodique :

1. Si l'écriture décimale considéré est fini, la fraction qui lui correspond aura comme numérateur l'entier décimal qu'on obtient en éliminant la virgule et comme dénominateur une puissance 10^n avec n égal au nombre de chiffres décimaux.

$$12,\underbrace{304}_{\text{3 chiffres}} = \frac{12304}{10^3} = \frac{12304}{1000}$$

2. Si l'écriture décimale est périodique, la fraction qui lui correspond aura comme numérateur la différence entre la partie entière du nombre et le nombre composé par les chiffres décimaux qui précédent la partie périodique. Le dénominateur, par contre, sera donné par autant de 9 que les chiffres de la partie décimale périodique suivis par autant de 0

que des chiffres de la partie décimale non périodique.

$$\underbrace{12,\overline{304}}_{3 \text{ chiffres périodiques}} = \frac{12304 - 12}{999}$$

$$\underbrace{12,3\overline{04}}_{1 \text{ non périodique, } 2 \text{ périodiques}} = \frac{12304 - 123}{990}$$

$$\underbrace{12,30\overline{4}}_{2 \text{ non périodique, } 1 \text{ périodique}} = \frac{12304 - 1230}{900}$$

5.6 *Division euclidienne*

DÉFINITION. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^\star$. Effectuer la division euclidienne de a par b consiste à trouver $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$a = b \times q + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

q est alors appelé le **quotient** tandis que r est le **reste**.

PROPRIÉTÉ. *Quels que soient a et b, q et r existent et sont uniques.*

Pour effectuer une division euclidienne, on pose la division.

5.7 *Divisibilité*

DÉFINITION. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^\star$. a est divisible par b s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b \times q$.

REMARQUE. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- a est divisible par b
- le reste de la division euclidienne de a par b est 0

EXEMPLE.

— 1 divise tous les nombres.

— Tout nombre non nul se divise lui-même.

— 0 est divisible par tous les nombres.

Critères de divisibilité

PAR 2 : Un nombre est divisible par deux si et seulement si son **dernier** chiffre est pair.

PAR 3 : Un nombre est divisible par trois si et seulement si la **somme** de ses chiffres est divisible par trois.

PAR 5 : Un nombre est divisible par cinq si et seulement si son **dernier** chiffre est 0 ou 5.

PAR 9 : Un nombre est divisible par neuf si et seulement si la **somme** de ses chiffres est divisible par neuf.

Par 11 : Un nombre est divisible par onze si et seulement si la somme de ses chiffres de positions paires moins celle de ses chiffres de positions impaires est divisible par onze.

6 Les proportions

6.1 *Définition de la proportionnalité*

DÉFINITION. Avec le terme **proportion** on désigne l'égalité entre deux rapports

$$a/b = c/d$$

On lit comme « a est à b comme c est à d ». On appelle **extrêmes** a et d et **moyens** b et c.

6.2 *Propriétés des proportions*

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE : le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

$$ad = bc$$

PERMUTATION : si on échange entre eux les extrêmes ou les moyens on a encore une proportion.

$$b/a = d/c$$

Attention ! Si l'un des nombres est nul, ça n'est pas possible.

COMPOSITION : la somme des deux premiers termes est au premier (ou au deuxième) comme la somme du 3e et du 4e est au 3e (ou au 4e).

$$(a+b)/a = (c+d)/c \qquad (a+b)/b = (c+d)/d$$

DÉCOMPOSITION : la différence des deux premiers termes est au premier (ou au 2e) comme la différence entre le 3e et le 4e est au 3e (ou au 4e).

$$(a-b)/a = (c-d)/c \qquad (a-b)/b = (c-d)/d$$

6.3 *Proportionnalité directe et indirecte*

— Deux grandeurs sont **directement proportionnelles** si l'une d'elle devenant un certain de fois plus grande (ou plus petite), l'autre devient le même nombre de fois plus grande (ou plus petite) : si $a \to na$, alors $b \to nb$. Donc, deux grandeurs sont directement proportionnelles si leur rapport est constant :

$$A \propto B \quad \text{si} \quad A/B = K$$

— Deux grandeurs sont **inversement proportionnelles** si l'une d'elle devenant un certain de fois plus grande (ou plus petite), l'autre devient le même nombre de fois plus petite (ou plus grande) : si $a \to na$ alors $b \to b/n$. Donc, deux grandeurs sont inversement proportionnelles si leur produit est constant :

$$A \propto 1/B \quad \text{si} \quad AB = K$$

6.4 *Le pourcentage*

Le **pourcentage** est une façon d'exprimer un nombre sous forme d'une fraction avec 100 au dénominateur. Il est utilisé pour représenter une proportion ou une fraction d'un ensemble. Le pourcentage n'est qu'une des représentations numériques du rapport entre deux quantités a et b où une des deux (a) est exprimée en centièmes de l'autre b. Du point de vue pratique on le calcule en multipliant par 100 le rapport entre a et b :

$$a/b \times 100 = n \implies \frac{a}{b} = \frac{n}{100}$$

7 Les équations

Une **équation** est une égalité qui contient une ou plusieurs variables et qui est, en effet, la traduction sous forme mathématique d'un problème. **Résoudre** une équation consiste à déterminer les valeurs de ces variables, que l'on appelle **inconnues**, pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

7.1 *Définitions*

Équation entière : l'inconnue apparaît seulement dans le numérateur

Équation fractionnaire : l'inconnue apparaît au dénominateur aussi

Équation numérique : on a que des nombres et des variables

Équation paramétrée : on a des nombres, les variables et des paramètres, selon la valeur de ces paramètres l'équation a des solutions différentes

7.2 *Principes d'équivalence*

1. Si j'ai une égalité je peux sommer ou soustraire la même quantité de deux membres et j'aurai encore une égalité.
2. Si j'ai une égalité je peux multiplier ou diviser les deux membres par la même quantité et j'aurai encore une égalité.

Attention !

$$2(ax-1)=b \implies 2ax-2=b \implies x=b+2/2a$$

la solution dépend des paramètres a et b, mais n'est possible que pour $a \neq 0$! Si $a=0$ alors $2.0.x=b+2$.

Cas $b=-2$: l'équation devient $0.x=0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, x est solution (infinité de solutions).

Cas $b \neq -2$: l'équation devient $0.x=b+2 \neq 0$: impossible, il n'y a aucune solution.

7.3 *Équation du second degré*

On dit **degré** d'une équation la plus grande puissance avec laquelle l'inconnue apparaît. La forme générale d'une équation du second degré est :

$$ax^2+bx+c=0$$

A priori on sait résoudre une telle équation seulement dans le cas d'une identité remarquable $(x+k)^2=0 \to x=-k$. Dans le cas où l'équation du second degré n'est pas un réel on peut quand même s'y reconduire pour la résoudre. Prenons la forme générale et

1. Multiplions par $4a$: $4a^2x^2+4abx+4ac=0$

2. Sommons b^2 :

$$
\begin{aligned}
&4a^2x^2 + b^2 + 4abx + 4ac = b^2 \\
&4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \\
&(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac = \Delta \\
&\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{\Delta} \\
&4a^2\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Si $\Delta > 0$ on obtient deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Attention !

- $\Delta > 0 \rightarrow \exists\sqrt{\Delta} \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow$ 2 solutions différentes.
- $\Delta = 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 0 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow$ les deux solutions coïncident et il ne reste plus qu'une seule solution double.
- $\Delta < 0 \rightarrow \sqrt{\Delta}$est complexe $\rightarrow x_1, x_2 \rightarrow$ 2 solutions différentes non réelles.

7.4 *Les systèmes d'équations*

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations qui utilisent les même variables. Déterminer la solution d'un système consiste à déterminer les valeurs des variables qui vérifient **simultanément** les différentes équations.

