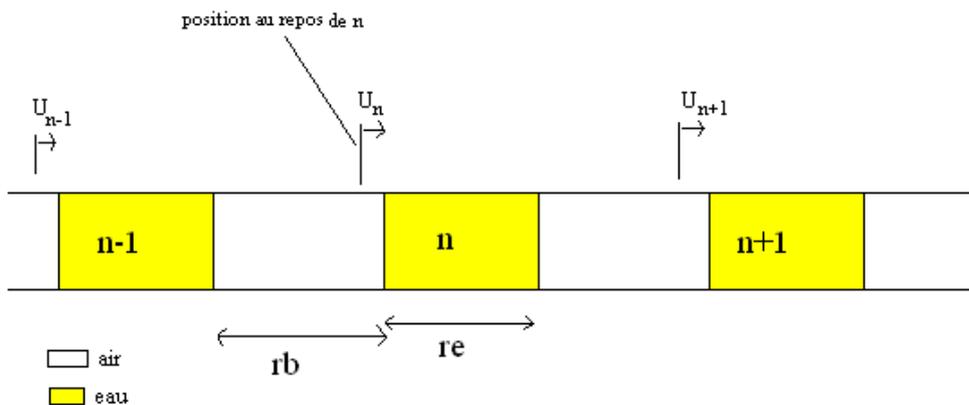


Modèle du « tube de bulles »



Considérons un tube avec alternance de bulles d'airs et de goutte d'eau. On suppose l'eau incompressible et l'air sans masse.

Notations:

1) distances

rb "rayon" (longueur) des bulles au repos.

re "rayon" (longueur) des gouttes d'eau au repos.

$R=re+rb$ une période de la répartition de bulles.

λ La longueur d'onde

$\frac{\lambda}{R}$ Longueur d'onde réduite.

2) fréquences et grandeurs associées

w : pulsation

w_0 : pulsation caractéristique : valeur précisée plus tard.

f : fréquence

f_0 : fréquence caractéristique : $f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$

$x = \frac{w}{w_0} = \frac{f}{f_0}$: Pulsation réduite=fréquence réduite

$w_e = \frac{c_{eau}}{re}$ Pulsation caractéristique pour le changement de milieu.

$\gamma = \frac{w_e}{w_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\chi_{air} \cdot rb}{\chi_{eau} \cdot re}}$ Grandeur adimensionnée utile au changement de milieu

3) paramètres « microscopique »

ρ : masse volumique de l'eau.

χ : compressibilité de l'air (isentropique).

S : section du tube

P : pression

P_0 : pression au repos

p : $p=P-P_0$ différence entre la pression et la pression au repos.

u : le déplacement par rapport à la position au repos

Préliminaires : ordres de grandeurs

On raisonnera pour une fréquence $f=100$ Hz

1) Longueurs d'ondes

Ne connaissant pas la vitesse, on l'estime de 3 manières différentes.

En adoptant la vitesse dans l'air $\lambda_{air} = \frac{c_{air}}{f} = 3.4 \text{ m}$

En adoptant la vitesse dans l'eau $\lambda_{eau} = \frac{c_{eau}}{f} = 15 \text{ m}$

Pour un milieu homogène, $c^2 = \frac{1}{\rho \chi}$. Choisissons les valeurs de ρ et χ qui minimisent c :

$$c_{\min}^2 = \frac{1}{\rho_{eau} \chi_{air}} \quad \text{ainsi,} \quad \lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f} = 12 \text{ cm}$$

Ainsi pour des bulles de quelques centimètres de rayon, on ne pourra pas considérer que la taille des bulles est très petite devant la longueur d'onde, ni très grand ; d'où le modèle adopté.

2) Comparaison des masses volumiques

$$\frac{\rho_{air}}{\rho_{eau}} = \frac{1.3}{1000} = 10^{-3} \quad \text{On négligera donc la masse volumique de l'air devant celle de l'eau}$$

3) Comparaison des coefficients de compressibilité

$$\frac{\chi_{eau}}{\chi_{air}} = \frac{\rho_{air} c_{air}^2}{\rho_{eau} c_{eau}^2} = 5 \cdot 10^{-5} \quad \text{On négligera donc la compressibilité de l'air devant celle de l'eau.}$$

4) Viscosité

En considérant que les frottements ont essentiellement lieu entre le fluide et les parois du tube.

$F_{frottements} = -\eta \frac{\partial v}{\partial r}(a) 2\pi a R$, où r est une variable radiale, a le rayon et $R=re + rb$ une période de la répartition de bulles.

En estimant grossièrement les dérivées, et avec un tube d'un centimètre de diamètre,

$$\frac{F_{frottements}}{m \|a\|} = \frac{2 \eta}{\rho w a^2} = 8 \cdot 10^{-4} \quad \text{On peut donc négliger les forces de frottements devant les effets inertiels (liés aux forces de pressions).}$$

5) Caractère adiabatique

Equation de diffusion : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$

On peut définir une durée de diffusion thermique τ par : $D = \frac{R^2}{\tau}$

$$\frac{1}{\tau f} = \frac{D}{fR^2} = \frac{10^{-5}}{100 \cdot 10^{-4}} = 10^{-3}$$

La diffusion thermique est lente par rapport aux oscillations
On pourra donc la négliger et considérer le phénomène adiabatique.

6) Tension de surface

Avec γ l'énergie liée à l'interface par unité de surface, pour un hémisphère de rayon a ,

$$P_{tension} = \frac{2\gamma}{a}$$

$$\text{Donc } \frac{P_{gravité}}{P_{tension}} = \frac{\rho g a^2}{\gamma} = 3.5$$

Les effets de la pesanteur et ceux des phénomènes de surface sont comparables. Ainsi, les bulles ne s'effondrent pas à cause de la gravité mais les phénomènes de surface seront tout autant négligeables que la gravité dans le cas de l'approximation acoustique.

I) Equation de couplage des oscillateurs.

1) Etablissons l'équation liant la pression au déplacement

Par définition de la compressibilité de l'air χ : $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$, V le volume

$$\text{Ainsi } dV = \frac{\partial V}{\partial p} \cdot dp = -V \cdot \chi \cdot dp$$

$$\text{Soit } S \cdot (u_{n+1} - u_n) = -S \cdot rb \cdot \chi \cdot dp$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{dp = -\frac{u_{n+1} - u_n}{rb \cdot \chi}}$$

Remarque : les oscillations étant a priori rapides, χ est ici le coefficient de compressibilité adiabatique mais dans certains cas il ne sera pas aberrant d'utiliser le coefficient isotherme ou bien un mélange des 2.

2) Mouvement de la goutte de rang n

m : masse de la goutte d'eau de rang n : $m = \rho \cdot S \cdot re$

Principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = S \cdot P(\text{gauche}) - S \cdot P(\text{droite})$$

Ainsi :

$$\rho \cdot S \cdot re \cdot \frac{d^2 u_n}{dt^2} = S \cdot \left(-\frac{u_n - u_{n-1}}{rb \cdot \chi} + \frac{u_{n+1} - u_n}{rb \cdot \chi} \right)$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}{\rho \cdot \chi \cdot re \cdot rb}}$$

$$\text{En posant } w_0^2 = \frac{2}{\rho \cdot \chi \cdot re \cdot rb}, \quad \boxed{\frac{d^2 u_n}{dt^2} = w_0^2 \left(\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} - u_n \right)} \quad (1)$$

II) 1^{ère} méthode de résolution : passage en continu

1) Résolution

Soit λ la longueur d'onde ; l'axe du tube et noté Oz, z étant la coordonnée associée.

Hypothèses : $re \ll \lambda$ et $rb \ll \lambda$, avec λ la longueur d'onde

On pose $u(z,t)$ fonction qui a z associe $u_n(t)$, avec n tel que $n(rb+re)=z$

On a ainsi : $u_n(t) = u(z, t)$ et $u_{n+1}(t) = u(z + (re + rb), t)$

Effectuons un développement limité de u_{n+1} et u_{n-1} à l'ordre 2 en $(rb+re)$ (longueur d'une période de la répartition de bulles)

$$u(z + (re + rb), t) = u(z, t) + (re + rb) \frac{\partial}{\partial z} (u(z, t)) + \frac{(re + rb)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u(z, t))$$

$$u(z - (re + rb), t) = u(z, t) - (re + rb) \frac{\partial}{\partial z} (u(z, t)) + \frac{(re + rb)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u(z, t))$$

En reprenant (1) avec ces nouvelles notations et en utilisant les D.L, il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z, t) - \frac{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}{(re + rb)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(z, t) = 0$$

On obtient ici une équation de d'Alembert caractérisée par sa vitesse c :

$$c^2 = \frac{(re + rb)^2}{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}$$

$$c = \frac{re + rb}{\sqrt{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}}$$

2) Réexpression du domaine de validité.

Rappel des hypothèses : $re \ll \lambda$ et $rb \ll \lambda$, avec λ la longueur d'onde

$$\text{D'après le modèle, } \lambda = c \cdot \frac{2\pi}{w} = \frac{rb + re}{\sqrt{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}} \cdot \frac{2\pi}{w} = (re + rb) \cdot w_0 \cdot \frac{\sqrt{2} \pi}{w}$$

Posons $l_c = (re + rb) \cdot \sqrt{2} \pi$, longueur caractéristique des bulles

La condition de validité s'exprime alors $l_c \ll \lambda$

Ce qui équivaut à $w \ll w_0$.

w_0 sert donc bien de fréquence caractéristique du système.

3) Modélisation équivalente

Une telle approche revient finalement à considérer le milieu comme homogène et présentant les caractéristiques moyennes du mélange. Ici il a de plus été fait les approximations : masse volumique de l'air nulle et compressibilité de l'eau nulle.

Retrouvons le résultat.

$$\text{Compressibilité moyenne : } \chi_m = \chi \frac{rb}{re + rb}$$

$$\text{Masse volumique moyenne : } \rho_m = \rho \frac{re}{re + rb}$$

La propagation dans le milieu se fait à une vitesse c telle que :

$$c^2 = \frac{1}{\rho_m \chi_m} = \frac{(re + rb)^2}{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}$$

On retrouve bien la même expression de c .

Une telle approche a en fait déjà été développée, entre autre par Robert Wood.

En utilisant la même méthode mais sans négliger la masse volumique de l'air et la compressibilité de l'eau, on obtient une équation connue sous le nom d'équation de Wood

$$\frac{1}{c_{\text{mélange}}^2} = \frac{(1-x)^2}{c_l^2} + \frac{x^2}{c_g^2} + x(1-x) \frac{\rho_g^2 \cdot c_g^2 + \rho_l^2 \cdot c_l^2}{\rho_l \cdot \rho_g \cdot c_l^2 \cdot c_g^2}$$

Avec l'indice l se rapportant au liquide, g au gaz et x la proportion volumique de gaz : $x = \frac{V_{\text{gaz}}}{V_{\text{total}}}$

III) Résolution sous forme d'onde de phase

1) équation de dispersion

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions en régime sinusoïdal forcé telles que l'amplitude des oscillations de chaque bulle soit la même.

