

Propagation d'onde sonore dans un milieu non homogène : l'eau contenant des bulles

On cherche souvent à optimiser la puissance acoustique transmise entre deux milieux (pour une échographie par exemple). Mais il arrive également que l'on cherche à la minimiser : c'est le cas de l'isolation sonore et, bien moins connu, de l'amortissement d'une onde de choc. Connaître l'influence des différents paramètres sur la propagation des ondes acoustiques dans un milieu non homogène comme un mélange eau - bulles d'air permet de maîtriser l'utilisation de ces milieux.

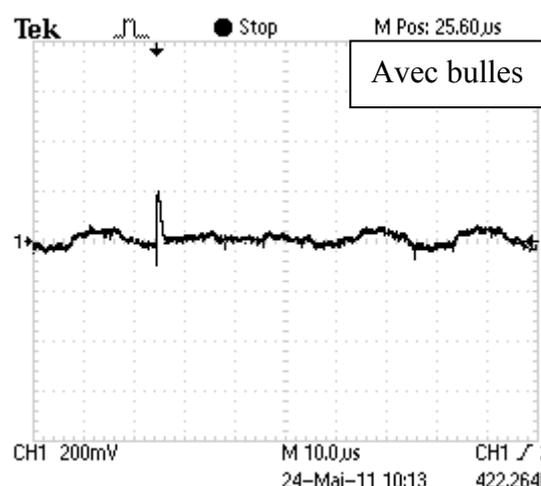
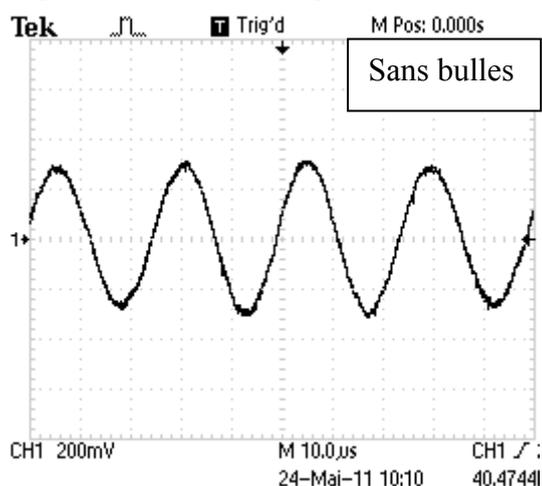
I) Approche empirique

Une première approche consiste à dresser un rideau de bulles, placer un émetteur acoustique et mesurer l'amplitude après la traversée du rideau de bulles.



Montage expérimental de
« mesure directe »

Comme nous le verrons plus tard, seules des fréquences de quelques centaines de Hz permettent d'obtenir des résultats intéressants. Ne disposant (et tardivement) que de microphones efficaces dans l'ultrason (aux alentours de 40 kHz), l'expérience perd de son intérêt : on constate simplement que la présence des bulles supprime le signal au niveau du récepteur. Toute mesure quantitative est impossible.



II) Approche théorique

Essayons de modéliser le comportement de l'onde dans le milieu eau - bulles. Commençons par estimer la longueur d'onde.

A) Préliminaires : longueurs caractéristiques

On raisonnera pour une onde de fréquence $f = 100$ Hz.

Ne connaissant pas sa vitesse de propagation c , on estime la longueur d'onde λ de 3 manières différentes.

En adoptant la vitesse dans l'air $\lambda_{air} = \frac{c_{air}}{f} = 3,4 \text{ m}$

En adoptant la vitesse dans l'eau $\lambda_{eau} = \frac{c_{eau}}{f} = 15 \text{ m}$

A priori, on pourrait considérer que la taille des bulles est négligeable devant la longueur d'onde. Estimons tout de même le plus petit ordre de grandeur envisageable pour cette dernière.

Pour un milieu homogène, $c^2 = \frac{1}{\rho \chi}$, ρ la masse volumique et χ la compressibilité du milieu.

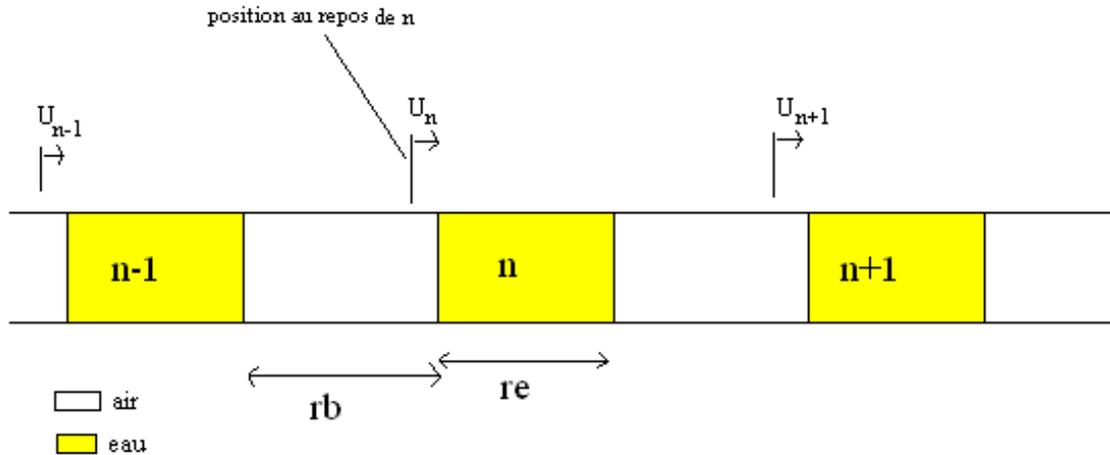
Choisissons les valeurs de ρ et χ qui minimisent c :

$$c_{\min}^2 = \frac{1}{\rho_{eau} \chi_{air}} \quad \text{ainsi,} \quad \lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f} = 12 \text{ cm}$$

Pour des bulles de quelques centimètres de rayon, il n'est pas exclu que l'ordre de grandeur de la taille des bulles soit comparable à celui de la longueur d'onde. On ne pourra ni considérer que la taille des bulles est très petite devant la longueur d'onde, ni très grande. On exclut les modèles où le milieu se comporte comme un milieu homogène et on n'utilisera pas les lois de Descartes. Il faut donc adopter un modèle plus fin.