La forme générale d'un système à 2 variables est :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Il y a plusieurs méthodes de résolutions.

Réduction :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (c-by)/a \\ d \times (c-by)/a + ey = f \end{cases}, \quad \text{si} \quad a \neq 0$$

Comparaison :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (c-by)/a \\ x = (f-ey)/d \end{cases} \Longrightarrow (c-by)/a = (f-ey)/d, \begin{cases} a \neq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$$

Élimination :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \implies \begin{cases} adx + bdy = cd \\ dax + eay = fa \end{cases} \implies bdy - eay = cd - fa$$

Dans tous les cas, je peux donc résoudre par rapport à y et après remplacer la valeur obtenue pour y et résoudre par rapport à x.

8 Les inéquations

8.1 *Définition*

Une **inéquation** est une inégalité entre deux expressions dans lesquelles apparaissent des inconnues. L'inégalité est exprimée grâce aux symboles $>$, $\geq$, $<$ et $\leq$. Résoudre une inéquation consiste à déterminer l'ensemble des valeurs des inconnues qui vérifient cette inégalité.

Attention !

- Équation $\Rightarrow$ la solution est donnée par des valeurs.
- Inéquation $\Rightarrow$ la solution est donnée par des intervalles.

8.2 *Règles opératoires*

1. Si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.
2. On peut sommer ou soustraire une même quantité aux deux membres et l'inégalité ne change pas.

$$a < b \quad \text{alors} \quad a + c < b + c \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

3. On peut multiplier ou diviser par une même quantité strictement positive les deux membres et l'inégalité ne change pas.

$$a < b \quad \text{alors} \quad c.a < c.b \text{ où } c \in \mathbb{R}_+^*$$

4. On peut multiplier ou diviser par une même quantité strictement négative les deux mais alors l'inégalité change.

$$a < b \quad \text{alors} \quad c.a > c.b \text{ où } c \in \mathbb{R}_-^*$$

5. On peut inverser les deux membres mais l'inégalité change.

$$\begin{array}{lll} 0 < a < b & \text{alors} & 1/a > 1/b \\ a < b < 0 & \text{alors} & 1/a > 1/b \\ a < 0 < b & \text{alors} & 1/a < 1/b \end{array}$$

6. Pour les expressions (algébriques) factorisées on utilise un **tableau de signes**.

8.3 *Le tableau de signes*

a	b	$a \times b$, a/b
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

REMARQUE. Un facteur élevé à une puissance paire sera toujours positif ou nul.

$$a^2 \geq 0 \quad \text{si} \quad a \geq 0 \text{ et si } a \leq 0$$

8.4 *Système d'inéquations*

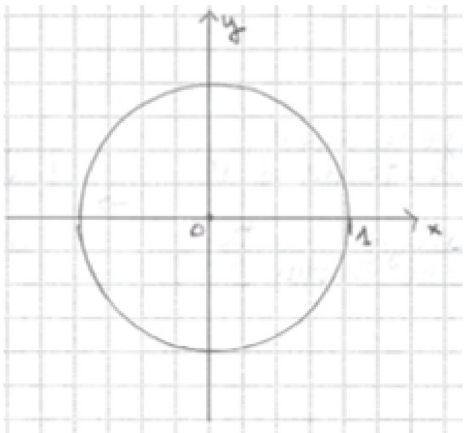
Un système d'**inéquations** est un ensemble de plusieurs inéquations qui utilisent les mêmes inconnues. Pour le résoudre il faut déterminer les valeurs des variables qui les vérifient simultanément. L'ensemble de ces valeurs est donné par l'intersection des intervalles qui vérifient séparément les différentes inéquations du système. La solution est un intervalle.

Deuxième partie
Trigonométrie

9 Généralités

La **trigonométrie** (du grec : *τρίγωνος* et *μέτρον*, triangulaire et mesure) est la branche de la mathématique qui étudie les relations parmi les angles et les distances pour les triangles.

On dit **cercle trigonométrique** un cercle de rayon 1 centré sur l'origine d'un système d'axes cartésiens.



9.1 *Le radian*

Pour mesurer les angles on introduit une nouvelle mesure, le **radian**, dont la définition est liée à la bijection qui existe entre un arc et l'angle sous-tendu à cet arc (arc $\leftrightarrow$ angle). On dit qu'un angle mesure 1 **radian** s'il intercepte un arc qui a la même longueur que le rayon r.

$$\frac{\text{arc}}{\text{rayon}} = \frac{r}{r} = 1$$

Pour un angle quelconque, en notant l la longueur de l'arc intercepté, on définit la mesure de l'angle en radian ρ comme étant :

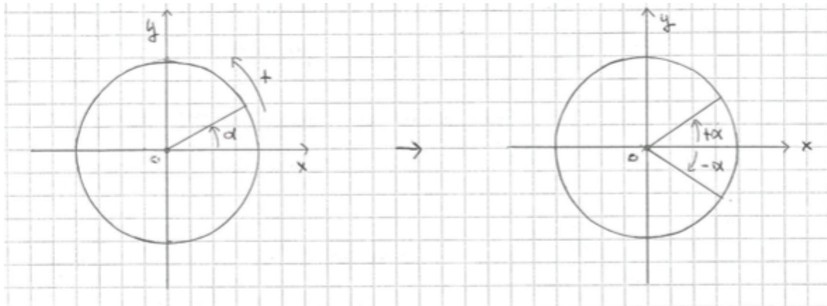
$$\rho = \frac{l}{r}$$

On peut alors établir un lien entre la mesure de l'angle en radian ρ et la mesure en degrés d. La longueur l de l'arc intercepté est proportionnelle à d :

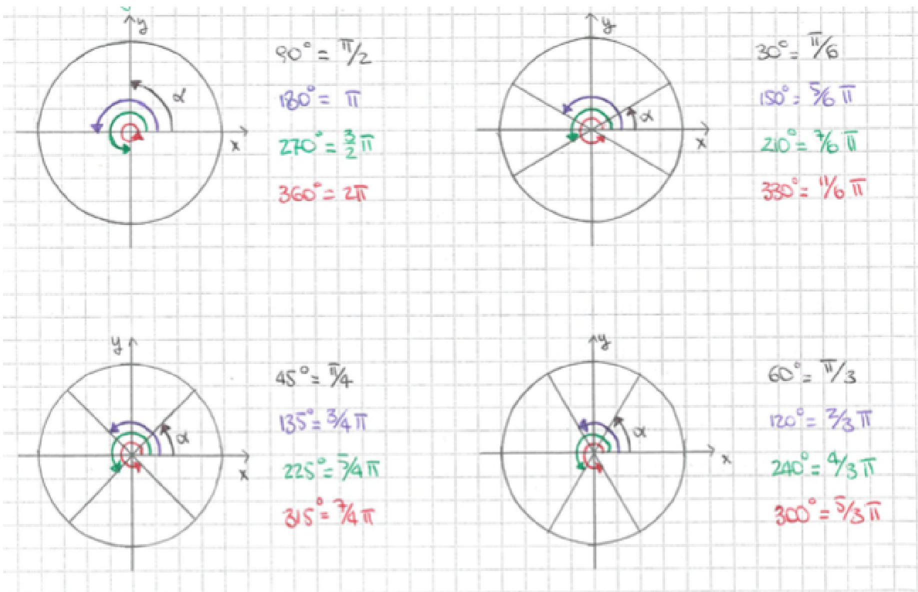
$$\frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{l}{d} \implies l = \frac{2\pi r}{360^\circ} d \implies \rho = \frac{l}{r} = \frac{1}{r}\frac{2\pi r}{360^\circ} d = \frac{\pi}{180^\circ} d$$

Du moment que le cercle trigonométrique est placé dans un repère cartésien, pour définir une rotation de centre O, il faut choisir un sens de rotation et donc des angles et des arcs orientés.