On pose :

$$u_n(t) = A e^{i(\omega t - k n (re + rb))}$$

En injectant cette forme de solutions dans l'équation (1),

$$-\omega^2 A = \omega_0^2 A (\cos(k(re + rb)) - 1)$$

Soit en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\boxed{x^2 = 1 - \cos(k(re + rb))} \quad (2)$$

On remarque immédiatement que cette relation impose : $\omega \leq \sqrt{2} \omega_0$

2) Expression de k(x) et $\lambda(x)$

A partir de maintenant, on pose $R = re + rb$

$$\cos(kR) = 1 - x^2 \quad \text{donc}$$

$$k = \frac{2\pi \cdot p \pm \arccos(1 - x^2)}{R}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

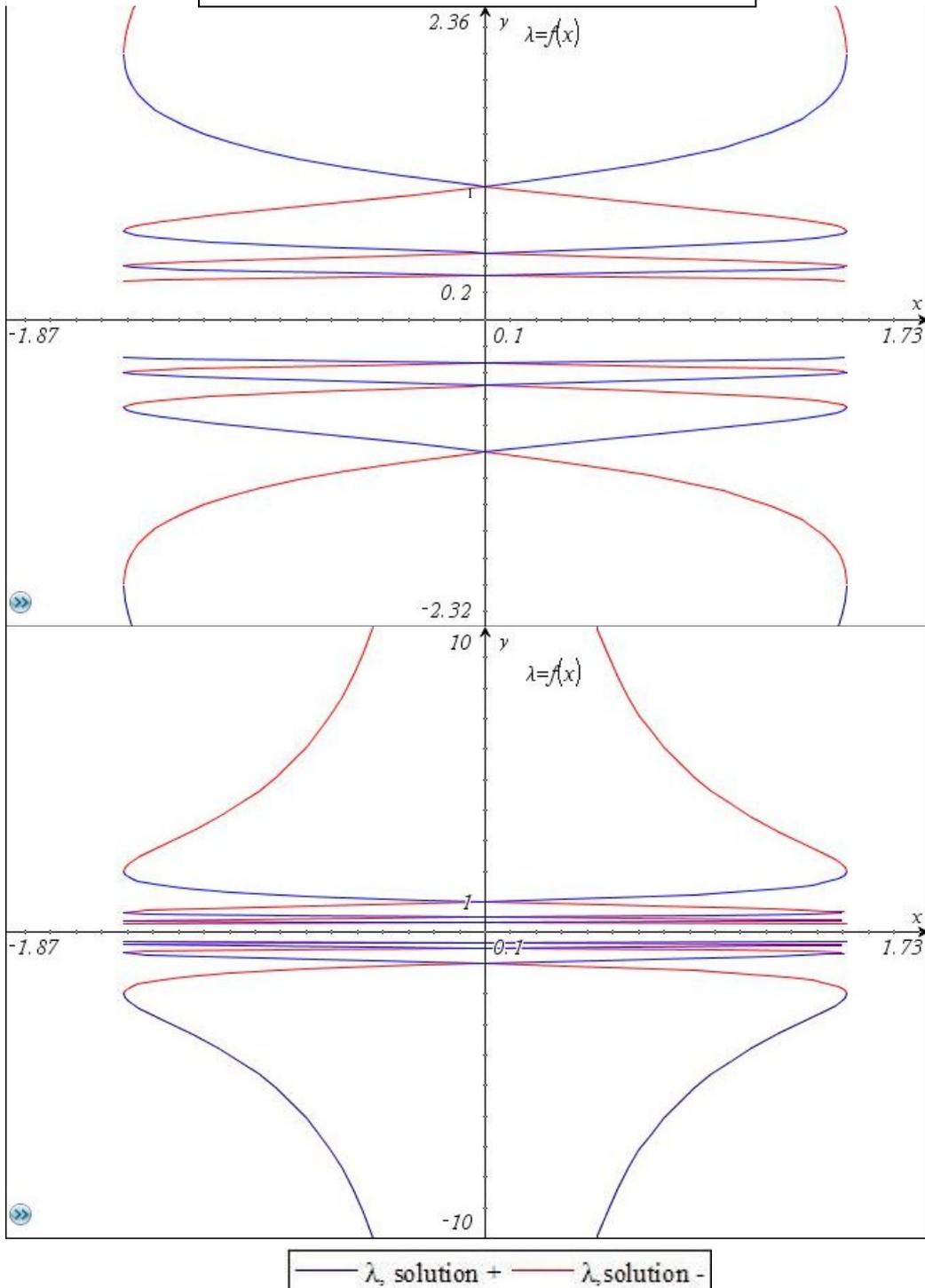
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{R}{p \pm \frac{\arccos(1 - x^2)}{2\pi}}$$

Représentons ces longueurs d'ondes.

Pour les représentations graphiques, on utilise la longueur d'onde réduite $\frac{\lambda}{R}$

Et la pulsation réduite x

Longueur d'onde réduite en fonction de la pulsation réduite

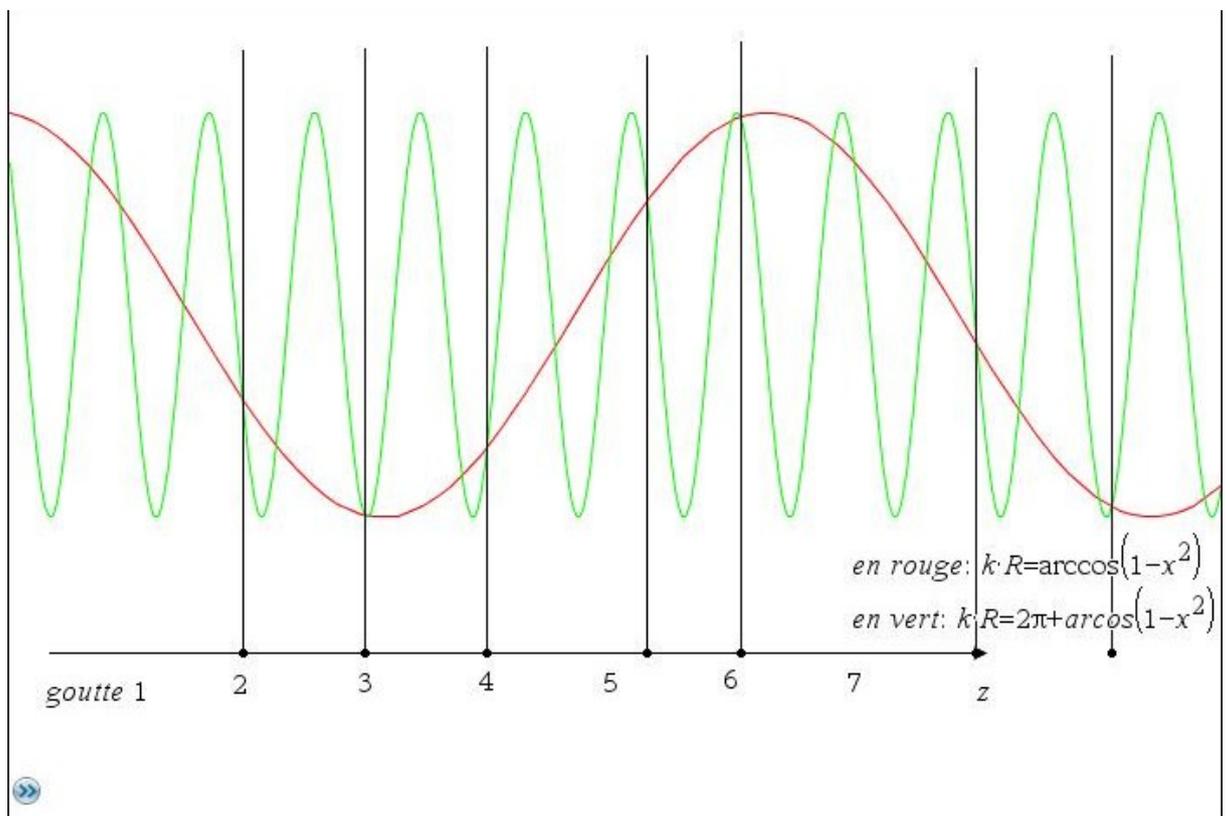


A priori, il existe une infinité de solutions. Mais il faut noter que la phase, bien que partout définissable, n'a pas de signification entre deux bulles. Il est ainsi tentant de comprendre ces différentes longueurs d'onde comme l'ensemble des longueurs d'onde pour lesquelles le déphasage est le même entre deux bulles successives. En effet, un tel déphasage n'est défini que modulo 2π ; cela permet donc une infinité de longueurs d'ondes différentes. Il paraît ainsi possible que toutes ces longueurs d'ondes décrivent exactement les mêmes mouvements des bulles malgré une apparence différente. Formalisons cela, en premier lieu de

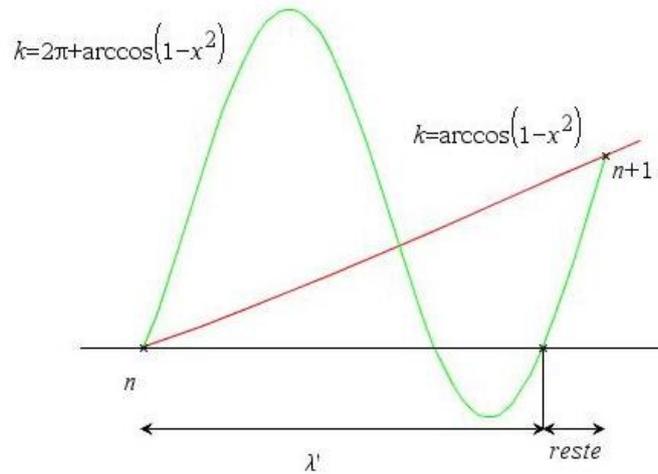
manière « intuitive » puis plus directe. L'explication sera donnée dans le cas particulier de la solution + :

$$\lambda = \frac{R}{p + \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}} \quad \text{on pose } \lambda_0 = \frac{R}{\frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$$

Afin de visualiser le phénomène, représentons (à t fixé) $u(z)$ pour deux valeurs de p différentes : $p=0$ en rouge et $p=1$ en vert. La valeur de u n'a d'intérêt qu'au niveau des gouttes car elle correspond effectivement à la valeur de u de la goutte correspondante.



Intéressons nous désormais à ce qu'il se passe entre deux gouttes successives.



La courbe rouge correspond à λ_0 et la verte à λ_1

On note φ le retard de phase induit dans le cas $p=0$ entre la goutte n et celle $n+1$.

Conformément à l'hypothèse avancée, on devrait retrouver le même retard à l'ordre p sur une longueur correspondant au reste.

En prenant α tel que $\lambda_0 = \alpha \cdot R$ (α représente donc le nombre de gouttes (pas nécessairement entier) qu'occupe une longueur d'onde du fondamental)

$$\alpha \cdot \varphi = 2\pi \text{ et } \alpha \cdot \text{reste} = \lambda_p$$

Vérifions que ceci a effectivement lieu :

$$\lambda_0 = \frac{R}{\frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}} \text{ donc } \alpha = \frac{2\pi}{\arccos(1-x^2)}$$

Par ailleurs $\text{reste} = R - p \cdot \lambda_p$

$$\text{Or } \lambda_p = \frac{R}{p + \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \alpha \cdot \text{reste} &= R \left(1 - \frac{p}{p + \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}} \right) \frac{2\pi}{\arccos(1-x^2)} \\ &= \frac{R}{p + \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}} = \lambda_p \end{aligned}$$

Ce qui a été annoncé est bien vérifié.

On peut et il est certainement préférable de réfléchir directement en phase.

Le déphasage entre deux gouttes doit être le même modulo 2π :

$$k_p R = k_0 R + 2\pi p$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_p} = \frac{2\pi}{\lambda_0} + \frac{2p\pi}{R}$$

$$\frac{1}{\lambda_p} = \frac{R + p\lambda_0}{\lambda_0 R}$$

$$\text{Et finalement : } \lambda_p = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{p\lambda_0}{R}}$$

$$\text{En injectant } \lambda_0 = \frac{R}{\frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}, \text{ il vient } \lambda_p = \frac{R}{p + \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$$

Ceci fonctionne également parfaitement pour la solution –

En résumé, nous avons montré que de toutes les longueurs d'ondes qui existent formellement, et si l'on ne s'intéresse qu'à celles >0 , seules 2 ont un réel intérêt :

$$\lambda = \frac{R}{\frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{R}{1 - \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$$

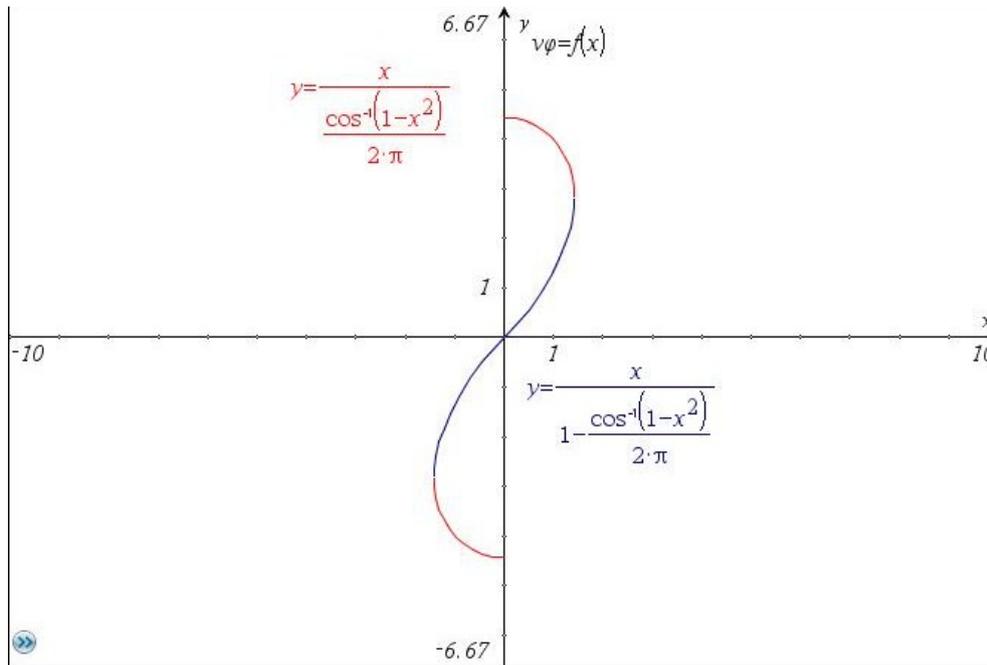
La première correspond à un retard de phase de $n+1$ par rapport à n compris entre 0 et π ; la deuxième à un retard entre π et 2π (ce retard kR).