B) Simplifications et mise en équation

Afin de simplifier considérablement le problème, nous considérerons que la propagation ainsi que le mouvement des bulles sont unidimensionnels. Ainsi les bulles sont comme enfermées dans un tube rigide. Le milieu sera donc modélisé par un enchaînement de bulles d'air et de gouttes d'eau cylindriques, de section S . On note rb la longueur des bulles et re celle des gouttes d'eau.



Pour une fréquence d'une centaine de Hz et des bulles et gouttes centimétriques, les applications numériques nous amènent à adopter les approximations suivantes :

- compressibilité de l'eau négligée devant celle de l'air
- masse de l'air négligée devant celle de l'eau
- phénomènes de frottements négligés
- phénomènes de surfaces négligés

De plus on considérera que les gouttes d'air ne se déforment pas et gardent leur forme initiale (cylindrique dans notre modèle). On se placera également dans le cadre de l'approximation acoustique.

1) Etablissons l'équation liant la pression de l'air au déplacement des bulles avoisinantes (bulles n et $n+1$)

Par définition de la compressibilité de l'air χ : $\chi = \frac{-1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$, V étant le volume.

Comme la compressibilité de l'eau est négligée, on peut définir pour chaque goutte l'écart à sa position d'équilibre (on le note u_n pour la bulle n).

$$\text{Ainsi } dV = \frac{\partial V}{\partial p} \cdot dp = -V \cdot \chi \cdot dp$$

$$\text{Soit } S \cdot (u_{n+1} - u_n) = -S \cdot rb \cdot \chi \cdot dp$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{dp = -\frac{u_{n+1} - u_n}{rb \cdot \chi}}$$

2) Mouvement de la goutte de rang n

Soit m la masse de la goutte d'eau de rang n : $m = \rho \cdot S \cdot re$

Théorème du centre d'inertie appliqué à la goutte d'eau dans le référentiel du laboratoire:

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = S \cdot P(\text{gauche}) - S \cdot P(\text{droite})$$

$$\text{Ainsi : } \rho \cdot S \cdot re \cdot \frac{d^2 u_n}{dt^2} = S \cdot \left(-\frac{u_n - u_{n-1}}{rb \cdot \chi} + \frac{u_{n+1} - u_n}{rb \cdot \chi} \right), \rho : \text{masse volumique de l'eau}$$

$$\text{Conclusion : } \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}{\rho \cdot \chi \cdot re \cdot rb}$$

$$\text{En posant } \omega_0^2 = \frac{2}{\rho \cdot \chi \cdot re \cdot rb}, \quad \boxed{\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2 \left(\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} - u_n \right)} \quad (1)$$

C) Première résolution : passage au continu

Le type de résolution adopté ici n'est valable que pour $(re+rb) \ll \lambda$.

En effectuant un développement limité de $u_n = u(x)$ à l'ordre 2, on retrouve une équation de D'Alembert caractérisée par la célérité :

$$c = \frac{rb + re}{\sqrt{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}}$$

On verra par la suite que l'on retrouve toujours le comportement décrit par cette résolution lorsque l'on fait tendre la fréquence de l'onde vers 0.

La condition $re+rb \ll \lambda$ se réexprime également $\omega \ll \omega_0$.

D) Pour une infinité de bulles : onde progressive harmonique

1) équation de dispersion

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions en régime sinusoïdal forcé. Le déplacement par rapport à l'état de repos est donc recherché sous la forme :

$$u_n(t) = A e^{i(\omega t - k n (re + rb))}, \text{ avec } k \text{ complexe dans le cas général.}$$

En injectant cette forme de solutions dans l'équation (1), on obtient l'équation de dispersion :

$$\boxed{\frac{e^{i k R} + e^{-i k R}}{2} = 1 - x^2} \quad \text{Avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}, \text{ fréquence réduite et } re+rb=R$$

On pose $k=h+i.g$.

$$\text{L'équation se décompose alors en : } \begin{cases} \cos(hR) \cosh(gR) = 1 - x^2 & (1) \\ \sin(hR) \sinh(gR) = 0 & (2) \end{cases}$$

Or (2) $\Leftrightarrow gR = 0$ ou $hR = 0 [2\pi]$

On est donc amené à distinguer 3 cas.

1^{er} cas : $hR = 0 [2\pi]$

Dans ce cas, (S) $\Leftrightarrow \cosh(gR) = 1 - x^2$

Or $\forall x \neq 0, 1 - x^2 < 1$

Il n'y a donc pas de solution excepté pour $x=0$ (qui donne $g=0$). La solution correspond à une situation où les gouttes sont immobiles, espacées d'une distance constante R . Cette solution est physiquement peu intéressante.