Par convention on a :

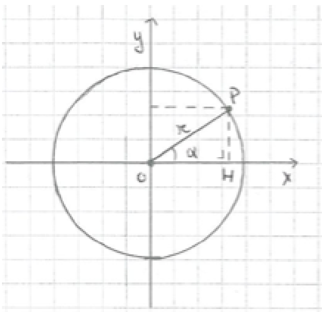


9.2 *Les angles fondamentaux*

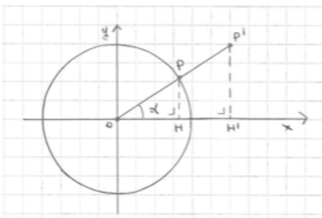


10 Les fonctions trigonométriques

10.1 *Le sinus*



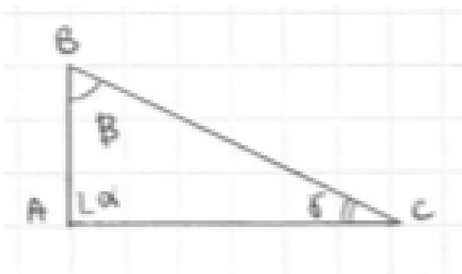
$\sin\alpha = \frac{PH}{r} = y_P$, puisque $r = 1$
$\Longrightarrow$ $\sin\alpha > 0$ dans le 1er et le 2e quadrant
$\Longrightarrow$ $\sin\alpha < 0$ dans le 3e et le 4e quadrant



OPH et OP′H′ sont semblables (ils ont 3 angles égaux)

$$\frac{PH}{OP} = \frac{P'H'}{OP'}$$
$$\frac{PH}{OP} = \frac{P'H'}{OP'} = \frac{PH}{r} = \sin\alpha$$

Pour un triangle rectangle



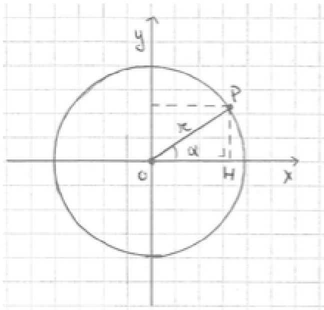
— Le sinus d'un angle est donné par le rapport entre le côté opposé et l'hypoténuse :

$$\sin\gamma = \frac{AB}{BC}, \quad \sin\beta = \frac{AC}{BC}$$

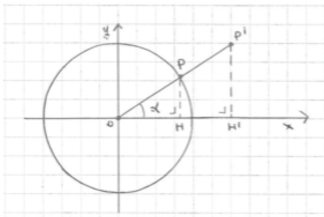
— le côté est donné par le produit entre le sinus de l'angle opposé et l'hypoténuse :

$$AB = BC \cdot \sin\gamma, \quad AC = BC \cdot \sin\beta$$

10.2 *Le cosinus*



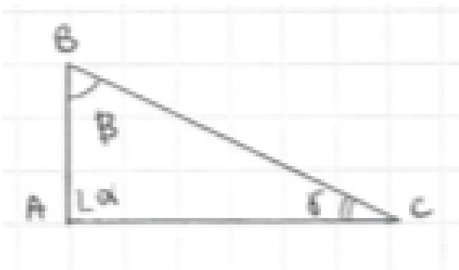
$\cos\alpha = \frac{OH}{r} = x_P$, puisque $r = 1$
$\Longrightarrow$ $\cos\alpha > 0$ dans le 1er et le 4e quadrant
$\Longrightarrow$ $\sin\alpha < 0$ dans le 2e et le 3e quadrant



OPH et OP′H′ sont semblables (ils ont 3 angles égaux)

$$\frac{OH}{OP} = \frac{OH'}{OP'}$$
$$\frac{OH}{OP} = \frac{OH'}{OP'} = \frac{OH}{r} = \cos\alpha$$

Pour un triangle rectangle



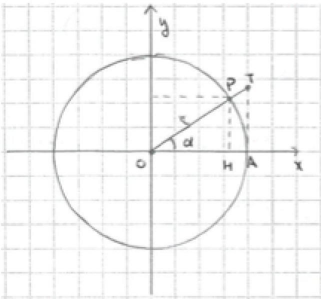
— Le cosinus d'un angle est donné par le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse :

$$\cos\gamma = \frac{AC}{BC}, \quad \cos\beta = \frac{AB}{BC}$$

— le côté adjacent est donné par le produit entre le cosinus de l'angle adjacent et l'hypoténuse :

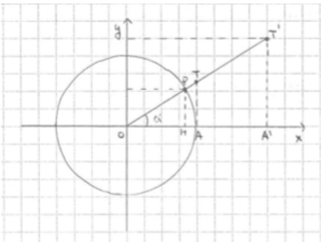
$$AB = BC \cdot \cos\beta, \quad AC = BC \cdot \cos\gamma$$

10.3 *La tangente*



$$\tan \alpha = \frac{TA}{OA} = \frac{y_T}{x_T} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

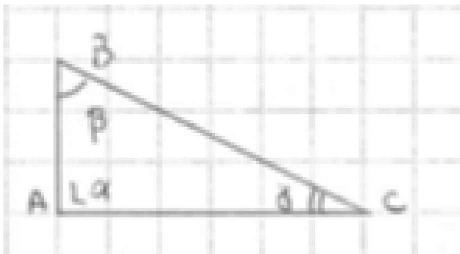
$\implies$ $\tan \alpha > 0$ dans le 1er et le 3e quadrant
$\implies$ $\tan \alpha < 0$ dans le 2e et le 4e quadrant



OPH, OTA et OT′A′ sont semblables

$$\frac{PH}{OH} = \frac{TA}{OA} = \frac{T'A'}{OA'}$$
$$\frac{PH}{OH} = \frac{PH}{OP}\frac{OP}{OH} = \sin \alpha \frac{1}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Pour un triangle rectangle

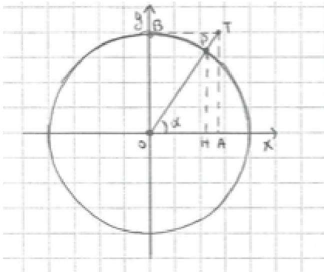


La tangente d'un angle est donnée par le rapport entre le côté opposé et celui adjacent à l'angle considéré.

$$\tan \gamma = \frac{AB}{AC}, \quad \tan \beta = \frac{AC}{AB}$$
$$\implies AB = AC \tan \gamma, \quad AC = AB \tan \beta$$
$$\implies \tan \beta = (\tan \gamma)^{-1}$$

La donnée de la tangente et de l'un des deux petits côtés permet de retrouver l'autre.

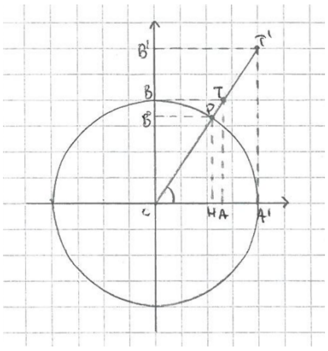
10.4 *La cotangente*



$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{BT}{OB} = \frac{OA}{TA} = \frac{y_T}{x_T} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{cotan}\alpha > 0$ dans le 1er et le 3e quadrant

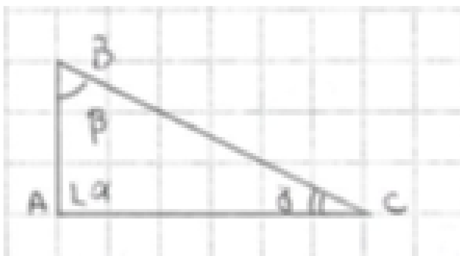
$\Longrightarrow$ $\operatorname{cotan}\alpha < 0$ dans le 2e et le 4e quadrant