3) vitesses de propagation

a) vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{w}{k} \text{ et avec les deux cas de } k \text{ retenus, } v_{\varphi,1} = \frac{x \cdot \frac{w_0}{2\pi} \cdot R}{\frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}} \text{ et } v_{\varphi,2} = \frac{x \cdot \frac{w_0}{2\pi} \cdot R}{1 - \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$$

Représentons ces deux vitesses (sous une forme adimensionnée : $\frac{v_\varphi}{\frac{w_0}{2\pi} \cdot R}$)



$$\lim_{x \rightarrow 0} v_{\phi, 2} = 0$$

En remarquant qu'en 0, $\arccos(1 - x^2) \sim \sqrt{2|x|}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} v_{\phi, 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} w_0 R = \frac{rb + re}{\sqrt{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}} : \text{on retrouve la vitesse de propagation dans la cadre de}$$

l'approximation $re \ll \lambda$ et $rb \ll \lambda$, ce qui n'est pas étonnant.

b) vitesse de groupe

$$v_g = \frac{dw}{dk}$$

Rappel de l'équation de dispersion : $\cos(k \cdot R) = 1 - x^2$

$$\text{Ainsi } \sin(k \cdot R) R dk = 2x dx = \frac{2x dw}{w_0}$$

$$\text{Et } v_g = \frac{dw}{dk} = \frac{\sin(k \cdot R) R w_0}{2x}$$

Réexprimons $\sin(kR)$ en fonction de x : $1 - \sin^2(kR) = (1 - x^2)^2 = 1 + x^2(x^2 - 2)$

$$\text{Donc } \sin(kR) = \pm x \sqrt{(2 - x^2)}$$

$$\text{Et } v_g = \pm \frac{R w_0}{2} \sqrt{(2 - x^2)}$$

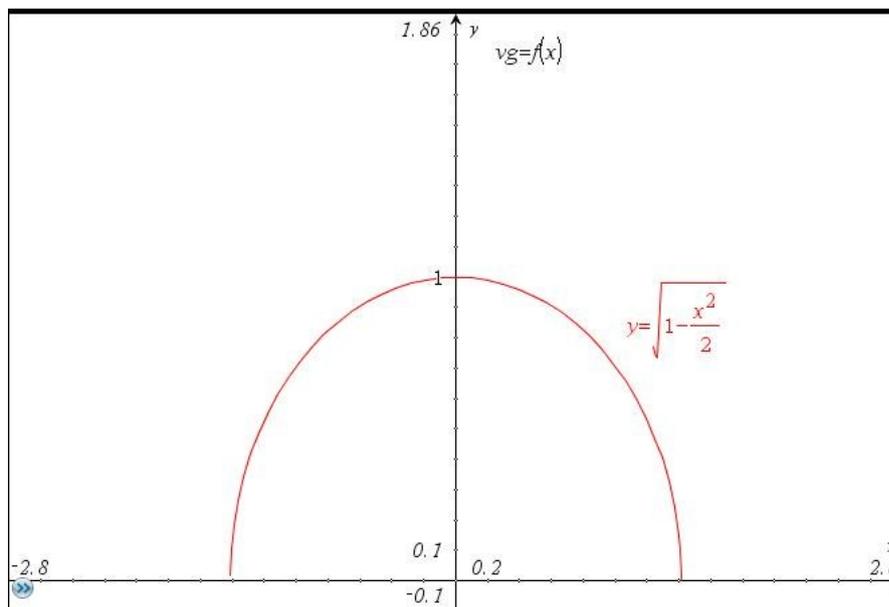
Notez que la solution + correspond à $kR \in [0, \pi]$ donc à $\lambda = \frac{R}{\frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$

Et la solution - correspond à $kR \in [\pi, 2\pi]$ donc à $\lambda = \frac{R}{1 - \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$

On comprend ainsi un peu mieux cette deuxième longueur d'onde : elle correspond à une propagation à l'envers, et le retard de $n+1$ sur n compris entre π et 2π peut être compris comme un retard de n sur $n+1$ compris entre 0 et π

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0} v_g = \frac{\sqrt{2}}{2} w_0 R = \frac{rb + re}{\sqrt{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}}$, on retrouve de nouveau la vitesse de propagation dans le cadre de l'approximation $re \ll \lambda$ et $rb \ll \lambda$.

Traçons $\frac{v_g}{R w_0} \sqrt{2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ en fonction de x



Conclusion de la sous partie : la propagation n'a lieu que pour $w \leq \sqrt{2} w_0$

Dans ce cas,

Propagation dans le sens des n croissants :

$$u_n = A e^{i(wt - n \arccos(1-x^2))}$$

Propagation dans le sens des n décroissants :

$$u_n = A e^{i(wt + n (2\pi - \arccos(1-x^2)))} = A e^{i(wt + n \arccos(1-x^2))}$$

IV) Forme apparemment plus générale de l'onde de phase

1) approche générale

Dans la partie précédente, on commencé par imposer que toutes les amplitudes soient égales. On peut donc essayer de trouver des solutions un peu plus générales, par exemple en groupant par deux les bulles. C'est pourquoi dans cette partie, on s'intéresse aux solutions telles que pour tout n, t , $u_{n+2}(t)=u_n(t)$.

On pose :

$$u_{2p}(t) = A e^{i(\omega t - 2k(re+rb)p)} \quad \text{Et} \quad u_{2p+1}(t) = B e^{i(\omega t - k(re+rb)(2p+1))}$$

En injectant ces formes de solutions dans l'équation (1),

$$\begin{cases} -\omega^2 \cdot A = \omega_0^2 \cdot (B \cdot \cos(k \cdot (re + rb)) - A) \\ -\omega^2 \cdot B = \omega_0^2 \cdot (A \cdot \cos(k \cdot (re + rb)) - B) \end{cases}$$

Soit en posant toujours $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\begin{cases} A \cdot (x^2 - 1) + B \cdot \cos(k(re + rb)) = 0 \\ A \cdot \cos(k(re + rb)) + B \cdot (x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Une solution possible est $A=B=0$. Evidement l'intérêt d'une telle solution est plus que limitée. Le système admettra d'autre solutions si et seulement si son déterminant est nul, ce qui équivaut à :

$$(x^2 - 1)^2 - \cos^2(k \cdot (re + rb)) = 0$$

A partir de là, il y a deux cas à distinguer :

$$1 - x^2 = \cos(k \cdot (re + rb)) \quad \text{Et} \quad x^2 - 1 = \cos(k \cdot (re + rb))$$

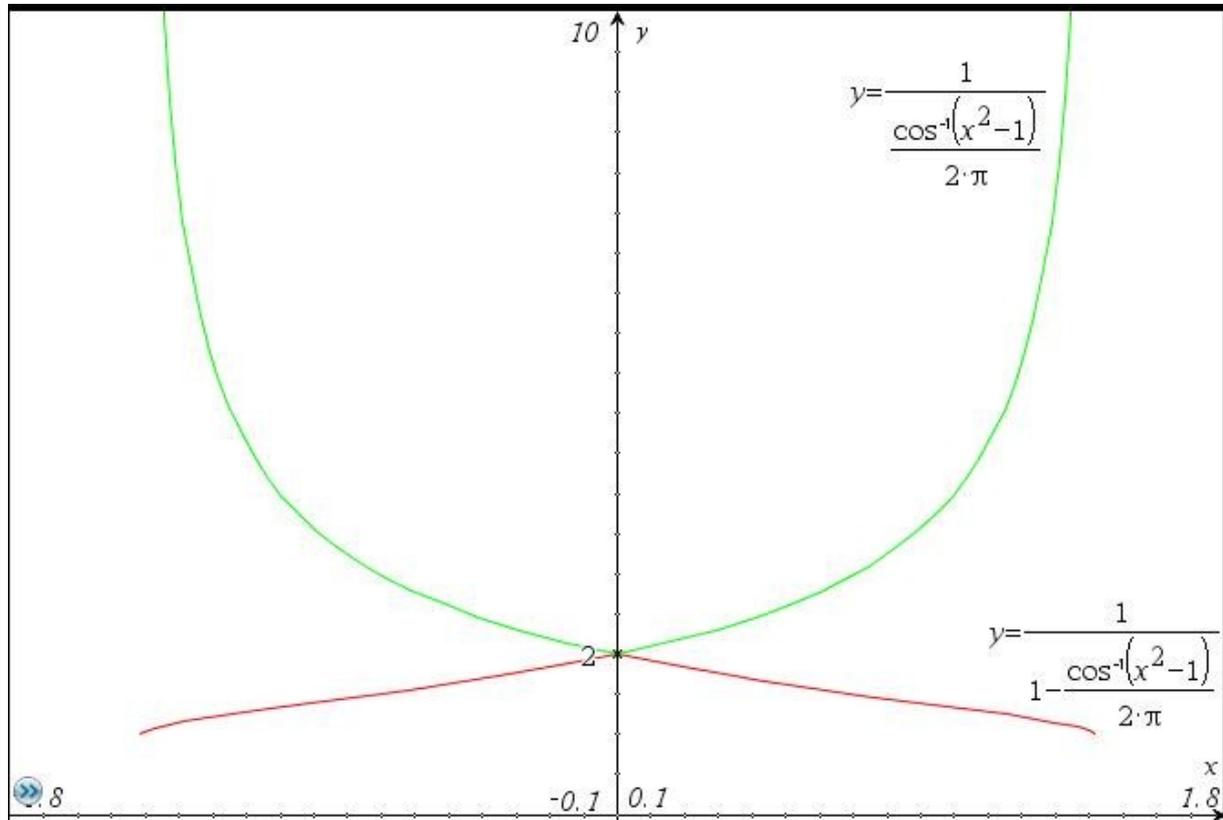
Dans le 1^{er} cas, on retrouve l'équation de dispersion étudiée en III) ; et les valeurs de A et B correspondantes sont $A=B$: on est exactement dans le cas étudié en III)

Dans le second cas, les solutions obéissent à $A=-B$

On a alors (en ne retenant que les cas $\lambda \geq R$)

$$k = \frac{\arccos(x^2 - 1)}{R} \text{ sa longueur d'onde correspondante : } \lambda = \frac{R}{\frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

$$k = \frac{2\pi - \arccos(x^2 - 1)}{R} \text{ sa longueur d'onde correspondante : } \lambda = \frac{R}{1 - \frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$



Il faut noter que $B=-A$ devrait être un cas particulier de l'étude du III)

En effet, $B=-A = Ae^{-i\pi}$: poser $B=-A$ correspond à retrancher π au retard de $n+1$ sur n

2) Retrouvons le résultat comme cas particulier du III)

On pourrait raisonner comme auparavant avec une demi longueur d'onde, R et un reste.
Il est plus rapide de raisonner en phase :

On note prime les grandeurs correspondant à la « nouvelle » situation.

$$e^{i(\omega t - kR)} = e^{i(\omega t - (k'R + \pi))}$$

$$k' = k - \frac{\pi}{R}$$

$$\text{donc } \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{R} \text{ et } \lambda' = \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2R}} = \frac{R}{\frac{R}{\lambda} - \frac{1}{2}}$$

$$\text{or } \lambda = \frac{R}{p + \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}} \quad \text{ou } \lambda = \frac{R}{p - \frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}$$

Dans le 1er cas : en remarquant que $\arccos(X) - \pi = -\arccos(-X)$,

$$\lambda' = \frac{R}{p + \frac{\arccos(1-x^2) - \pi}{2\pi}} = \frac{R}{p - \frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

$$\text{Dont la seule longueur d'onde intéressante est } \lambda' = \frac{R}{1 - \frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

Dans le second cas : en remarquant que $\arccos(X) + \pi = 2\pi - \arccos(-X)$

$$\lambda' = \frac{R}{(p-1) + \frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

$$\text{Dont la seule longueur d'onde intéressante est } \lambda' = \frac{R}{\frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

On a bien retrouvé les deux longueurs d'ondes obtenues en approchant le problème à l'aveugle.