2) Etude du 2^{ème} cas : $g=0$

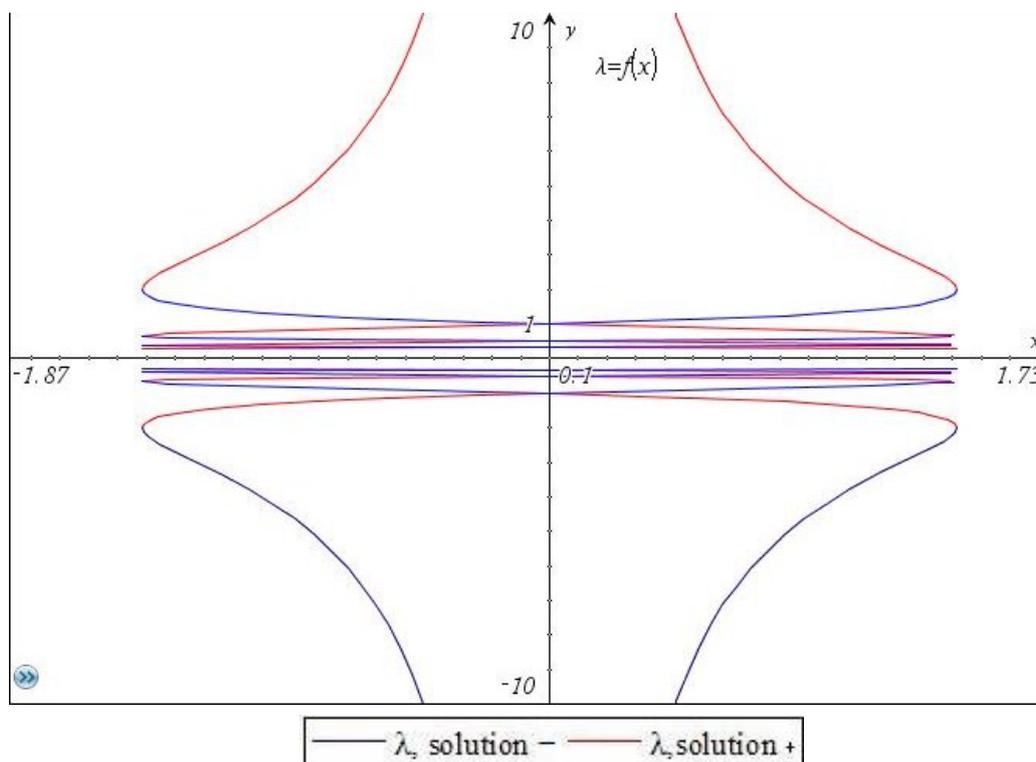
Dans ce cas, le nombre d'onde est réel : il y a propagation sans amortissement.

Le système se simplifie alors en $x^2 = 1 - \cos(k(re + rb))$, avec k réel

On remarque immédiatement que cette relation impose : $\omega \leq \sqrt{2} \omega_0$

Dans ce cas, les solutions sont $k = \frac{2\pi \cdot p \pm \arccos(1 - x^2)}{R}$, $p \in \mathbb{Z}$

Représentons les longueurs d'ondes associées :



Longueur d'onde réduite $\frac{\lambda}{R}$ en fonction de la fréquence réduite x

Il apparaît que la longueur d'onde n'est pas unique. En fait le choix est conventionnel.

On retiendra donc : $k = \frac{\arccos(1-x^2)}{R}$ et $k = \frac{2\pi - \arccos(1-x^2)}{R}$

Les vitesses de phases s'avèrent également être arbitraires.

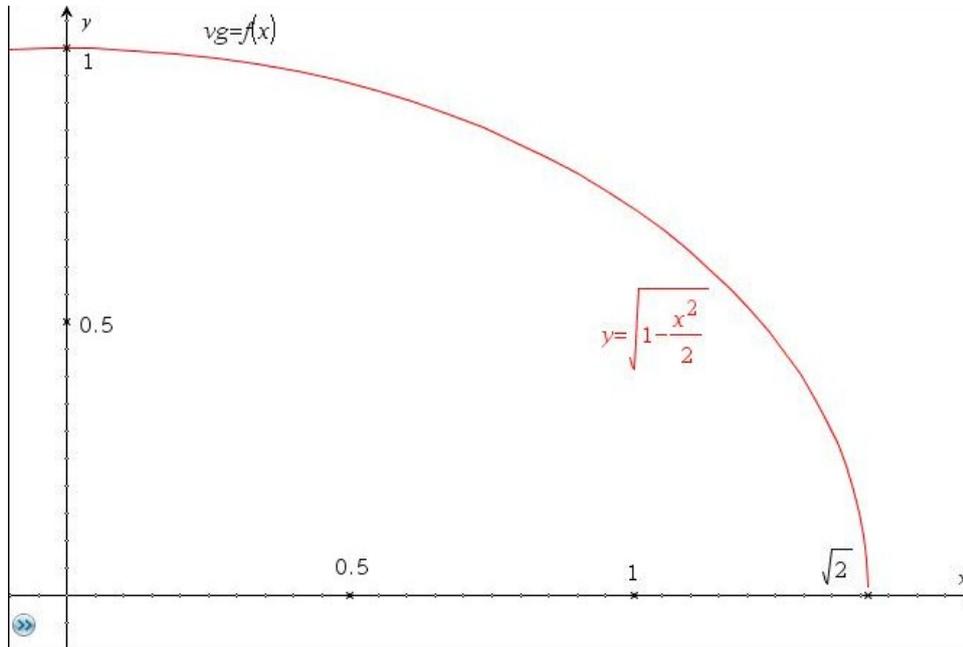
Par contre la vitesse de groupe elle ne prend que deux valeurs : $v_g = \pm \frac{R \omega_0}{2} \sqrt{(2-x^2)}$

Le + correspondant à la première valeur de k proposée et le moins à la deuxième. Ainsi la première valeur correspond à une onde se propageant dans le sens des x croissants et la deuxième dans le sens des x décroissants.