OPH, OTA et $OT'A'$ sont semblables

$$\frac{OH}{PH} = \frac{OA}{TA} = \frac{OA'}{T'A'}$$
$$\frac{OH}{PH} = \frac{OH}{OP}\frac{OP}{PH} = \cos\alpha\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cotan}\alpha$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^{-1} = (\operatorname{cotan}\alpha)^{-1}$$

Dans un triangle rectangle

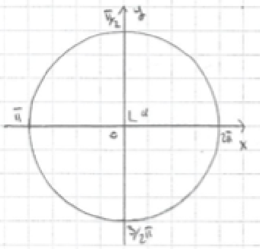


La cotangente d'un angle est donnée par le rapport entre le côté adjacent et celui opposé à l'angle considéré

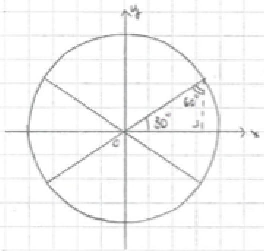
$$\operatorname{cotan}\beta = \frac{AB}{AC}, \quad \operatorname{cotan}\gamma = \frac{AC}{AB}$$
$$\Longrightarrow AB = AC\operatorname{cotan}\beta, \quad AC = AB\operatorname{cotan}\gamma$$
$$\Longrightarrow \operatorname{cotan}\gamma = (\operatorname{cotan}\beta)^{-1} = \tan\beta$$

La donnée de la cotangente et de l'un des deux petits côtés permet de retrouver l'autre.

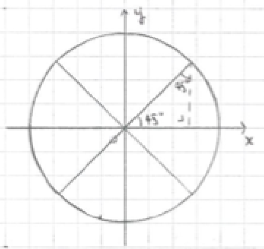
10.5 *Angles fondamentaux — sinus, cosinus, tangente et cotangente*



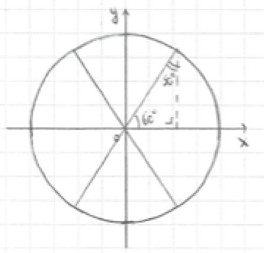
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$cotg\alpha$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
π	0	-1	0	$-\infty$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$-\infty$	0
2π	0	1	0	∞



α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$cotg\alpha$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$



α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$cotg\alpha$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1



α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$cotg\alpha$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

11 Identités trigonométriques

11.1 *Relation fondamentale de la trigonométrie*

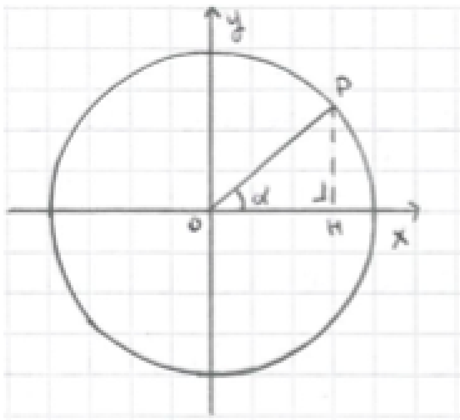
D'après le théorème de Pythagore on a :

$$
\begin{aligned}
& OP^2 = PH^2 + OH^2 \\
\implies\ & \frac{OP^2}{OP^2} = \frac{PH^2}{OP^2} + \frac{OH^2}{OP^2} \\
\implies\ & 1 = \left(\frac{PH}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OP}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha
\end{aligned}
$$

On retiendra :

Propriété (Relation fondamentale de la trigonométrie).

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$



11.2 *Formules d'addition et différence*

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta && \to \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta && \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta && \to \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta &&
\end{aligned}
$$

12 Les équations

Les équations trigonométriques ont une infinité de solutions :

Ex : $\sin x = \dfrac{1}{2} \to x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Ex : $4\cos^2 x = 3, \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \to$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour avoir un nombre fini de solutions il faut préciser les domaines dans lesquels on les cherche :

$$\sin x = \frac{1}{2},\ 0 < x \leq 2\pi \to x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}$$
$$\sin x = \frac{1}{2},\ 0 < x \leq \pi \to x = \frac{\pi}{6}$$

Troisième partie

Les Mesures

13 Le Système international d'unités

Le **Système international d'unités** [1] est le système d'unités de mesure le plus utilisé. Il s'agit d'un système décimal (ce qui signifie qu'on n'y utilise les puissances de 10).

Le système international (SI) se base sur 7 unités de base qui correspondent aux **grandeurs physiques fondamentales**. Telles grandeurs et leurs unités sont :

Longueur : mètre (m)

Masse : kilogramme (kg)

Temps : seconde (s)

Température thermodynamique (ou température absolue) : kelvin (K)

Quantité de matière : mole (mol) (Le nombre d'Avogadro $N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23}$)

Intensité de courant : ampère (A)

Intensité lumineuse : candela (cd)

Toutes les autres grandeurs, dites **grandeurs physiques dérivées**, peuvent être obtenus en multipliant ou en divisant les 7 grandeurs de base. Parfois, pour la même grandeur, on a plusieurs unités de mesure qui n'appartiennent pas au SI mais qui sont quand même acceptées parce que plus communément utilisées ou parce que plus précises.

1. `https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_8_fr.pdf`, changements prévus le 20 mai 2019

14 Les grandeurs usuelles

14.1 *Longueur*

On dit **longueur** la distance entre 2 points. Elle se mesure en mètre (m) ou en ses fractions ou multiples. Les autres unités acceptées pour les mesures de longueur sont :

— **unité astronomique** (ua) $\approx 1,496 \cdot 10^{11}$ m : distance moyenne Terre—Soleil

— **ångström** (Å) = $0,1$ nm = 10^{-10} m

— **mille marin** (M) $= 1\,852$ m : environ une minute d'angle de grand cercle terrestre.

14.2 *Aire*

L'unité de mesure SI pour les aires est le mètre carré (m^2) avec ses multiples et ses fractions.

Attention !

- $1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 10^2 \text{ dm}^2$
- $1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ dam} \times 10^{-1} \text{ dam} = 10^{-2} \text{ dam}^2$

$\Longrightarrow$ chaque passage demande un facteur $10^{\pm 2}$

14.3 *Volume*

L'unité de mesure SI pour les volumes est le mètre cube (m^3) avec ses multiples et ses fractions.

Attention !

- $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 10^3 \text{ dm}^3$
- $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ dam} \times 10^{-1} \text{ dam} \times 10^{-1} \text{ dam} = 10^{-3} \text{ dam}^3$

$\Longrightarrow$ chaque passage demande un facteur $10^{\pm 3}$

L'autre unité accepté pour exprimer les mesures de volume est le **litre** (L).

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0,001 \text{ m}^3$$
$$\Longrightarrow 10^{-3} \text{ L} = 1 \text{ mL} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 1 \text{ cm}^3$$

14.4 *Masse*

L'unité SI pour la masse est le kilogramme (kg) avec ses multiples et ses fractions. Les autres unités acceptées sont :

— **électronvolt** (eV) $\approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ J $\rightarrow \frac{1 \text{ eV}}{c^2} \approx 1,783 \cdot 10^{-36}$ kg introduit grâce à l'équivalence entre masse et énergie établie par Einstein.

— **unité de masse atomique** (u) $\approx 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg = 1/12 de la masse d'un atome de ^{12}C.

14.5 *Temps*

L'unité SI du temps est la seconde. Si les sous-multiples décimaux sont d'usage assez fréquent, ses multiples décimaux ne sont presque jamais utilisées et à leur place on trouve les multiples de 60 et 24 (hors SI).

— **minute** (min) = 60 s
— **heure** (h) = 60 min = 3 600 s
— **jour** (j, d) = 24 h

14.6 *Température*

L'unité SI pour la température est le Kelvin défini comme $\frac{1}{273,16}$ de la température du point triple de l'eau [2]. Les autres unités utilisées sont :

— **degré Celsius** (°C) : tel que $T_c = T_K - 273,16$
— **degré Fahrenheit** (°F) : tel que $T_F = 32 + 1,8T_c = 32 + 1,8\,(T_K - 273,16)$

Attention ! Le degré Fahrenheit ne doit jamais être utilisé.