Ainsi, ces « nouvelles » longueurs d'ondes ne correspondent qu'à une manière différente de repérer la phase. Dans le III) la référence de phase était : toutes les gouttes oscilles en phase. Ici la référence est : chaque goutte est en opposition de phase avec ces voisines.

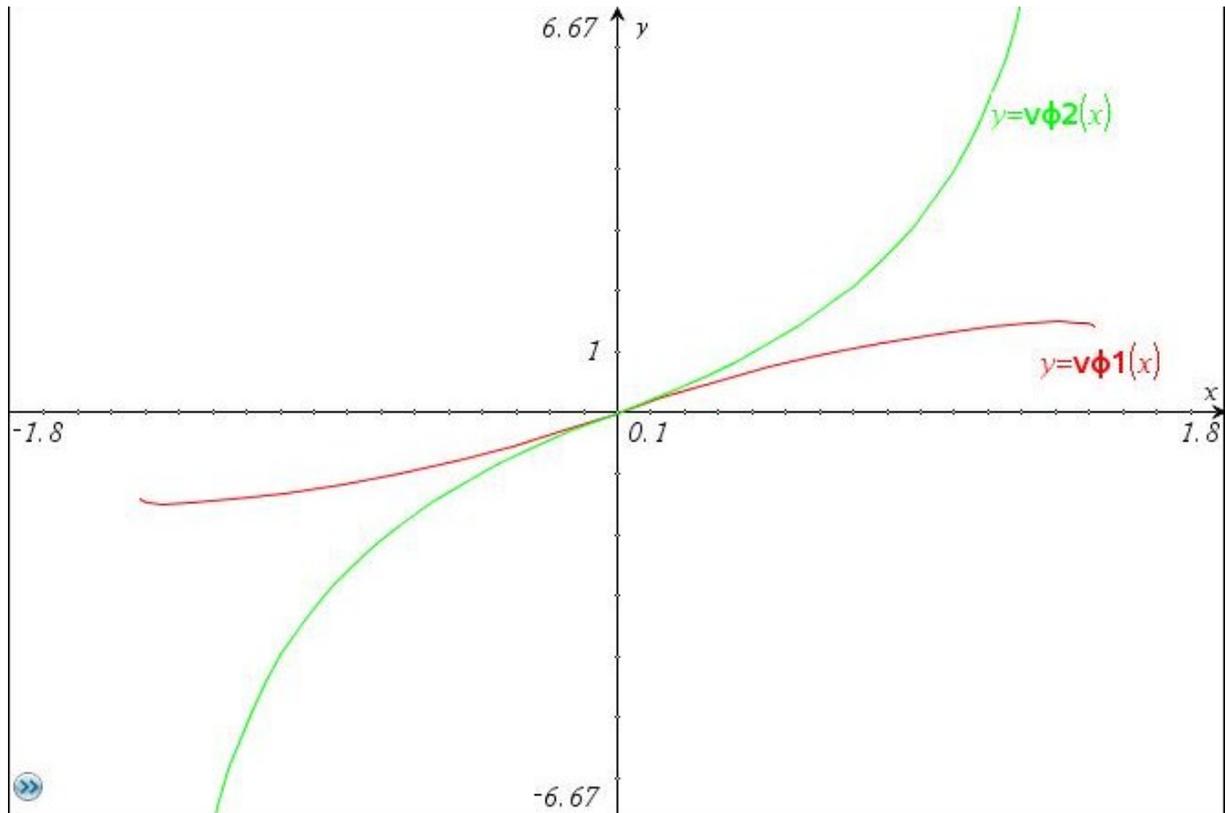
Poursuivons tout de même en s'intéressant aux vitesses.

3) vitesses de propagation

a) vitesse de phase

$$v_{\varphi} = \frac{w}{k} \quad \text{et avec les deux cas de } k \text{ retenus, } v_{\varphi,1} = \frac{x \cdot \frac{w_0}{2\pi} \cdot R}{1 - \frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}} \quad \text{et } v_{\varphi,2} = \frac{x \cdot \frac{w_0}{2\pi} \cdot R}{\frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

Représentons ces deux vitesses (sous une forme adimensionnée : $\frac{v_{\varphi}}{\frac{w_0}{2\pi} \cdot R}$)



b) Vitesse de groupe

équation de dispersion : $x^2 - 1 = \cos(kR)$

$$\text{donc } 2x \frac{dw}{w_0} = -\sin(kR) R dk$$

$$\text{et } v_g = \frac{dw}{dk} = -\frac{R w_0}{2x} \sin(kR)$$

$$\text{on a encore : } \sin(kR) = \pm x \sqrt{(2-x^2)}$$

$$\text{donc, comme tout à l'heure, } v_g = \pm \frac{R w_0}{2} \sqrt{(2-x^2)}$$

En prenant $x=0$, on retrouve la vitesse de propagation du milieu considéré comme homogène.

$$\text{Ici la solution + correspond à } \lambda' = \frac{R}{1 - \frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

$$\text{Et la solution - correspond à } \lambda' = \frac{R}{\frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}}$$

Notez que pour la 1^{ère} longueur d'onde,

$$\lambda = \frac{R}{\frac{\arccos(1-x^2)}{2\pi}}, \lambda' = \frac{R}{1 - \frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}} \text{ et } v_g = + \frac{R w_0}{2} \sqrt{(2-x^2)}$$

Et pour l'autre longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{R}{1 - \frac{\arccos(1 - x^2)}{2\pi}}, \lambda' = \frac{R}{\frac{\arccos(x^2 - 1)}{2\pi}} \text{ et } v_g = -\frac{R \omega_0}{2} \sqrt{(2 - x^2)}$$

Le changement de référence affecte la longueur d'onde, la vitesse de phase mais laisse inchangé la vitesse de groupe.

V) Onde évanescente

On a observé que pour $\sqrt{2} w_0 \leq w$, il n'y a plus de solution réelle à l'équation de dispersion et donc la propagation n'est plus possible. Etudions désormais ce qui se passe dans ce cas. L'équation différentielle étant toujours la même, on autorise désormais le nombre d'onde k à être complexe.

Rappelons l'équation de dispersion (avant simplification supposant k réel) :

$$\frac{e^{i k R} + e^{-i k R}}{2} = 1 - x^2$$

1) Simplification de $\frac{e^{i k R} + e^{-i k R}}{2}$

On pose $k=h+ig$

$$\begin{aligned} \frac{e^{i k R} + e^{-i k R}}{2} &= \frac{e^{i h R - g R} + e^{-i h R + g R}}{2} \\ &= \frac{e^{-g R} (\cos(h R) + i \sin(h R)) + e^{g R} (\cos(-h R) + i \sin(-h R))}{2} \\ &= \cos(h R) \cosh(g R) - i \sin(h R) \sinh(g R) \end{aligned}$$

2) Résolution de l'équation en complexe

On injectant le résultat du 1) et en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$(S) : \begin{cases} \cos(h R) \cosh(g R) = 1 - x^2 & (1) \\ \sin(h R) \sinh(g R) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow g R = 0 \text{ ou } h R = 0[\pi]$$

On est donc amené à distinguer 3 cas

1^{er} cas : $g=0$

Dans ce cas, on a $k=h$ et alors $(S) \Leftrightarrow \cos(h R) = 1 - x^2$ on retrouve le cas où k est un réel. Ce cas a déjà été traité.

2^{ème} cas : $h R = 0[2\pi]$

Dans ce cas, $(S) \Leftrightarrow \cosh(g R) = 1 - x^2$

Or $\forall x \neq 0, 1 - x^2 < 1$

Il n'y a donc pas de solution excepté pour $x=0$ (et donne $g=0$). On retrouve la solution stationnaire : rien ne bouge et les gouttes sont écartées de R.

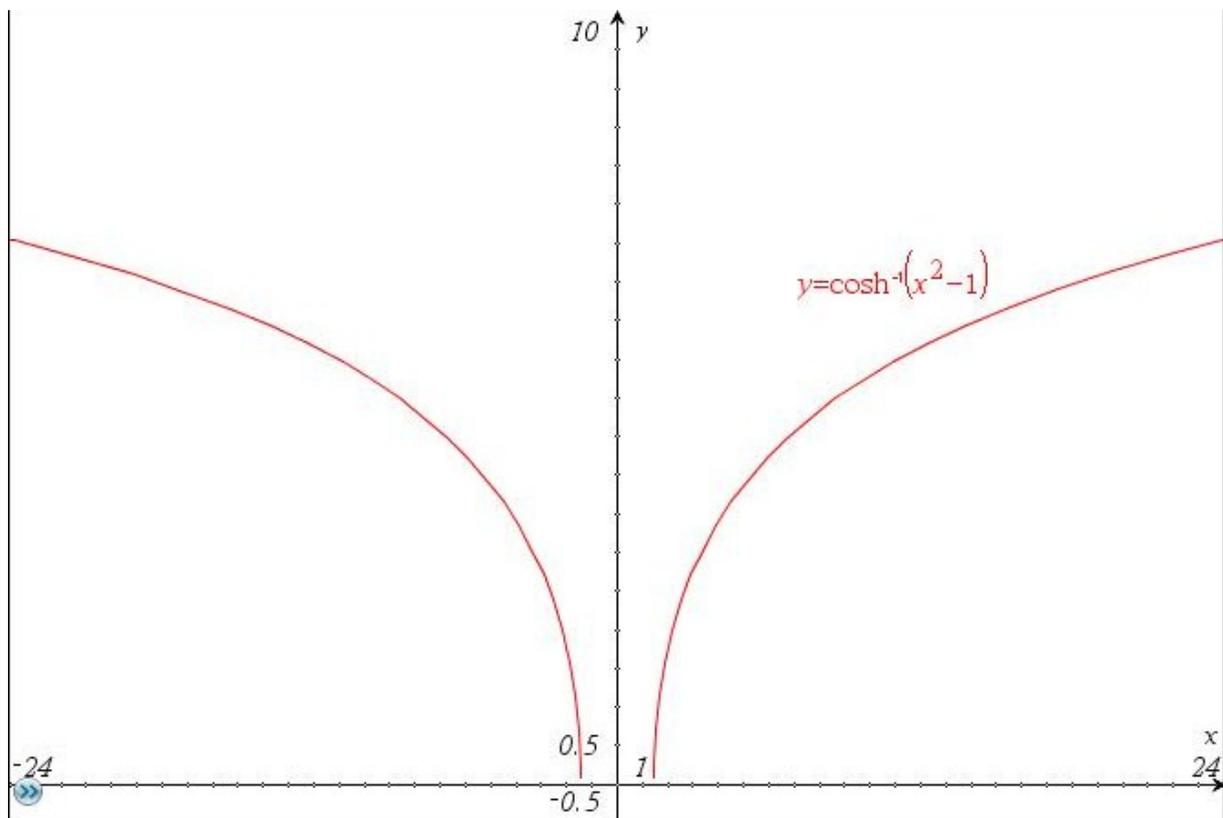
3^{ème} cas : $hR = \pi[2\pi]$

Dans ce cas, le système n'admet pas de solutions pour $w \leq \sqrt{2} \cdot w_0$

Et pour $w \geq \sqrt{2} \cdot w_0$, $(S) \Leftrightarrow \cosh(gR) = x^2 - 1 \Leftrightarrow g = \pm \frac{\operatorname{arccosh}(x^2 - 1)}{R}$

L'incertitude sur les signes provient du fait que l'onde peut aller tout aussi bien dans les deux sens.