Remarque : $\lim_{x \rightarrow 0} v_g = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0 R = \frac{rb + re}{\sqrt{re \cdot rb \cdot \rho \cdot \chi}}$, le résultat est pertinent car on retrouve la vitesse

de propagation dans le cadre de l'approximation $R \ll \lambda$.

Représentons $\frac{v_g}{\lim_{x \rightarrow 0} v_g} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ en fonction de x :



Vitesse de groupe
en fonction de la
fréquence réduite

Conclusion de la sous partie : la propagation a lieu pour $w \leq \sqrt{2} w_0$

Dans ce cas,

Propagation dans le sens des n croissants :

$$u_n = A e^{i(\omega t - n \arccos(1 - x^2))}$$

Propagation dans le sens des n décroissants :

$$u_n = A e^{i(\omega t - n(2\pi - \arccos(1 - x^2)))} = A e^{i(\omega t + n \arccos(1 - x^2))}$$

2) Etude du 3^{ème} cas : $h R = \pi[2\pi]$

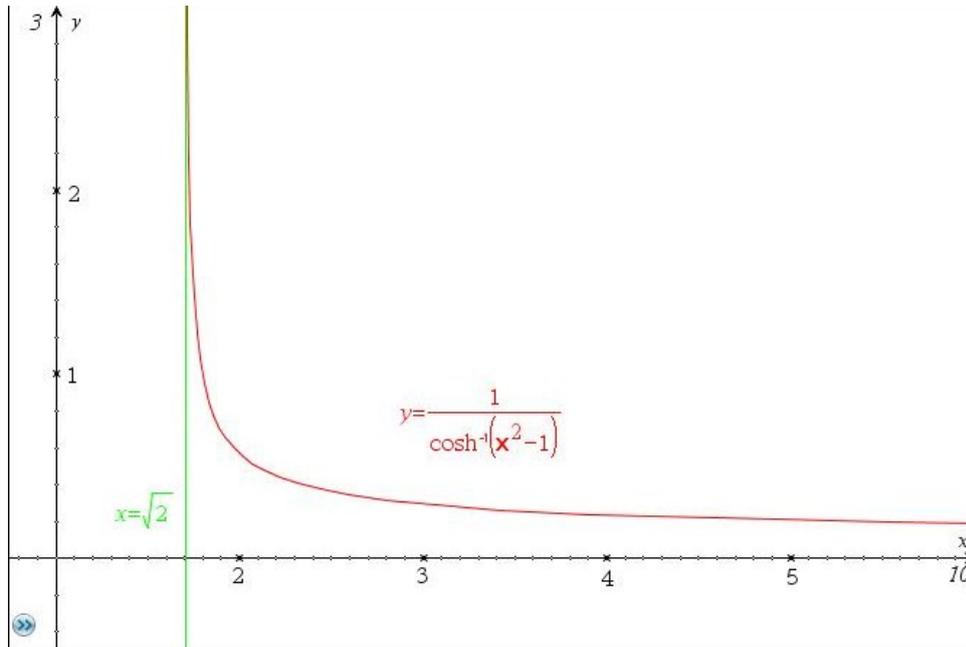
Dans ce cas, le système n'admet pas de solutions pour $\omega < \sqrt{2} \omega_0$

Et pour $\omega \geq \sqrt{2} \omega_0$, $(S) \Leftrightarrow \cosh(gR) = x^2 - 1 \Leftrightarrow g = \pm \frac{\operatorname{arccosh}(x^2 - 1)}{R}$

On obtient une onde évanescente : le nombre d'onde est imaginaire pur.

L'indétermination des signes provient du fait que l'onde peut se « propager » soit dans le sens des n croissants (-), soit dans le sens des n décroissants (+).

Représentons la longueur caractéristique (normée) de l'onde stationnaire :



Longueur
caractéristique
en fonction de la
fréquence réduite

Pour résumer : l'onde évanescente n'a lieu que pour $\omega \geq \sqrt{2} \omega_0$

Et dans ce cas,

« Propagation » dans le sens des n croissants :

$$u_n = A e^{-n \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)} e^{i(\omega t - n \pi)}$$

« Propagation » dans le sens des n décroissants :

$$u_n = A e^{n \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)} e^{i(\omega t + n \pi)}$$

En conclusion, on peut décrire le mouvement des bulles sous forme d'onde progressive harmonique. Cependant plusieurs longueurs d'ondes conviennent, le choix est arbitraire mais la vitesse de groupe ne dépend pas de la description que l'on retient.

Avec $\omega_0^2 = \frac{2}{\rho \cdot \chi \cdot r_e \cdot r_b}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ et $c = \frac{r_b + r_e}{\sqrt{r_e \cdot r_b \cdot \rho \cdot \chi}}$, vitesse de propagation lorsque

la fréquence tend vers 0 (milieu considéré comme homogène),

1)-La propagation n'est possible que pour des pulsations $\omega \leq \sqrt{2} \omega_0$

La propagation se fait alors à une vitesse de groupe : $v_g = c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}$

2)-Pour $\omega \geq \sqrt{2} \omega_0$ on obtient une onde évanescente.

Chaque goutte est alors en opposition de phase avec ses voisines.

La longueur caractéristique associée est $\frac{R}{\operatorname{arccosh}(x^2 - 1)}$.

E) Résolution pour N bulles

Pour l'instant, nous avons traité le problème en considérant une chaîne infinie de bulles et gouttes. Mais en réalité, le nombre de bulles est fini. C'est pour cela que nous allons étudier le comportement d'un nombre fini de bulles.