14.7 *Masse volumique (ou densité)*

La masse volumique est la grandeur physique qui caractérise la masse d'un matériau par unité de volume. Elle est définie comme :

$$\rho = \frac{m}{V} \implies [\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

On peut l'exprimer aussi en $\mathrm{g/cm^3}$ mais il faut faire attention à la conversion !

$$1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1\,\frac{10^3\ \mathrm{g}}{10^6\ \mathrm{cm}^3} = 10^{-3}\ \mathrm{g/cm^3}$$

14.8 *Pression*

La pression est une grandeur physique qui représente une force appliquée perpendiculairement à la surface sur laquelle elle est exercée. Son unité est le pascal (Pa). Elle est définie comme :

$$P = \frac{F}{S} \implies [P] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$$

Les autres unités utilisées sont :

— **bar** (bar) = 10^5 Pa
— **atmosphère** (atm) = 101 325 Pa
— **millimètre de mercure** (mmHg) = 133,32 Pa

2. Jusqu'au 20 mai 2019, définition à partir de la constante de Boltzmann après.

Quatrième partie

Probabilité

15 Éléments de dénombrement

15.1 *Factorielle d'un entier naturel*

DÉFINITION. Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on appelle "factorielle n" l'entier noté $n!$ égal au produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à n :

$$\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

On pose $0! = 1$

REMARQUE. C'est le nombre de listes sans répétition de n éléments d'un ensemble à n éléments (une telle liste est appelée "permutation").

15.2 *Nombre de liste de k éléments d'un ensemble de n éléments*

Dans ce qui suit, l'ensemble considéré contient n éléments ($n \geq 1$).

LISTES AVEC RÉPÉTITION À partir d'un ensemble à n éléments, on peut construire

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ facteurs}} = \boxed{n^k}$$

listes de k éléments ($k \geq 1$) avec répétition.

LISTES SANS RÉPÉTITION À partir d'un ensemble à n éléments, on peut construire

$$\underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

listes de k éléments ($1 \leq k \leq n$) sans répétition.

15.3 *Combinaison*

DÉFINITION. Soit n un entier naturel et E un ensemble à n éléments. Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n.

On appelle "combinaison de k éléments d'un ensemble E" toute partie de E comportant k éléments.

Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble E à n éléments vaut :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$\binom{n}{k}$ se lit "k parmi n" et est appelé "coefficient binomial".

exemple (fondamental). Un ensemble à n éléments ne contient qu'une partie à 0 élément (la partie vide) et une partie à n éléments (lui-même). On a donc :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Propriétés

Pour tout n entier naturel et tout k entier naturel inférieur ou égal à n :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

remarque. Cette égalité repose sur le fait que dans tout ensemble à n éléments, toute partie de k éléments admet un unique complémentaire qui compte, lui, $n-k$ éléments.

Pour tout n entier naturel non nul et tout k entier naturel non nul inférieur ou égal à n :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$

On dispose ainsi d'une relation de récurrence. Il s'agit de la relation de Pascal.

Triangle de Pascal

La relation de récurrence ci-dessus permet, notamment, de construire rapidement les premières valeurs de $\binom{n}{k}$ et on obtient le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & \cdots \\
n=0 & 1 & & & & & & \\
n=1 & 1 & 1 & & & & & \\
n=2 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
n=3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
n=4 & 1 & \boxed{4} & \boxed{6} & 4 & 1 & & \\
n=5 & 1 & 5 & \boxed{10} & 10 & 5 & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

La symétrie du triangle illustre la première propriété mentionnée ci-dessus.

On peut également adopter la disposition suivante :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{n=0} & & & & & & 1 & & & & & \\
\text{n=1} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\text{n=2} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\text{n=3} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\text{n=4} & & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\
\text{n=5} & 1 & & 5 & & \boxed{10} & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Formule du binôme de Newton

Pour tous a et b complexes et tout n entier naturel, on a :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots \\
&\qquad + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^{n-(n-1)} + \binom{n}{n} a^n b^{n-n} \\
&= b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + na^{n-1} b + a^n
\end{aligned}$$

C'est de cette formule que provient la dénomination "coefficient binomial" pour $\binom{n}{k}$.

REMARQUE. En choisissant $a = b = 1$, on obtient la belle égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Ainsi, la somme des éléments de la ligne n du triangle de Pascal est égale à 2^n. D'un point de vue ensembliste, ce résultat s'interprète comme suit : dans un ensemble à n éléments, il y a un total de 2^n parties.

16 Loi de Bernoulli — Loi binomiale

16.1 *Loi de Bernoulli*

Définition

DÉFINITION. On appelle "expérience de Bernoulli" toute expérience aléatoire dont l'univers compte deux issues. Traditionnellement l'une est appelée "succès" et l'autre "échec".

REMARQUE. Les dénominations de "succès" et d'"échecs" sont historiques et ne doivent pas systématiquement être interprétées littéralement !

On appelle "loi de probabilité de Bernoulli" (ou "loi de Bernoulli") la loi de probabilité associée à une expérience de Bernoulli. À l'issue "succès" on associe la valeur 1 de probabilité p. À l'issue "échec" on associe la valeur 0 de probabilité $q = 1 - p$. On dit alors que la loi de Bernoulli est une "loi de Bernoulli de paramètre p".

Une loi de Bernoulli est donc parfaitement définie par un tableau du type :

x	1	0
$P(X = x)$	p	$1 - p$

Espérance et variance d'une loi de Bernoulli

L'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut :

$$\boxed{E = p}$$

La variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut :

$$\boxed{V = p\,(1 - p) = pq}$$

16.2 *Loi binomiale*

Schéma de Bernoulli

DÉFINITION. On appelle "schéma de Bernoulli", la répétition de n expériences de Bernoulli indépendante de même paramètre p.

Loi Binomiale

DÉFINITION. À un schéma de Bernoulli, on associe la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus. X peut prendre toutes les valeurs entières inférieures ou égales à n.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètre n et p et on la note : $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on a :

$$P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

EXEMPLE (typique). n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Chaque lancer est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Le nombre de "pile" obtenu à l'issue des n lancers suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{1}{2})$

Espérance et variance d'une loi Binomiale

L'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ vaut :

$$\boxed{E = np}$$

La variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ vaut :

$$\boxed{V = np(1-p)}$$

REMARQUE. On obtient donc l'espérance et la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ à partir de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p en les multipliant respectivement par n.

17 Probabilités conditionnelles

17.1 *Probabilité conditionnelle*

DÉFINITION. Soit Ω un ensemble muni d'une loi de probabilité P et soit A un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant que A est réalisé :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$P_A(B)$ est aussi parfois notée $P(B|A)$.

PROPRIÉTÉ. *Soit Ω un ensemble muni d'une loi de probabilité P et soit A un événement de probabilité non nulle. L'application qui, à un événement B, associe $P_A(B)$ est une loi de probabilité sur $\Omega \cap A$.*

Règles d'utilisation des arbres de probabilités

— Les probabilités portées sur les branches de niveau supérieur à 1 sont des probabilités conditionnelles.

— La somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1.

— La probabilité d'un événement issu d'un chemin est égale au produit des probabilités figurant sur les différentes branches de ce chemin.

17.2 *Loi de Bayes*

PROPRIÉTÉ (Loi de Bayes). *Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors,*

$$P_B(A) = P_A(B)\frac{P(A)}{P(B)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= P_A(B)\frac{P(A)}{P(B)} \end{aligned}$$

□

17.3 *Indépendance*

DÉFINITION. Étant donné un ensemble Ω muni d'une loi de probabilité P, on dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

PROPRIÉTÉ. *Si A et B sont des événements de probabilité non nulle, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *A et B sont indépendants*
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$

REMARQUE. Pour des événements de probabilité non nulle, dire que A et B sont indépendants revient à dire que le fait que B soit réalisé n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de A et inversement.