Représentons la fonction :



Conclusion de la sous partie : l'onde évanescence n'a lieu que pour $w \geq \sqrt{2} \cdot w_0$

Dans ce cas,

« Propagation » dans le sens des n croissants :

$$u_n = A e^{-n \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)} e^{i(wt - n\pi)}$$

« Propagation » dans le sens des n décroissants :

$$u_n = A e^{n \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)} e^{i(wt + n\pi)}$$

En conclusion, un même mouvement des bulles sous forme d'onde progressive harmonique peut être interprété de nombreuses manières : des longueurs d'ondes positives, négatives (propagation rétrograde), plus ou moins importante. Avec un changement de référence, on peut même les modifier complètement (ici on a choisi la référence : chaque goutte en opposition de phase avec la suivante mais on aurait pu choisir n'importe quelle autre référence). Ceci dit, heureusement la vitesse de groupe ne dépend pas de la description que l'on retient (ceci est une généralisation compréhensible mais non formellement vérifiée donc dangereuse).

On retiendra principalement de cette étude (parties III) IV) V)) :

Avec $w_0^2 = \frac{2}{\rho \cdot \chi \cdot re \cdot rb}$, $x = \frac{w}{w_0}$ et $c = \frac{rb + re}{\sqrt{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}}$, vitesse de propagation lorsque la fréquence tend vers 0 (milieu considéré comme homogène),

1)-Cette propagation n'est possible que pour des pulsations : $w \leq \sqrt{2} w_0$

La propagation se fait alors à une vitesse de groupe : $v_g = c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}$

2)-Pour $w \geq \sqrt{2} \cdot w_0$ on obtient une onde évanescence.

Chaque goutte est alors en opposition de phase avec ses voisines

La partie imaginaire du nombre d'onde est alors $\pm \frac{\operatorname{arccosh}(x^2 - 1)}{R}$

La longueur caractéristique associée est $\frac{R}{\operatorname{arccosh}(x^2 - 1)}$

VI) résolution pour un nombre N de gouttes

Pour l'instant, nous avons traité le problème en considérant une chaîne infinie de bulles et gouttes. Mais en réalité, le nombre de bulles est fini. C'est pour cela que nous allons étudier le comportement d'un nombre fini de bulles.

L'équation différentielle régissant le mouvement de chaque bulle a déjà été établie :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = w_0^2 \left(\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} - u_n \right) \quad \text{Avec } w_0^2 = \frac{2}{\rho \cdot \chi \cdot r_e \cdot r_b}$$

Cependant, les premières et dernières bulles n'ont pas le même entourage que les autres. Il faut choisir cet entourage. Nous retiendrons : la première goutte d'eau est séparée par une bulle d'air d'une paroi mobile qui se comporte comme une goutte d'eau dont le déplacement $u_e(t)$ est imposé. De même, on considérera la présence d'une goutte de rang N+1 fixe : $u_{N+1}(t)=0$. Les équations correspondantes sont :

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} = w_0^2 \left(\frac{u_2}{2} - u_1 \right) + w_0^2 \frac{u_e}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 u_N}{dt^2} = w_0^2 \left(\frac{u_{N-1}}{2} - u_N \right)$$

Nous pourrions résoudre les équations différentielles mais comme seule la solution en régime forcé nous intéresse, contentons nous d'une telle solution. Pour une excitation sinusoïdale

$$u_e(t) = u_{e,0} \cos(\omega t), \text{ on recherche une solution réelle du type } \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,0} \cos(\omega t) \\ u_{2,0} \cos(\omega t) \\ \vdots \\ u_{N,0} \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Les équations deviennent alors :

$$\begin{bmatrix} 0 = \frac{u_{2,0} + u_{e,0}}{2} - (1 - x^2) \cdot u_{1,0} \\ 0 = \frac{u_{3,0} + u_{1,0}}{2} - (1 - x^2) \cdot u_{2,0} \\ \dots \\ 0 = \frac{u_{k+1,0} + u_{k-1,0}}{2} - (1 - x^2) \cdot u_{k,0} \\ \dots \\ 0 = \frac{u_{N-1,0}}{2} - (1 - x^2) \cdot u_{N,0} \end{bmatrix}$$

En posant $u_{0,0}=u_{e,0}$ et $u_{N+1,0}=0$, toutes les équations deviennent :

$$u_{k+1,0} - 2(1 - x^2) \cdot u_{k,0} + u_{k-1,0} = 0$$

Cette équation peut être vue comme une relation de récurrence d'ordre 2 pour la suite $(u_{k,0})$.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2(1 - x^2)r + 1 = 0$

$$\Delta = 4(1 - x^2)^2 - 4 = 4x^2(x^2 - 2)$$

On distinguera donc 3 cas : $w < \sqrt{2} w_0$, $w = \sqrt{2} w_0$ et $\sqrt{2} w_0 < w$

Dans tous les cas, $r = 1 - x^2 \pm x\sqrt{x^2 - 2}$ (en acceptant les racines de nombres négatifs)

1^{er} cas : $w < \sqrt{2} w_0$

On pose $\vartheta = \arccos(1 - x^2)$, l'équation devient $r^2 - 2\cos(\vartheta)r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r - e^{i\vartheta})(r - e^{-i\vartheta}) = 0$

La forme générale est donc $u_k = \alpha e^{i\vartheta k} + \beta e^{-i\vartheta k} = \alpha' \cos(k\vartheta) + \beta' \sin(k\vartheta)$

Introduisons désormais les conditions aux bords :

$$u_0 = u_{e,0} = \alpha' \text{ et } u_{N+1} = 0 = \alpha' \cos((N+1)\vartheta) + \beta' \sin((N+1)\vartheta)$$

Tant que la fréquence d'excitation n'est pas une fréquence propre du système, $\sin((N+1)\vartheta) \neq 0$ (Ce résultat qui découle de la connaissance effective des pulsations propres du système pourrait également être vu comme un moyen de les déterminer.

On retiendra : fréquences propres : $w = w_0 \sqrt{1 - \cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right)}$, $p \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\text{Ainsi, } \beta' = -u_{e,0} \frac{\cos((N+1)\vartheta)}{\sin((N+1)\vartheta)}$$

Bref :

$$u_k = u_{e,0} \left(\cos(k\vartheta) - \frac{\cos((N+1)\vartheta)}{\sin((N+1)\vartheta)} \sin(k\vartheta) \right)$$

Cette forme n'est pas très expressive. Elle se simplifie en :

$$\boxed{u_k = u_{e,0} \frac{\sin((N+1-k)\vartheta)}{\sin((N+1)\vartheta)}} \text{ avec } \vartheta = \arccos(1 - x^2)$$

2^{ème} cas : $w = \sqrt{2} w_0$

L'équation devient : $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$

La forme générale est $u_k = (-1)^k (\alpha + \beta k)$

Introduisons désormais les conditions aux bords :

$$u_0 = u_{e,0} = \alpha \quad u_{N+1} = 0 = (-1)^k (\alpha + \beta (N+1)) \text{ donc } \beta = -\frac{u_{e,0}}{N+1}$$

En conclusion,

$$u_k = u_{e,0} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) (-1)^k$$

3^{ème} cas : $\sqrt{2} w_0 < w$

On pose $\vartheta = \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)$, l'équation devient $r^2 + 2 \cosh(\vartheta) r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r + e^\vartheta)(r + e^{-\vartheta}) = 0$

La forme générale est donc $u_k = \alpha e^{\vartheta k} + \beta e^{-\vartheta k} = \alpha' \cosh(k\vartheta) + \beta' \sinh(k\vartheta)$

Introduisons désormais les conditions aux bords :

$$u_0 = u_{e,0} = \alpha' \text{ et } u_{N+1} = 0 = \alpha' \cosh((N+1)\vartheta) + \beta' \sinh((N+1)\vartheta)$$

Dans la gamme de fréquences, $\sinh((N+1)\vartheta) \neq 0$

$$\text{Ainsi, } \beta' = -u_{e,0} \frac{\cosh((N+1)\vartheta)}{\sinh((N+1)\vartheta)}$$

Bref

$$u_k = u_{e,0} \left(\cosh(k\vartheta) - \frac{\cosh((N+1)\vartheta)}{\sinh((N+1)\vartheta)} \sinh(k\vartheta) \right)$$

Cette forme n'étant pas très expressive, en remplaçant les fonctions trigonométriques hyperboliques par les exponentielles, on montre (3 lignes de calculs, pas plus) que cette expression se simplifie en :

$$u_k = (-1)^k u_{e,0} \frac{\sinh((N+1-k)\vartheta)}{\sinh((N+1)\vartheta)} \text{ avec } \vartheta = \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)$$

En résumé,

$$\text{Pour } w < \sqrt{2} w_0, \quad u_k = u_{e,0} \frac{\sin((N+1-k)\vartheta)}{\sin((N+1)\vartheta)} \text{ avec } \vartheta = \arccos(1 - x^2)$$

$$\text{Pour } w = \sqrt{2} w_0, \quad u_k = u_{e,0} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) (-1)^k$$

Pour $\sqrt{2} w_0 < w$,
$$u_k = (-1)^k u_{e,0} \frac{\sinh((N+1-k)\vartheta)}{\sinh((N+1)\vartheta)}$$
 avec $\vartheta = \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)$

En fait, l'amplitude en fonction de x peut (à k fixé) être ré exprimée sous forme de fonction rationnelle.

Utilisons les polynômes de Tchebychev de 2^{ème} espèce, définis comme les uniques polynômes tels que $\sin(k\vartheta) = \sin(\vartheta)U_k(\cos(\vartheta))$, et remarquons que $U_k(-1) = (-1)^{k+1}k$, U_k a la parité contraire de celle de k et que $\sinh(k\vartheta) = \sinh(\vartheta)U_k(\cosh(\vartheta))$.

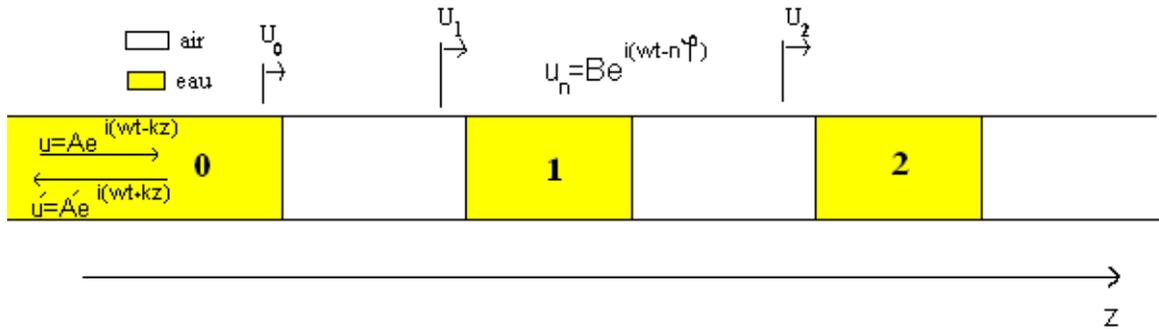
Les expressions se résument en une seule :
$$u_k = u_{e,0} \frac{U_{n+1-k}(1-x^2)}{U_{n+1}(1-x^2)}$$

VII) Transmission à travers un mur de bulles

1) Coefficient de transmission à travers une chaîne infinie

On calculera d'abord le coefficient de transmission à l'entrée d'une chaîne infinie. Ensuite celui à la sortie d'une chaîne infinie. Et enfin on les rejoindra en prenant en compte le déphasage (complexe) entre l'entrée et la sortie.

a) Coefficient de transmission à l'entrée



La pression de l'air entre les gouttes 1 et 2 est celle prévue par la forme : $U_n = B e^{i(\omega t - n\phi)}$

Pour que la bulle 1 ait ce même mouvement, on a nécessairement $U_0 = B e^{i\omega t}$

Ainsi $U_0 = B e^{i\omega t} = A e^{i\omega t} + A' e^{i\omega t}$ et $B = A + A'$

Pour l'air compris entre la bulle n et la bulle $n+1$, $dp = -\frac{u_{n+1} - u_n}{rb \cdot \chi}$

La continuité de la pression en $x=0$ s'exprime donc : $i\omega p_{eau}(A - A') = B \cdot \frac{1 - e^{-i\phi}}{rb \chi}$

On pose $w_e = \frac{c_{eau}}{re}$ puis $\gamma = \frac{w_e}{w_0}$

On remarque dès maintenant : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\chi_{air} \cdot rb}{\chi_{eau} \cdot re}}$ donc $\gamma^2 \gg 1$