L'équation différentielle régissant le mouvement de chaque bulle a déjà été établie :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2 \left(\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} - u_n \right) \text{ Avec } \omega_0^2 = \frac{2}{\rho \cdot \chi \cdot r_e \cdot r_b}$$

Cependant, les premières et dernières bulles n'ont pas le même entourage que les autres. Il faut choisir cet entourage. **Dans la perspective d'une situation réalisable expérimentalement, nous retiendrons : la première bulle d'air est précédée par une paroi mobile. Cette dernière est considérée comme une goutte d'eau (rang 0) dont le déplacement $u_e(t)$ est imposé. L'extrémité du tube est bouchée. On considérera donc la présence d'une goutte de rang $N+1$ fixe : $u_{N+1}(t)=0$.**

Nous pourrions résoudre les équations différentielles mais comme seule la solution en régime forcé nous intéresse, contentons nous d'une telle solution. Pour une excitation sinusoïdale

$$u_0 = u_{e,0} \cos(\omega t), \text{ on recherche une solution réelle du type } \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,0} \cos(\omega t) \\ u_{2,0} \cos(\omega t) \\ \vdots \\ u_{N,0} \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

L'équation du mouvement peut être interprétée comme une relation de récurrence d'ordre 2 pour la suite des u_n .

Les solutions sont de la forme : $x_k = A e^{-i \cdot k \cdot \theta} + A' e^{+i \cdot k \cdot \theta}$, θ déterminée par la fréquence

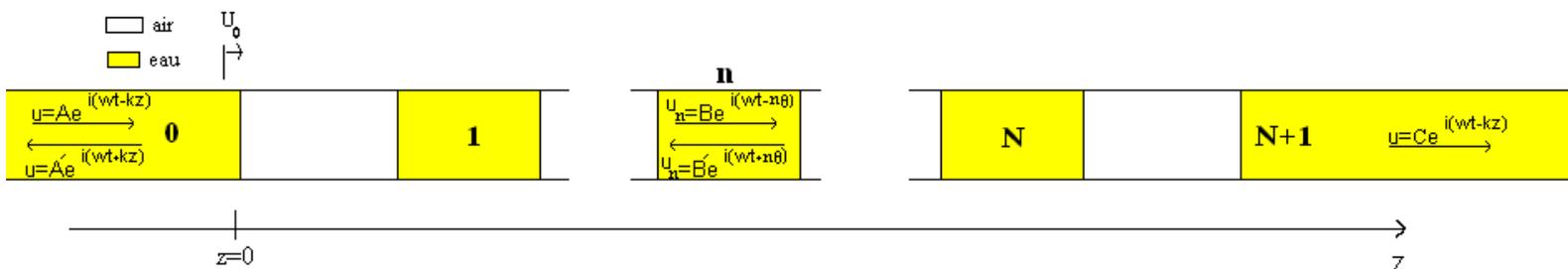
On trouve :

$$\text{Pour } \omega < \sqrt{2} \omega_0, \quad u_k = u_{e,0} \frac{\sin((N+1-k)\vartheta)}{\sin((N+1)\vartheta)} \quad \text{avec } \vartheta = \arccos(1-x^2)$$

$$\text{Pour } \omega = \sqrt{2} \omega_0, \quad u_k = u_{e,0} \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) (-1)^k$$

$$\text{Pour } \sqrt{2} \omega_0 < \omega, \quad u_k = (-1)^k u_{e,0} \frac{\sinh((N+1-k)\vartheta)}{\sinh((N+1)\vartheta)} \quad \text{avec } \vartheta = \operatorname{arccosh}(x^2 - 1)$$

F) Transmission à travers N bulles



Soient N bulles entourées d'eau et une onde incidente monochromatique provenant de moins l'infini. Hors de la zone où il y a des bulles, on considère l'eau compressible et donc une propagation à la célérité dans l'eau c_{eau} . Le mouvement des bulles est régi par les mêmes équations que dans le paragraphe précédent sauf que les conditions aux limites ne sont plus imposées par l'expérience mais par le mouvement de l'eau avant et après la zone de bulles.

Le déplacement des bulles est toujours de la forme $u_n = (B e^{-i n \theta} + B' e^{+i n \theta}) e^{i \omega t}$.

Les conditions aux limites s'expriment : $u_0 = (B + B') e^{i \omega t} = (A + A') e^{i \omega t}$ et

$$u_{N+1} = (B e^{-i(N+1)\theta} + B' e^{+i(N+1)\theta}) e^{i \omega t} = C e^{i \omega t}$$