Démonstration. Si A et B sont des événements de probabilité non nulle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff P(A) \times P(B) = P(A \cap B) \\ &\iff P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff P(B) = P_A(B) \\ A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff P(A) \times P(B) = P(A \cap B) \\ &\iff P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \iff P(A) = P_B(A) \end{aligned}$$

□

17.4 *Partition*

DÉFINITION. Soit Ω un ensemble et soient $E_1; E_2; \ldots; E_n$ des parties de Ω.

On dit que $E_1; E_2; \ldots; E_n$ est une partition de Ω si les parties $E_1; E_2; \ldots; E_n$ sont deux à deux disjointes et si leur réunion est égale à Ω.

REMARQUE. Lorsque $E_1; E_2; \ldots; E_n$ est une partition de Ω, tout élément de Ω appartient à une seule des parties $E_1; E_2; \ldots; E_n$.

EXEMPLE. Dans une classe C, on peut faire une partition en considérant les deux parties F et G : F ensemble des filles de la classe et G ensemble des garçons de la classe. (Les deux ensembles F et G sont disjoints et leur réunion est égale C).

On peut aussi faire une partition de C par les années de naissance, ou par l'initiale du nom, etc.

PROPRIÉTÉ (formule des probabilités totales). *Soit $E_1; E_2; \ldots; E_n$ une partition de Ω pour laquelle les événements $E_1; E_2; \ldots; E_n$ ne sont pas de probabilité nulle.*

Pour tout événement A, on a $P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n)$*, c'est-à-dire* $P(A) = P_{E_1}(A) \times P(E_1) + P_{E_2}(A) \times P(E_2) + \cdots + P_{E_n}(A) \times P(E_n)$

Démonstration. Si $E_1; E_2; \ldots; E_n$ est une partition de Ω, les événements $A \cap E_1; A \cap E_2; \ldots; A \cap E_n$ sont des événements disjoints deux à deux donc

$$P\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)\right] = P\left(A \cap E_1\right) + P\left(A \cap E_2\right) + \cdots + P\left(A \cap E_n\right)$$

De plus, tout événement de A appartient à l'un des $A \cap E_i$, donc à la réunion des $A \cap E_i$. On a donc $(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n) = A$. On en déduit $P(A) = P\left(A \cap E_1\right) + P\left(A \cap E_2\right) + \cdots + P\left(A \cap E_n\right)$. Les événements $E_1; E_2; \ldots; E_n$ ayant chacun une probabilité non nulle, on peut utiliser la définition des probabilités conditionnelles. On obtient :

$$P(A) = P_{E_1}(A) \times P(E_1) + P_{E_2}(A) \times P(E_2) + \cdots + P_{E_n}(A) \times P(E_n)$$

□

Propriété. *Si deux événements A et B sont indépendants, alors* $\overline{A}$ *et B sont aussi indépendants.*

remarque. On en déduit que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration. Soient A et B deux événements indépendants.

Pour démontrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants on peut démontre que $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B) \quad \text{donc} \quad P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Comme A et B sont indépendants on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$ et donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B)\left[1 - P(A)\right] = P(B) \times P(\overline{A})$.

On a donc $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$ c'est-à-dire $\overline{A}$ et B sont indépendants.

□

Cinquième partie

Géométrie

18 Les Angles

L'angle est une figure plane, une portion de plan délimitée par deux droites sécantes.

18.1 *Définitions*

Angle plein : angle de $360°$

Angle plat : angle de $180°$

Angle droit : angle de $90°$

Angle nul : angle de $0°$

Angle obtus : angle $> 90°$

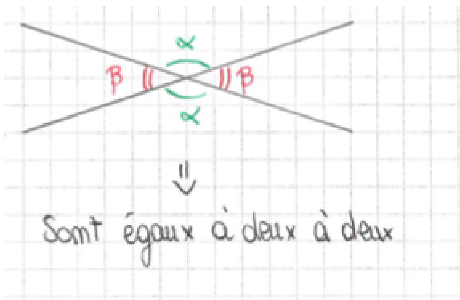
Angle aigu : angle $< 90°$

Angles complémentaires : dont la somme est $90°$

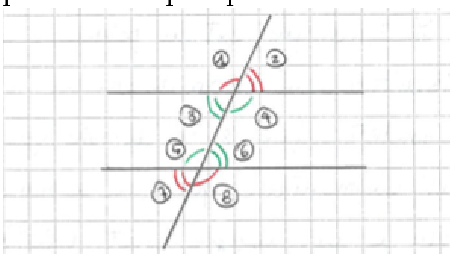
Angles supplémentaires : dont la somme est $180°$

Angles adjacents : angles qui ont un côté et le sommet en commun

Angles opposés par le sommet : angles qui ont le même sommet et pour lesquels les côtés de l'un sont le prolongement des cotés de l'autre



Angles alternes-externes et alternes-internes : angles formés par 2 droites parallèles coupées par une droite.



- $1 \approx 4 \approx 5 \approx 8$ et $2 \approx 3 \approx 6 \approx 7$
- (1,8) et (2,7) sont alternes-externes
- (3,6) et (5,4) sont alternes-internes
- Les angles alternes-externes et les angles alternes-internes sont égaux deux à deux

19 Les Triangles

Un triangle est une figure plane avec 3 sommets, 3 côtés et 3 angles. Le triangle est le polygone le plus simple et il est complètement déterminé si on donne ses 3 sommets ou ses 3 côtes ; par contre, il reste indéterminé si on ne donne que ses 3 angles.

On peut démontrer que la somme des angles de tout triangle est égale à un angle plat (180°).

19.1 *Définitions*

Triangle équilatéral : dont les 3 côtés et les angles sont tous égaux

Triangle isocèle : dont 2 côtés et les 2 angles adjacents au 3ᵉ côté sont égaux

Triangle scalène : dont tous les côtés et tous les angles sont différents

Triangle obtusangle (ou ambligone) : dont un angle est obtus ($> 90°$)

Triangle rectangle : dont un angle est droit ($= 90°$)

Triangle acutangle (ou oxygone) : dont les 3 angles sont aigus ($< 90°$)

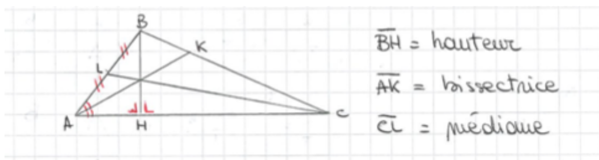
Attention ! La somme de tous les angles doivent être égale à 180° $\Longrightarrow$ un triangle peut avoir, au plus, un angle supérieur à 90°.

Médiane : segment qui relie un sommet au milieu du côté opposé

Médiatrice : droite qui coupe un côté à angle droite en son milieu

Bissectrice : demi-droite qui partage un angle en 2 angles égaux

Hauteur : droite qui passe pour un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé



Périmètre $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{3} l_i$; si le triangle est équilatéral : $\mathcal{P} = 3l$

Aire $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$ où h est la hauteur relative à la base b.

19.2 *Triangles semblables, triangles isométriques*

Deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels. Ils ont alors les mêmes angles (même forme) mais les côtés de longueur différente (taille différente).

Propriété. *Si l'une des propriétés est vérifiée, deux triangles sont semblables :*

1. *Les deux triangles ont leurs côtés proportionnels.*

2. *Les deux triangles ont un angle de même mesure entre les deux côtés adjacents proportionnels.*
3. *Les deux triangles ont leurs angles de même mesure.*

Deux triangles sont **isométriques** si c'est possible de faire correspondre les sommets de l'un avec ceux de l'autre simplement grâce à une translation, une rotation, une symétrie ou une composition de ces 3 transformations.