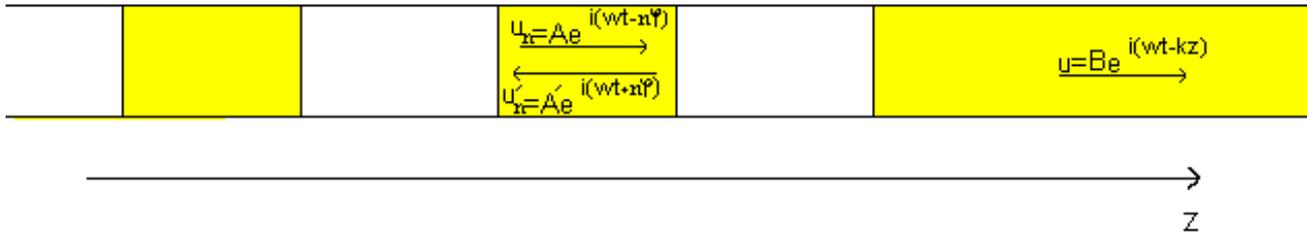
En introduisant $t = \frac{B}{A}$ et $r = \frac{A'}{A}$ les équations deviennent :

$$1 + r = t \quad \text{et} \quad 2i\gamma x(1 - r) = t(1 - e^{-i\phi})$$

On en tire $t = \frac{4i\gamma x}{1 + 2i\gamma x - e^{-i\phi}}$

b) Coefficient de transmission à la sortie

□ air
 ■ eau

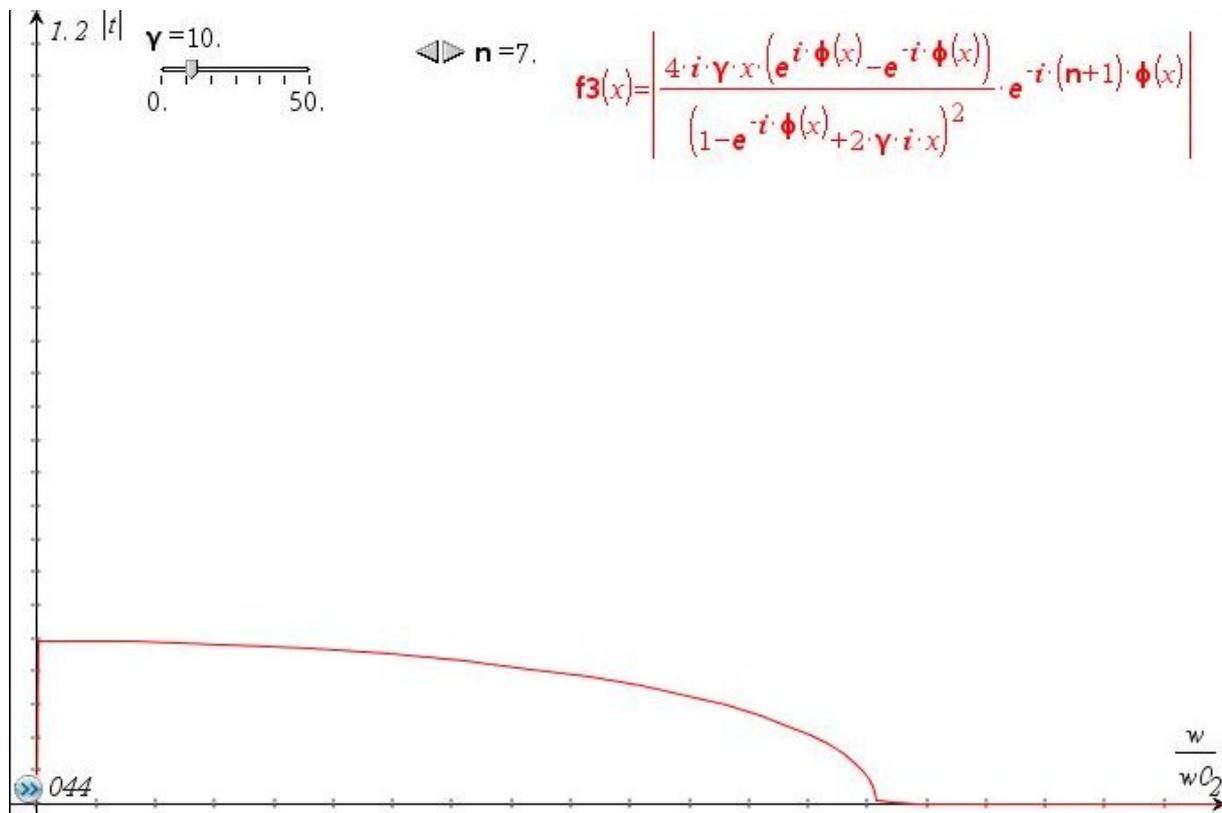


Un travail similaire donne : $t = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{1 + 2i\gamma x - e^{-i\varphi}}$

c) coefficient total de transmission pour une chaîne « infinie de N gouttes »

$$t_{total} = t_{entrée} \cdot t_{sortie} \cdot e^{-i(N+1)\varphi}$$

Donc $t_{total} = \frac{4i\gamma x (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{1 + 2i\gamma x - e^{-i\varphi}} \cdot e^{-(N+1)i\varphi}$



Le cas traité ici peut apparaître contradictoire. En fait le raisonnement revient tout simplement à considérer la transmission à l'entrée puis la propagation et enfin la transmission à la sortie.

On néglige donc toutes les réflexions par rapport aux transmissions. Dans le 2) on ne négligera plus les réflexions et on prendra également en compte le nombre fini de bulles.

d) Cas limite de la fréquence quasiment nulle

Les impédances acoustiques n sont : $n_{eau} = \rho_{eau} \cdot c_{eau}$

$$n_{mélange} = \rho_{mélange} \cdot c_{mélange} = \rho \frac{re}{re + rb} \cdot \frac{re + rb}{\sqrt{2}} w_0 = \frac{\rho re}{\sqrt{2}} w_0$$

Avec toujours $w_e = \frac{c_{eau}}{re}$ et $\gamma = \frac{w_e}{w_0}$

$$t_{entrée} = \frac{2 n_{mélange}}{n_{mélange} + n_{eau}} = \frac{2\sqrt{2} \gamma}{1 + \sqrt{2} \gamma}$$

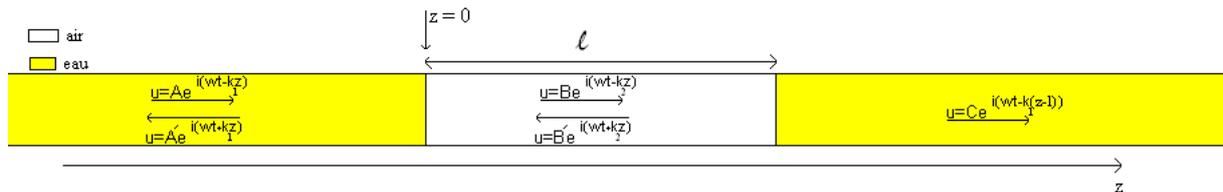
$$t_{sortie} = \frac{2 n_{eau}}{n_{mélange} + n_{eau}} = \frac{2}{1 + \sqrt{2} \gamma}$$

$$t_{traversée} = t_{entrée} \cdot t_{sortie} \text{ déphasage} = \frac{4\sqrt{2} \gamma}{(1 + \sqrt{2} \gamma)^2}$$

Les coefficients obtenus ici peuvent également se déduire des coefficients des a) b) c) par passage à la limite.

2) Coefficient de réflexion pour N bulles

a) Traversée d'un milieu continu pour une longueur l



- Pour $z < 0$: Onde incidente : $u = Ae^{i(\omega t - kz)}$
 Onde réfléchie : $u = A'e^{i(\omega t + kz)}$

-Pour $0 < z < l$: $u = Be^{i(\omega t - kz)}$ et $u = B'e^{i(\omega t + kz)}$

-Pour $l < z$: onde transmise : $u = C e^{i(\omega t - k_1(z-l))}$

Continuité de la position en $z=0$: $A + A' = B + B'$

Continuité de la position en $z=l$: $B e^{-i k_2 l} + B' e^{i k_2 l} = C$

Continuité de la pression en $z=0$: $i \omega \rho c_{eau} (A - A') = i \omega \rho_{mélange} c_{mélange} (B - B')$

Soit $\sqrt{2} \gamma (A - A') = B - B'$

Continuité de la pression en $z=l$: $B \cdot e^{-i \cdot k_2 l} - B' \cdot e^{i \cdot k_2 l} = \sqrt{2} \gamma C$

En éliminant A' et C des relations exprimant la continuité de la pression, On obtient le système :

$$\begin{cases} B(1 + \sqrt{2} \gamma) - B'(1 - \sqrt{2} \gamma) = 2\sqrt{2} \gamma A \\ B \cdot e^{-i \cdot k_2 l} (1 - \sqrt{2} \gamma) - B' \cdot e^{i \cdot k_2 l} (1 + \sqrt{2} \gamma) = 0 \end{cases}$$

Calculons et simplifions le déterminant du système :

$$\det = -e^{+i \cdot k_2 l} (1 + \sqrt{2} \gamma)^2 + e^{-i \cdot k_2 l} (1 - \sqrt{2} \gamma)^2$$