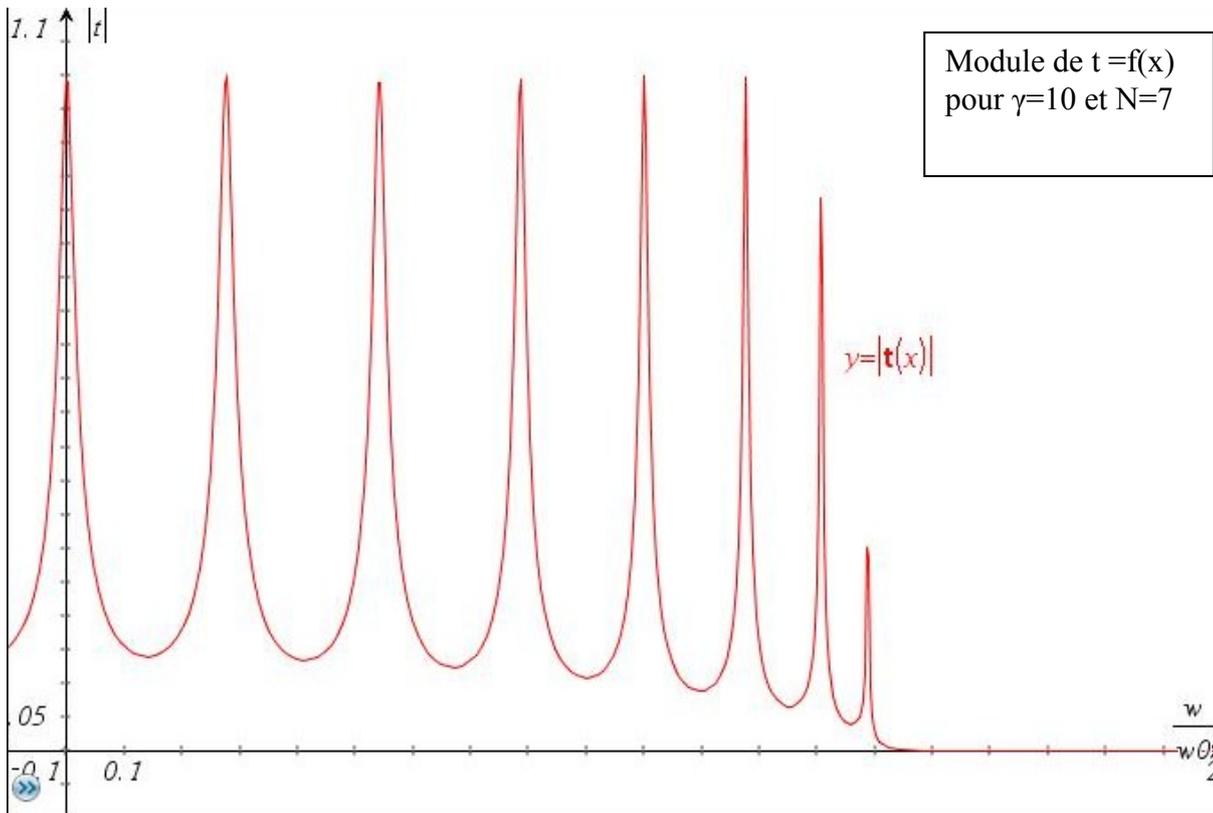
La continuité de la pression en $z=0$ et $z=N(re+rb)+rb$ permet de déterminer A' et C .

En posant $\omega_e = \frac{c_{\text{eau}}}{re}$ et $\gamma = \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\chi_{\text{air}} \cdot rb}{\chi_{\text{eau}} \cdot re}}$, pour $\omega < \sqrt{2} \omega_0$ et toujours avec

$\vartheta = \arccos(1 - x^2)$, on trouve :

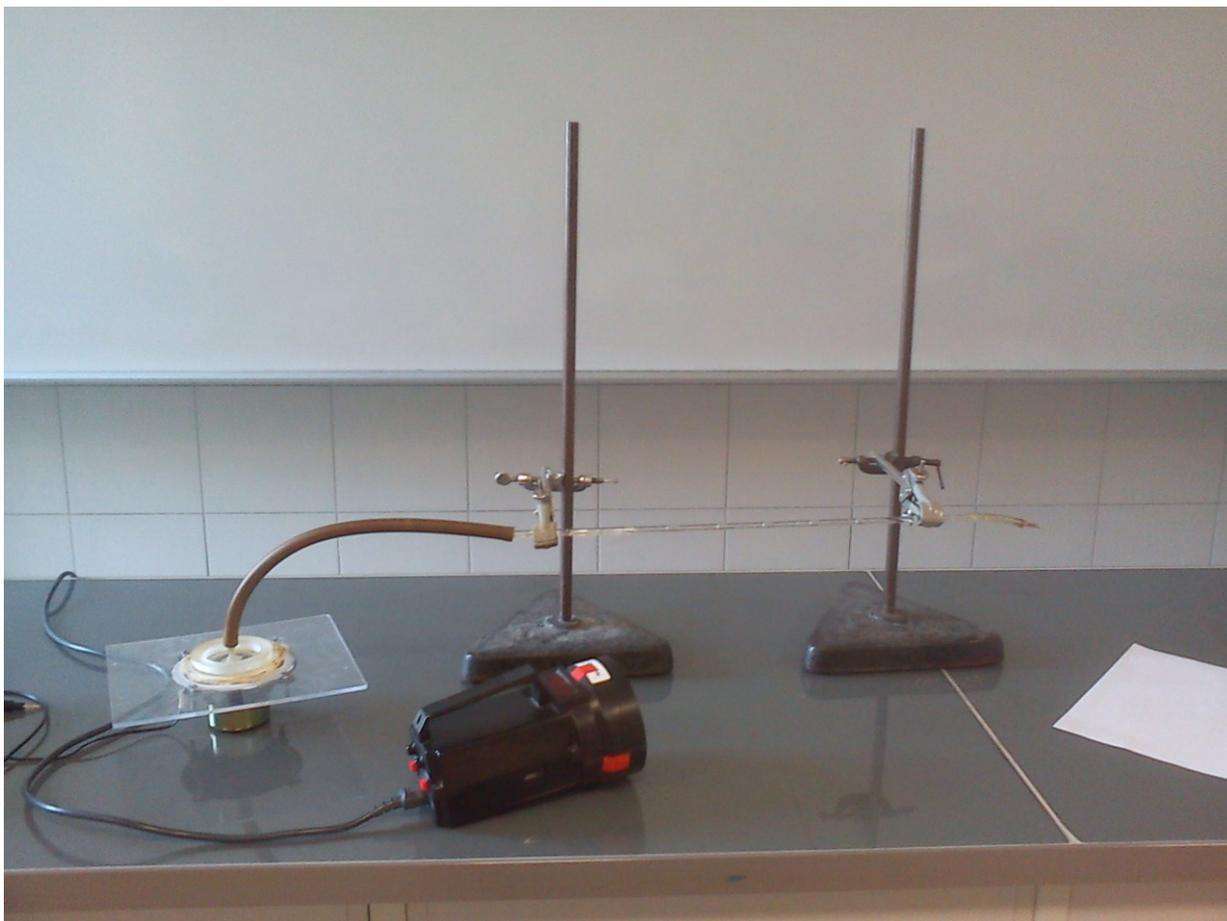
$$t = \frac{2i\gamma}{\frac{\sin((N+1)\theta)}{\sin(\theta)} (-x(1+2\gamma^2) + 2i\gamma x^2 + x^3) + \cos((N+1)\theta) \cdot (2i\gamma + x)}$$