Propriété. *Si l'une des propriétés est vérifiée, deux triangles sont isométriques :*

1. *Les deux triangles ont tous les côtés de même longueur.*
2. *Les deux triangles ont un angle de même mesure entre les deux côtés de même longueur.*
3. *Les deux triangles ont un côté de même longueur entre 2 angles de même mesure.*

19.3 *Droites et points remarquables*

Médianes Les médianes sont concourantes, leur intersection est le **centre de gravité** du triangle.

Médiatrices Les médiatrices sont concourantes, leur intersection est le centre du **cercle circonscrit**.

Bissectrices Les bissectrices sont concourantes, leur intersection est le centre du **cercle inscrit**.

Hauteurs Les hauteurs sont concourantes, on appelle **orthocentre** leur intersection.

19.4 *Théorème de Thalès*

Théorème (de Thalès). *Soit* ABC *un triangle. Soient* D *et* E *des points respectivement de* (AB) *et* (AC). *Si* (DE) // (BC), *alors :*

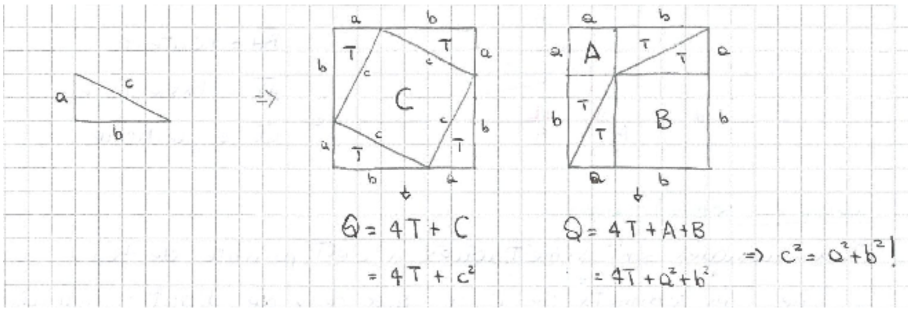
$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}}$$

remarque. La conclusion est simplement que ABC et ADE sont semblables.

Théorème (Réciproque du théorème de Thalès). *Soit* ABC *un triangle. Soient* D *et* E *des points respectivement de* (AB) *et* (AC). *Si* $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}$, *alors* (DE) // (BC).

19.5 *Théorème de Pythagore*

Théorème (de Pythagore). *Dans un* ***triangle rectangle****, le carré de la longueur de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit (cathètes).*

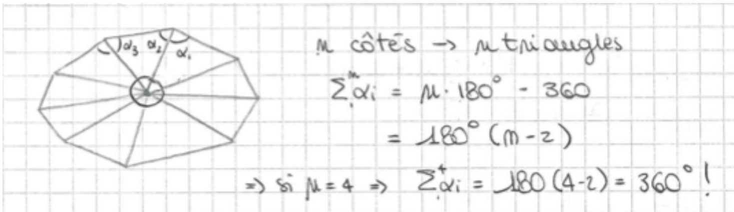


Théorème (Réciproque du théorème de Pythagore). *Dans un triangle, si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres longueurs alors le triangle est rectangle en l'angle opposé au plus long côté.*

20 Les Quadrilatères

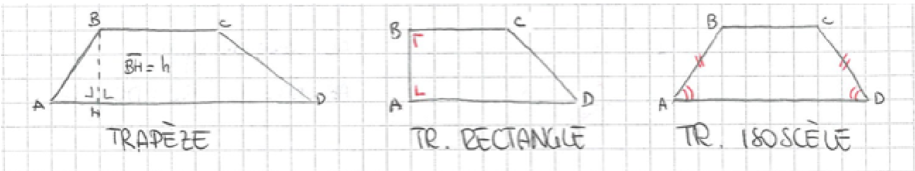
Un **quadrilatère** est un polygone avec 4 angles et 4 côtés. Si la figure ABCD est un quadrilatère, A et C (comme B et D) sont des sommets opposés. On dit **diagonale**, un segment qui relie deux sommets opposés. Si les deux diagonales sont à l'intérieur du quadrilatère le polygone est dit **convexe**, autrement il est dit **concave** (on considère que les quadrilatères convexes !).

On peut démontrer que la somme des angles de tout quadrilatère est 360°. On ne considère un polygone de n cotés :



20.1 *Trapèze*

Un trapèze est un quadrilatère avec 2 cotés parallèles nommés **bases**. On a un trapèze **rectangle** si le trapèze a 2 angles droits et un **trapèze isocèle** si 2 angles adjacents à une même base sont égaux $\Longrightarrow$ les côtés non parallèles ont la même longueur.



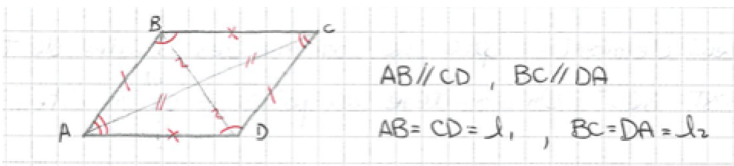
Périmètre $\quad \mathcal{P} = \sum_{i=1}^{4} l_i$

Aire $\quad \mathcal{A} = \frac{b_1+b_2}{2} \times h$ avec $b_1 = \mathrm{BC}$, $b_2 = \mathrm{AD}$, $b_1 \,/\!/\, b_2$

20.2 *Parallélogramme*

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles. Les propriétés d'un parallélogramme sont :

1. Les côtés opposés ont la même longueur.
2. Les angles opposés sont égaux.
3. Les diagonales se coupent au milieu.



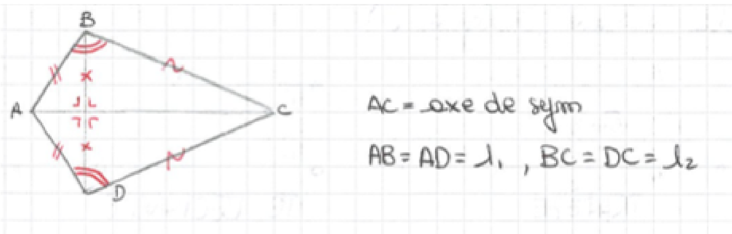
Périmètre $\mathcal{P} = 2l_1 + 2l_2$

Aire $\mathcal{A} = b \times h$

20.3 *Cerf volant*

Un **cerf volant** est un quadrilatère dont une des diagonales est un axe de symétrie. Ses propriétés sont :

1. Les diagonales sont perpendiculaires entre elles.
2. Les angles opposés par rapport à l'axe de symétrie sont égaux.
3. Deux paires de côtés adjacents sont égaux.



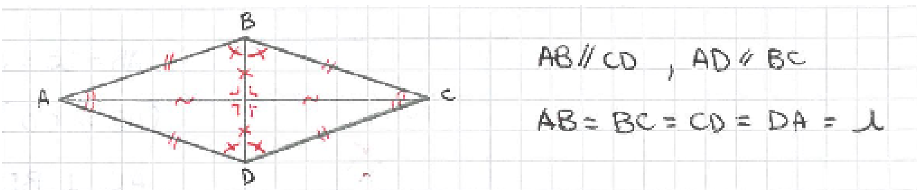
Périmètre $\mathcal{P} = 2l_1 + 2l_2$

Aire $\mathcal{A} = d_1 \times d_2 \times \frac{1}{2}$, où d_1 et d_2 sont les diagonales

20.4 *Losange*

Un **losange** est un parallélogramme avec 2 côtés consécutifs de la même longueur. Il s'agit d'un cas particulier de parallélogramme et de cerf-volant. Ses propriétés sont :

1. Les 4 cotés sont de la même longueur.
2. Les angles opposés sont égaux.
3. Les diagonales se coupent au milieu, elles sont perpendiculaires et elles sont bissectrices des angles.