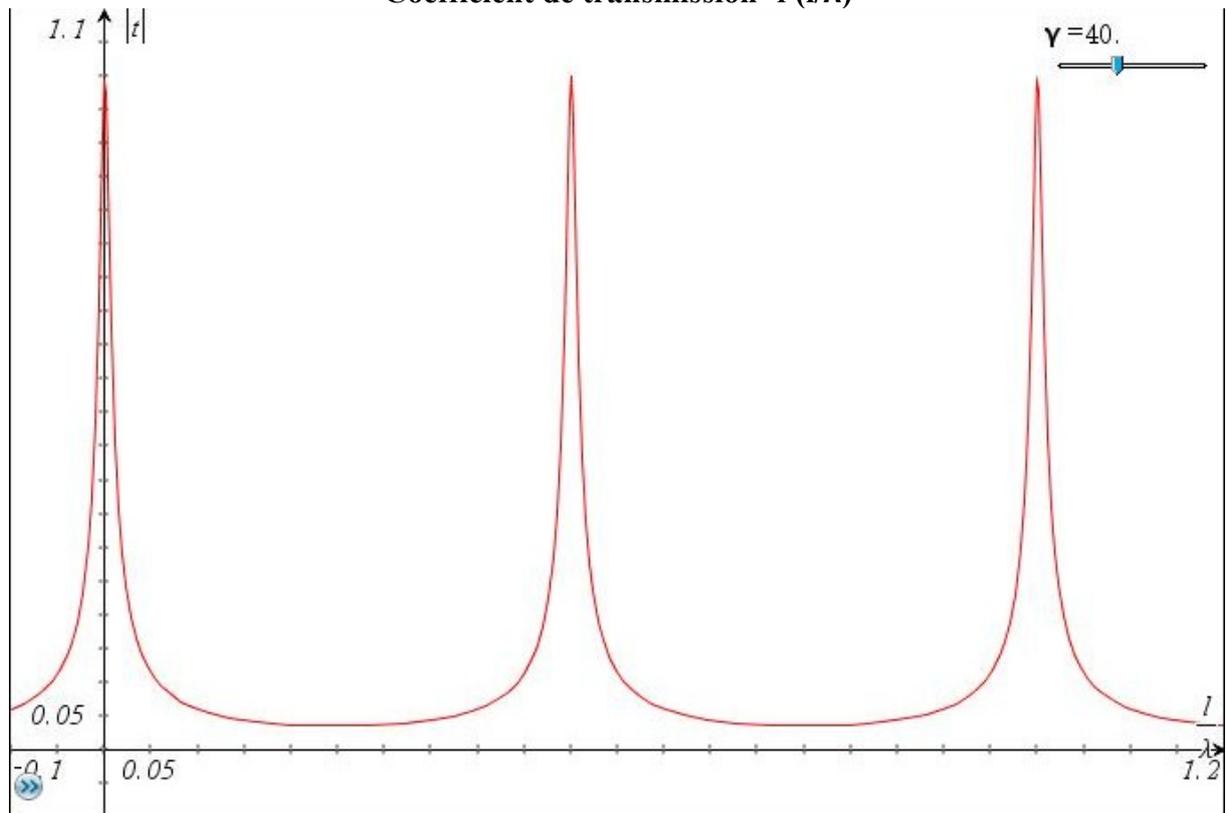
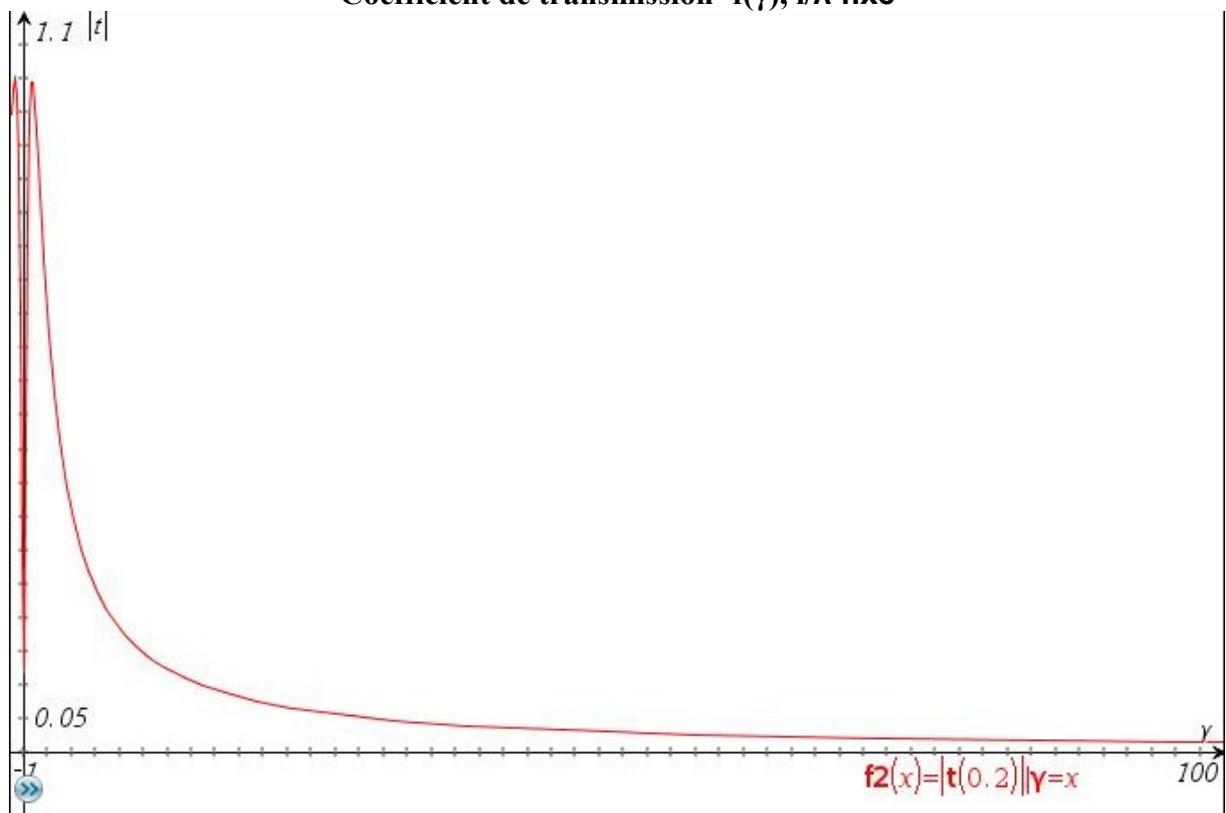
$$\det = -2 \left(i (1 + 2\gamma^2) \sin(k_2 l) + 2\sqrt{2} \gamma \cos(k_2 l) \right)$$

Les solutions sont : $B = \frac{-(1 + \sqrt{2} \gamma) 2\sqrt{2} \gamma}{\det} A e^{i \cdot k_2 l}$ et $B' = \frac{-(1 - \sqrt{2} \gamma) 2\sqrt{2} \gamma}{\det} A e^{-i \cdot k_2 l}$

On en déduit le coefficient de transmission.

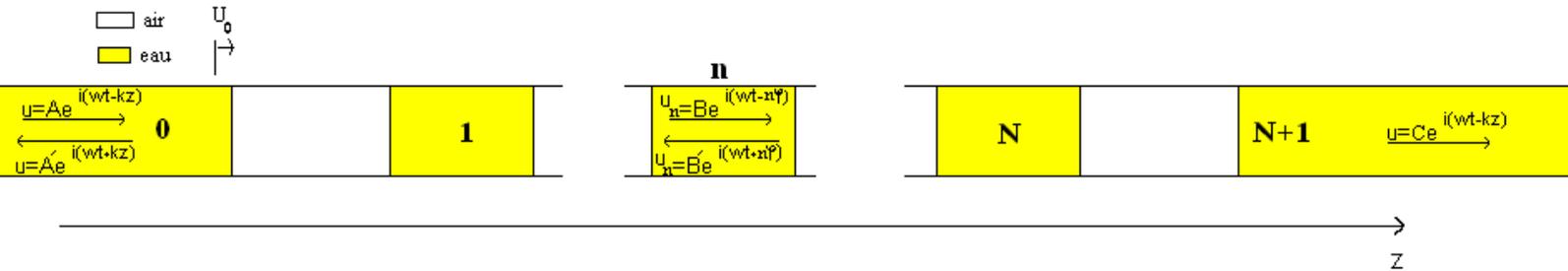
$$t = \frac{C}{A} = \frac{-(1 + \sqrt{2} \gamma) 2\sqrt{2} \gamma - (1 - \sqrt{2} \gamma) 2\sqrt{2} \gamma}{\det} = \frac{-4\sqrt{2} \gamma}{\det}$$

$$t = \frac{2i\gamma}{-(1 + 2\gamma^2) \frac{\sin(k_2 l)}{\sqrt{2}} + 2i\gamma \cos(k_2 l)}$$

Coefficient de transmission= $f(l/\lambda)$ Coefficient de transmission= $f(\gamma)$, l/λ fixé

b) Traversée de N bulles

Pour ne pas multiplier les équations, on s'en tiendra au cas $w < \sqrt{2} w_0$



- Pour $z < 0$: Onde incidente : $u = Ae^{i(\omega t - kz)}$

Onde réfléchie : $u = A'e^{i(\omega t + kz)}$

- Pour $0 < z < l$: L'équation de couplage s'exprime : $u_{k+1} - 2(1 - x^2)u_k + u_{k-1} = 0$

En interprétant u_n comme une suite récurrente, Les solutions sont de la forme :

$$u_n = (Be^{-in\varphi} + B'e^{+in\varphi})e^{i\omega t}, \text{ avec } \varphi = \arccos(1 - x^2)$$

- Pour $l < z$: onde transmise : $u = Ce^{i(\omega t - kz)}$

Continuité de la position pour $k=0$: $A + A' = B + B'$

Continuité de la position en $k=N+1$: $B e^{-i(N+1)\varphi} + B' e^{i(N+1)\varphi} = C$

Continuité de la pression en $z=0$: $i\omega\rho c_{eau}(A - A') = \frac{B(1 - e^{-i\varphi}) + B'(1 - e^{+i\varphi})}{rb\chi}$

$$\text{Soit } 2i\gamma x(A - A') = B(1 - e^{-i\varphi}) + B'(1 - e^{+i\varphi})$$

Continuité de la pression en $z=l$: $B \cdot e^{-i(N+1)\varphi} (e^{i\varphi} - 1) + B' \cdot e^{+i(N+1)\varphi} (e^{-i\varphi} - 1) = 2i\gamma x C$

En éliminant A' et C des relations exprimant la continuité de la pression, On obtient le système :

$$\begin{cases} B(2i\gamma x + 1 - e^{-i\varphi}) + B'(2i\gamma x + 1 - e^{i\varphi}) = 4i\gamma x A \\ B \cdot e^{-i(N+1)\varphi} (2i\gamma x + 1 - e^{i\varphi}) + B' \cdot e^{+i(N+1)\varphi} (2i\gamma x + 1 - e^{-i\varphi}) = 0 \end{cases}$$

Calculons et simplifions le déterminant du système :

$$\begin{aligned} det &= e^{+i(N+1)\varphi} (2i\gamma x + 1 - e^{-i\varphi})^2 - e^{-i(N+1)\varphi} (2i\gamma x + 1 - e^{i\varphi})^2 \\ det &= 2i \left((2i\gamma x + 1)^2 \sin((N+1)\varphi) - 2(2i\gamma x + 1)\sin(N\varphi) + \sin((N-1)\varphi) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } a^2 \sin((N+1)\varphi) - 2a \sin(N\varphi) + \sin((N-1)\varphi) &= \sin((N \\ &+ 1)\varphi) (a^2 - 2a \cos(\varphi) + 2(\cos(\varphi))^2 - 1) + \sin(\varphi) \cdot \cos((N \\ &+ 1)\varphi) (2a - 2 \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition de φ , $\cos(\varphi) = 1 - x^2$

En remplaçant, on trouve

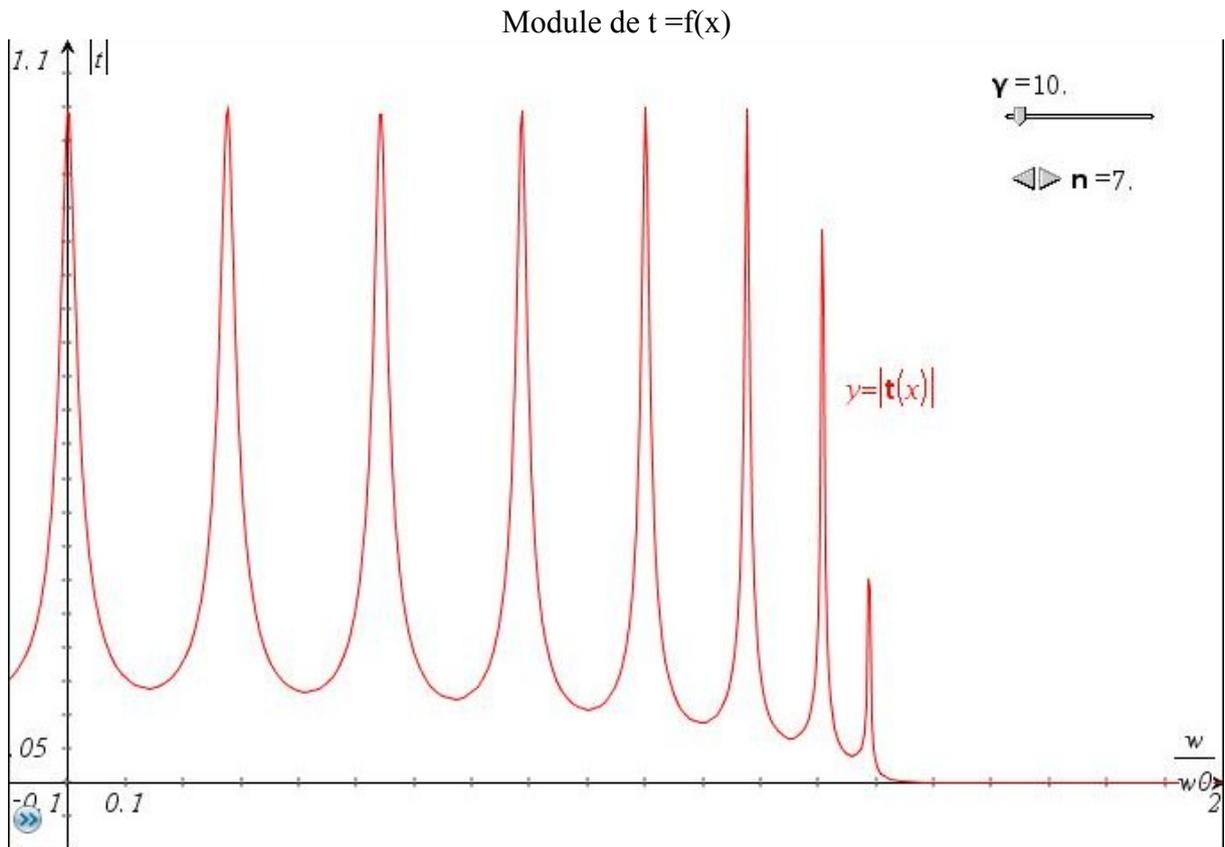
$$det = 4i \left(\sin((N+1)\varphi) (-x^2(1+2\gamma^2) + 2i\gamma x^3 + x^4) + \sin(\varphi) \cdot \cos((N+1)\varphi) \cdot (2i\gamma x + x^2) \right)$$

$$\text{Puis } B = \frac{4i\gamma x (2i\gamma x + 1 - e^{-i\varphi})}{det} A e^{+i(N+1)\varphi} \quad \text{et} \quad B' = \frac{-4i\gamma x (2i\gamma x + 1 - e^{+i\varphi})}{det} A e^{-i(N+1)\varphi}$$

On en déduit le coefficient de transmission.

$$t = \frac{C}{A} = \frac{B e^{-i(N+1)\varphi} + B' e^{+i(N+1)\varphi}}{det} = \frac{4i(2i\gamma x)\sin(\varphi)}{det}$$

$$t = \frac{2i\gamma}{\frac{\sin((N+1)\varphi)}{\sin(\varphi)} (-x(1+2\gamma^2) + 2i\gamma x^2 + x^3) + \cos((N+1)\varphi) \cdot (2i\gamma + x)}$$



Remarque : pour $w > \sqrt{2} w_0$ le même travail donne :

$$t = \frac{2i\gamma}{(-1)^N \cdot \frac{\sinh((N+1)\varphi)}{\sinh(\varphi)} (-x(1+2\gamma^2) + 2i\gamma x^2 + x^3) + (-1)^{N+1} \cdot \cosh((N+1)\varphi) \cdot (2i\gamma + x)}$$

Encore une fois l'expression à l'aide des polynômes de Tchebychev ne dépend pas de la gamme de fréquences.