Pour les autres domaines de fréquences ($\omega = \sqrt{2} \omega_0$ et $\sqrt{2} \omega_0 < \omega$), l'expression est similaire.



III) Vérification expérimentale

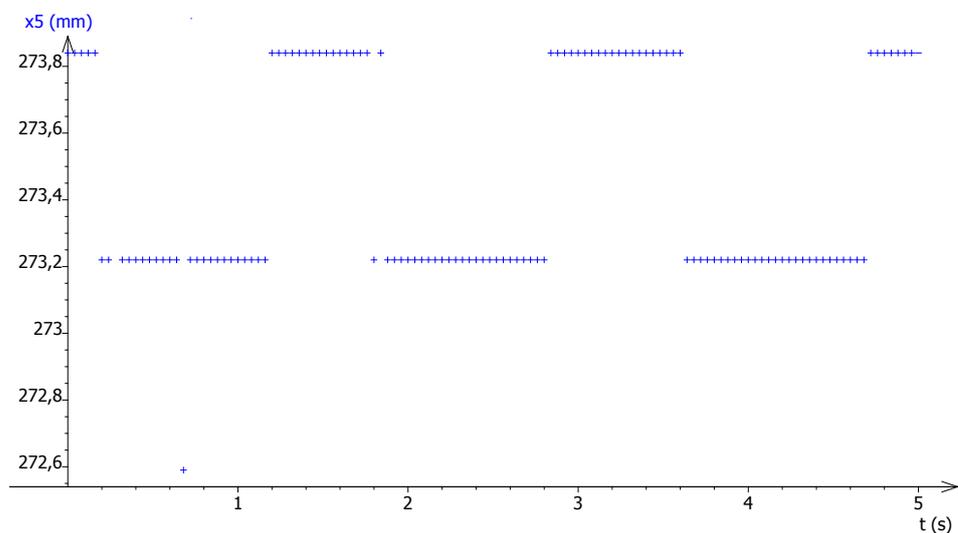
Le modèle théorique adopté présente l'avantage de correspondre à une situation expérimentalement réalisable. L'amplitude des oscillations étant faible, les mesures sont délicates à réaliser et la seule grandeur accessible est la phase des gouttes. Le modèle théorique qui néglige les frottements prévoit des bulles soit en phase soit en opposition de phase avec l'excitateur. L'objectif de l'expérience est donc de contrôler les rapports de phases des bulles réelles et de les comparer à la théorie. L'objectif ultime serait de déterminer expérimentalement la pulsation ω_0 .



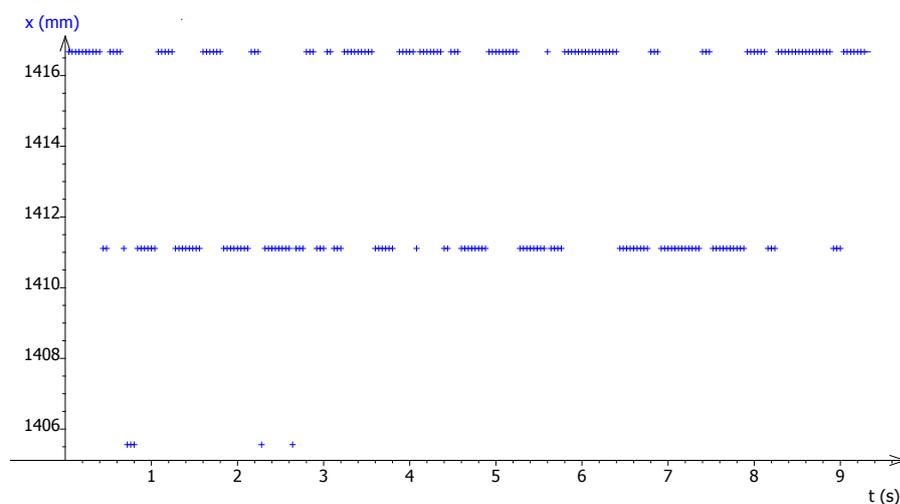
Dans un tube de verre j'injecte de l'eau puis les bulles d'air. Une fois les détails techniques de cette délicate opération réglés (7 bulles sont injectées), l'excitation se fait à l'aide d'un haut parleur modifié afin que la surpression soit dirigée vers le tube. La période apparente du mouvement des bulles est ramenée à la seconde à l'aide d'un stroboscope.

Mon espoir initial d'observer les rapports de phase à l'œil nu a vite été déçu. Il n'est pas possible de fixer simultanément deux points pour les comparer. Il en résulte des « mesures » totalement subjectives.