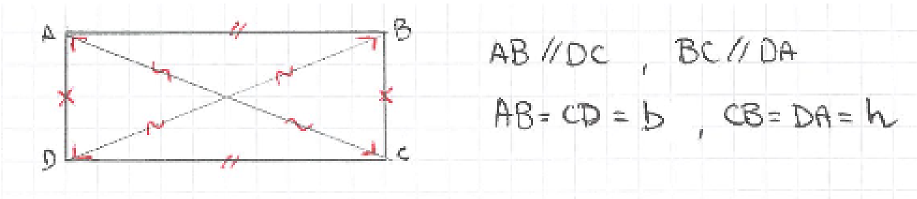
Périmètre $\mathcal{P} = 4l$

Aire $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(d \times D)$ où d et D sont les 2 diagonales

20.5 *Rectangle*

Un **rectangle** est un quadrilatère avec un 4 angles droits. Il s'agit d'un parallélogramme particulier. Ses propriétés sont :

1. Les côtés opposés sont parallèles et égaux.
2. Les diagonales ont la même longueur et se coupent au milieu.



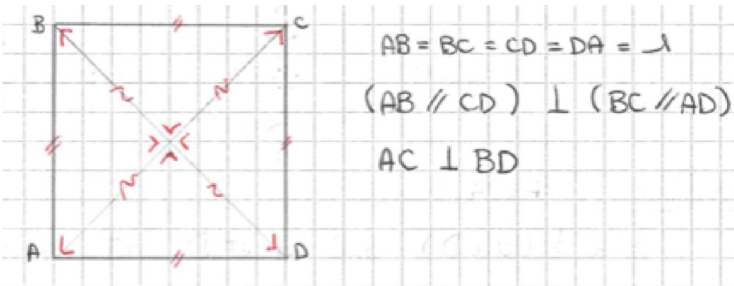
Périmètre $\mathcal{P} = 2b + 2h$

Aire $\mathcal{A} = b \times h$

20.6 *Carré*

Le **carré** est le quadrilatère régulier : il a 4 angles et 4 côtés égaux. Il est donc à la fois un rectangle et un losange. Ses propriétés sont :

1. Les côtés ont la même longueurs et sont deux à deux parallèles et perpendiculaires.
2. Les diagonales sont égales, se coupent au milieu, elles sont perpendiculaires et représentent des axes de symétrie.



Périmètre $\mathcal{P} = 4l$

Aire $\mathcal{A} = l^2$

21 Le cercle

Le **cercle** est une courbe plane fermée constituée par tous les points situés à la même distance d'un point fixe nommé **centre**.

21.1 *Définitions*

Rayon : segment joignant le centre à un point du cercle

Corde : segment dont les extrémités se trouvent sur le cercle

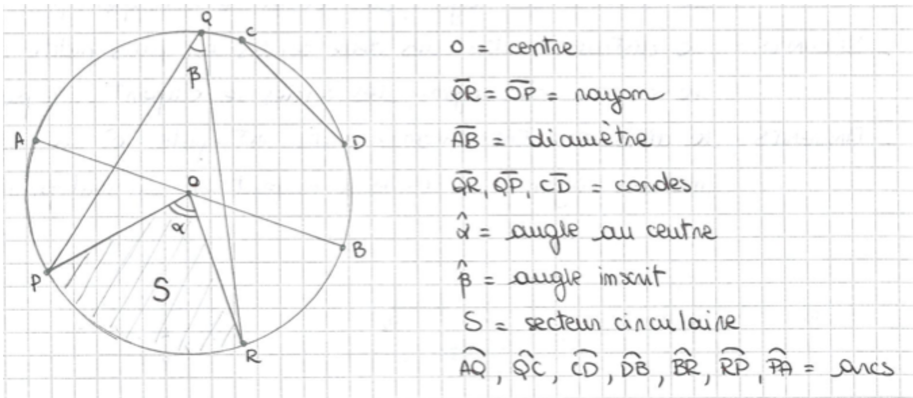
Diamètre : corde qui passe par le centre ; il est composé de deux rayons et il partage le cercle en 2 parties égales

Arc : portion de cercle délimitée par 2 points

Secteur circulaire : aire de cercle comprise entre 2 rayons

Angle au centre : angle formé par 2 rayons

Angle inscrit : angle dont le sommet est sur le cercle



Périmètre $\mathcal{P} = 2\pi r = \pi d$, où r : rayon et d : diamètre

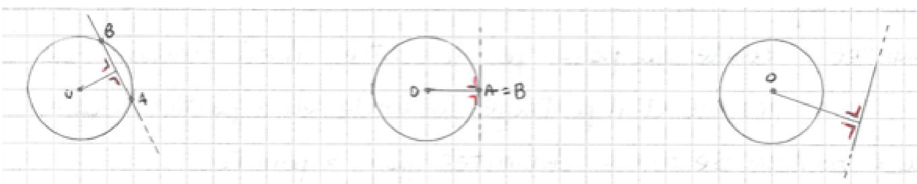
Aire $\mathcal{A} = \pi r^2$

21.2 *Positions d'une droite par rapport à un cercle*

Droite sécante : sa distance du centre est plus petite que le rayon ; elle coupe le cercle en 2 points.

Droite externe : sa distance du centre est plus grande que le rayon : elle ne coupe pas le cercle.

Droite tangente : sa distance du centre est égale au rayon ; elle coupe le cercle dans un seul point et elle est perpendiculaire au rayon en ce point.

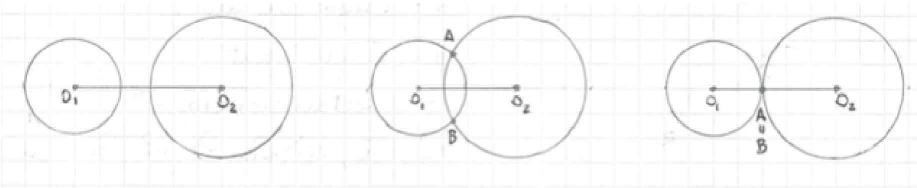


21.3 *Positions réciproques de deux cercles*

Externes : la distance entre les deux centres est plus grande que la somme des rayons ; les cercles ne se coupent pas.

Sécants : la distance entre les deux cercles est plus petite que la somme des rayons ; les cercles se coupent en 2 points.

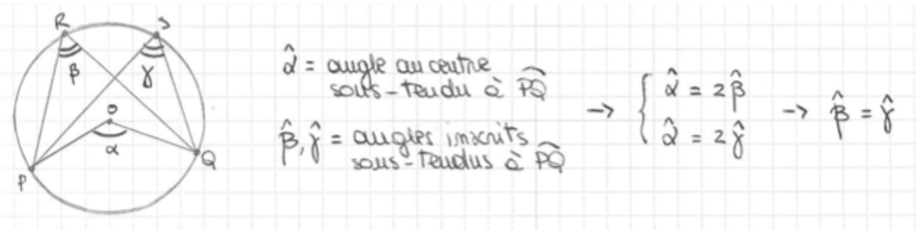
Tangents : la distance entre les deux centres est égale à la somme des rayons ; les cercles se coupent en un seul point.



21.4 *Angle inscrit et angle au centre*

Théorème (de l'angle au centre). *Dans un cercle, un angle au centre est toujours le double d'un angle inscrit qui intercepte le même arc.*

Par conséquent, le **théorème de l'angle inscrit** nous assure que deux inscrits interceptant le même angle au centre ont la même mesure.



21.5 *Cercle et triangle rectangle*

Prenons 3 points A, B, et C sur un cercle. Si A et C sont diamétralement opposés, le triangle inscrit ABC est rectangle en B.