Annexe 1 : Résolution complète par diagonalisation de la matrice

Début : voir VI)

Toutes les équations se compactent en $\frac{d^2}{dt^2} U(t) = w_0^2 (A U(t) + B(t))$

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & [0] \\ 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & -1 & \frac{1}{2} \\ [0] & & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} \frac{u_e(t)}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_n(t) \end{bmatrix}.$$

La solution (particulière) en régime forcé a déjà été déterminée en VI). Nous allons résoudre l'équation homogène associée. Pour cela il faudra diagonaliser $-A$. Le résultat de cette étude permettra également d'inverser facilement une matrice de la forme $A+x^2 I_d$, et donc de déterminer la solution en régime permanent pour une excitation quelconque.

$$-A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & [0] \\ 0 & -\frac{1}{2} & \dots & \\ & & 1 & -\frac{1}{2} \\ [0] & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$-A$ est symétrique. A ce titre elle est diagonalisable dans \mathbb{R}

Procédons à une analyse.

Soit λ une valeur propre.

Recherchons les vecteurs propres $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}$ associés à la valeur propre λ

En posant $x_0=0$ et $x_{(N+1)}=0$,

$$-AX = \lambda X \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, x_k - \frac{1}{2}(x_{(k-1)} + x_{(k+1)}) = \lambda x_k$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, x_{(k+1)} - 2(1 - \lambda)x_k + x_{(k-1)} = 0$$

La suite (x_k) est donc récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 2(1 - \lambda)r + 1 = 0$$

$$\Delta = 4(1 - \lambda)^2 - 4 = -4\lambda(2 - \lambda)$$

Or si jamais $\Delta > 0$, $x_k = Ae^{r_1 \cdot k} + Be^{r_2 \cdot k}$. Les conditions aux bords imposent alors $A=0$ et $B=0$.

Puis $X=0$; λ ne peut alors pas être valeur propre.

Ainsi $\Delta < 0$ et $0 < \lambda < 2$

On peut donc poser : $1 - \lambda = \cos(\theta)$

L'équation caractéristique se factorise en : $(r - e^{i\theta}) \cdot (r - e^{-i\theta}) = 0$

Ainsi x_k est de la forme : $x_k = A \cos(\theta \cdot k) + B \sin(\theta \cdot k)$

$$x_0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$x_{(N+1)} = 0 \Rightarrow B \sin((N+1)\theta) = 0$$

X étant vecteur propre $X \neq 0$ donc $B \neq 0$

$$\text{Alors } \sin((N+1)\theta) = 0 \text{ et } \theta = \frac{p\pi}{N+1}, p \in \mathbb{Z}$$

$p=0$ et $p=N+1$ entraînent $X=0$ et ne conviennent pas. Les valeurs de p hors de $\llbracket 1, N \rrbracket$ ne donnent pas de nouvelles valeurs propres potentielles.

Conclusion de l'analyse : λ est de la forme : $\lambda = 1 - \cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right), p \in \llbracket 1, N \rrbracket$

Synthèse :

Pour $\lambda_p = 1 - \cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right), p \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\Pi_p = \left(\sin\left(k \cdot \frac{p\pi}{N+1}\right) \right)_k$

est un vecteur propre qui convient par construction.

On cherchait N valeurs propres, On en a obtenu N convenant. On les a toutes.

Conclusion :

$$-A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \left(\sin\left(\frac{k \cdot p \pi}{N+1}\right) \right)_{k,p} \text{ et } D = \text{diag}\left(\left(1 - \cos\left(\frac{p \pi}{N+1}\right)\right)_p\right)$$

Résolution de l'équation homogène :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = w_0^2 A X \Leftrightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} - w_0^2 A X = 0$$

Or pour tout t , $X(t)$ se décompose sur la base de vecteurs propres (π_p)

$$X(t) = \sum_{p=1}^N a_p(t) \Pi_p$$

En injectant cette forme dans l'équation, en utilisant le fait que π_p est un vecteur propre (associé à λ_p) puis que la famille (π_p) est libre, on obtient :

$$\forall p, \frac{d^2 a_p(t)}{dx^2} - \lambda_p w_0^2 a_p(t) = 0$$

Cela se résout en :

$$\forall p, a_p(t) = A_p \cos(\sqrt{\lambda_p} \cdot w_0 t) + B_p \sin(\sqrt{\lambda_p} \cdot w_0 t), \text{ avec } A_p \text{ et } B_p \text{ constantes s'intégrations qui dépendent des conditions initiales.}$$

$$\text{Conclusion : } X(t) = \sum_{p=1}^N \left(A_p \cos(\sqrt{\lambda_p} \cdot w_0 t) + B_p \sin(\sqrt{\lambda_p} \cdot w_0 t) \right) \Pi_p$$

$$\text{Avec } \lambda_p = 1 - \cos\left(\frac{p \pi}{N+1}\right) \text{ et } \Pi_p = \left(\sin\left(k \cdot \frac{p \pi}{N+1}\right) \right)_k$$

$$\text{Les pulsations propres sont : } w = w_0 \sqrt{1 - \cos\left(\frac{p \pi}{N+1}\right)}, p \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

Complément : inversion de P (bien qu'inutile pour l'équation homogène, elle est nécessaire pour résoudre l'équation complète)

-A est symétrique (réelle) donc ses sous espaces propres sont orthogonaux. Ses sous espaces propres étant des droites vectorielles, toute base de vecteurs propres est orthogonale (mais pas forcément normée).

Ainsi en notant $P = (C_1, C_2, \dots, C_N)$

$${}^t P P = \left(\langle C_i, C_j \rangle \right)_{i,j} = \text{diag}\left(\left(\|C_p\|^2\right)_p\right) \text{ avec } \langle, \rangle \text{ le produit scalaire canonique et } \| \| \text{ la norme associée}$$

Il ne manque que peu de chose à la transposée de P pour être l'inverse de P.

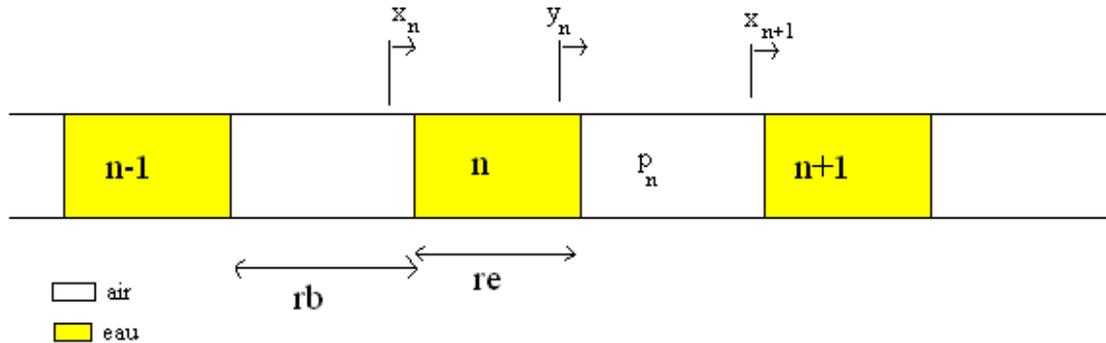
$$\|C_p\|^2 = \sum_{j=1}^N \sin^2\left(\frac{j \cdot p \cdot \pi}{N+1}\right) = \frac{\sum_{j=1}^N \left(e^{i\left(\frac{j \cdot p \cdot 2 \pi}{N+1}\right)} + e^{-i\left(\frac{j \cdot p \cdot 2 \pi}{N+1}\right)} - 2 \right)}{-4}$$

$$\text{Or } \sum_{j=1}^N e^{i\left(\frac{j \cdot p \cdot 2\pi}{N+1}\right)} = \sum_{j=0}^N e^{i\left(\frac{j \cdot p \cdot 2\pi}{N+1}\right)} - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N e^{-i\left(\frac{j \cdot p \cdot 2\pi}{N+1}\right)} = -1$$

$$\text{Ainsi pour tout } p, \quad \|C_p\|^2 = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{Ainsi } P^{-1} = \frac{2}{N+1} {}^t P = \frac{2}{N+1} P$$

Annexe 2 : Cas de l'eau compressible



La définition de u_n n'est plus possible. On la remplace par x_n et y_n (voir schéma) et on appelle $p_n = P_n - P_0$ différence entre la pression de la bulle comprise entre les gouttes n et $n+1$ et la pression au repos.

Par un raisonnement identique à celui mené au début,

$$p_n = - \frac{x_{n+1} - y_n}{rb \cdot \chi_{air}}$$

La cohérence des gouttes d'eau impose (à des termes négligeables près tant que le mouvement est principalement dû à la compression de l'air) que l'accélération de chaque tranche d'eau soit la même. Ainsi le gradient de pression est une constante (fonction du temps tout de même) propre à la bulle.

Appelons z la variable repérant les abscisses et choisissons son origine au commencement de la bulle n .

On a accès au profil de pression dans la bulle (à l'ordre le plus bas) :

$$p(z) = p_{n-1} + \frac{p_n - p_{n-1}}{re} z$$

Au repos la goutte a une largeur re

A un instant quelconque, sa largeur est différente. Soit δre la différence de cette largeur avec re

Considérons une tranche de la bulle d'épaisseur au repos dz . Soit δdz la variation d'épaisseur par rapport au repos.

Toujours en linéarisant,
$$p(z) = - \frac{1}{\chi_{eau}} \frac{\delta dz}{dz}$$

D'où
$$p_{n-1} + \frac{p_n - p_{n-1}}{re} z = - \frac{1}{\chi_{eau}} \frac{\delta dz}{dz}$$

En intégrant par rapport à z entre 0 et re (en fait entre 0 et $re + \delta re$ mais le terme résiduel est négligeable) :

$$\text{Comme } \int_0^{re} \delta dz = \delta re, \quad \delta re = -\frac{p_n + p_{n-1}}{2} re \chi_{eau}$$

Tout se passe comme si la goutte n était soumise à une pression homogène $\frac{p_n + p_{n-1}}{2}$
(c'est ce qui arrive lorsque l'on linéarise tout)

$$\text{Or } y_n = x_n + \delta re$$

Ainsi la pression dans la nième bulle vérifie l'équation :

$$p_n = -\frac{x_{n+1} - x_n}{rb \cdot \chi_{air}} - \frac{p_n + p_{n-1}}{2} \cdot \frac{re \cdot \chi_{eau}}{rb \cdot \chi_{air}}$$

La prise en compte de la compressibilité de l'eau donne des différences de pressions plus basses.

Remarque importante : on voit bien ici que ce n'est pas la compressibilité de l'air qu'il faut négliger devant celle de l'eau mais qu'il faut prendre en compte également la taille des bulles et gouttes. Ceci avait déjà été remarqué lors du travail sur les coefficients de transmissions.