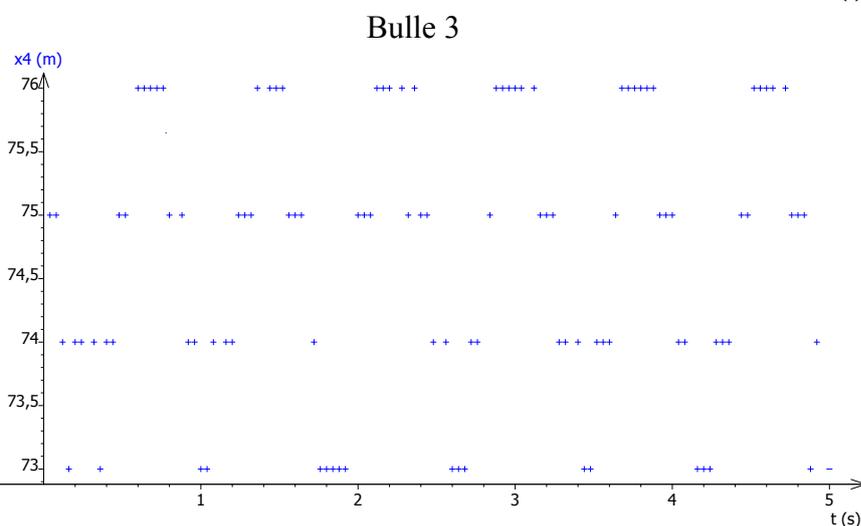
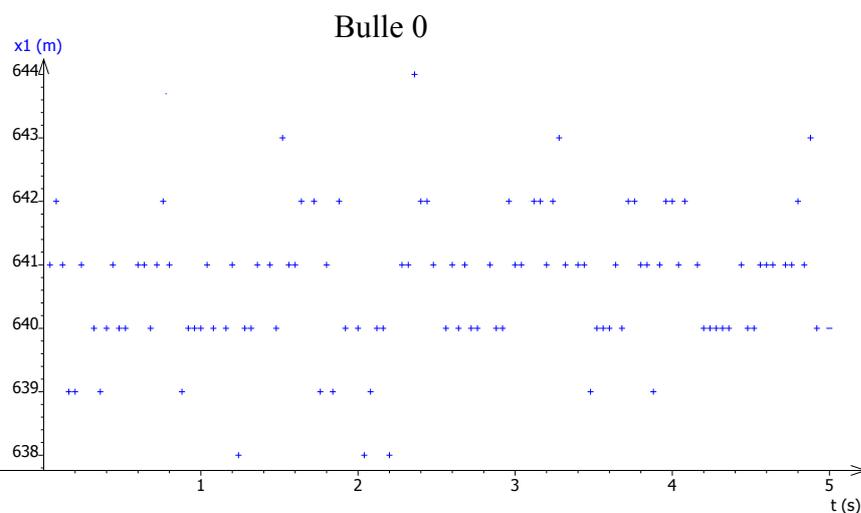
C'est pourquoi j'ai décidé de filmer l'expérience puis de pointer la position des bulles. Observez les résultats : à basse fréquence (40Hz) pour la bulle qui donne le meilleur résultat :



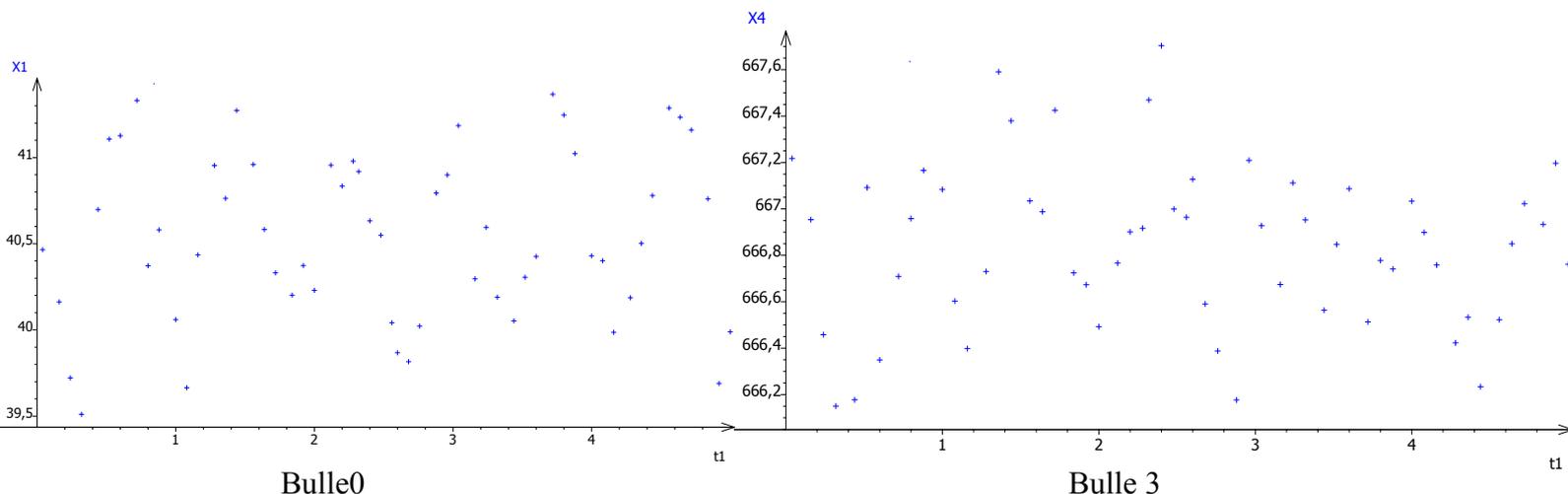
Le résultat est à peu près exploitable mais à plus haute fréquence (120Hz) la courbe est inexploitable dans la perspective d'obtenir une phase.



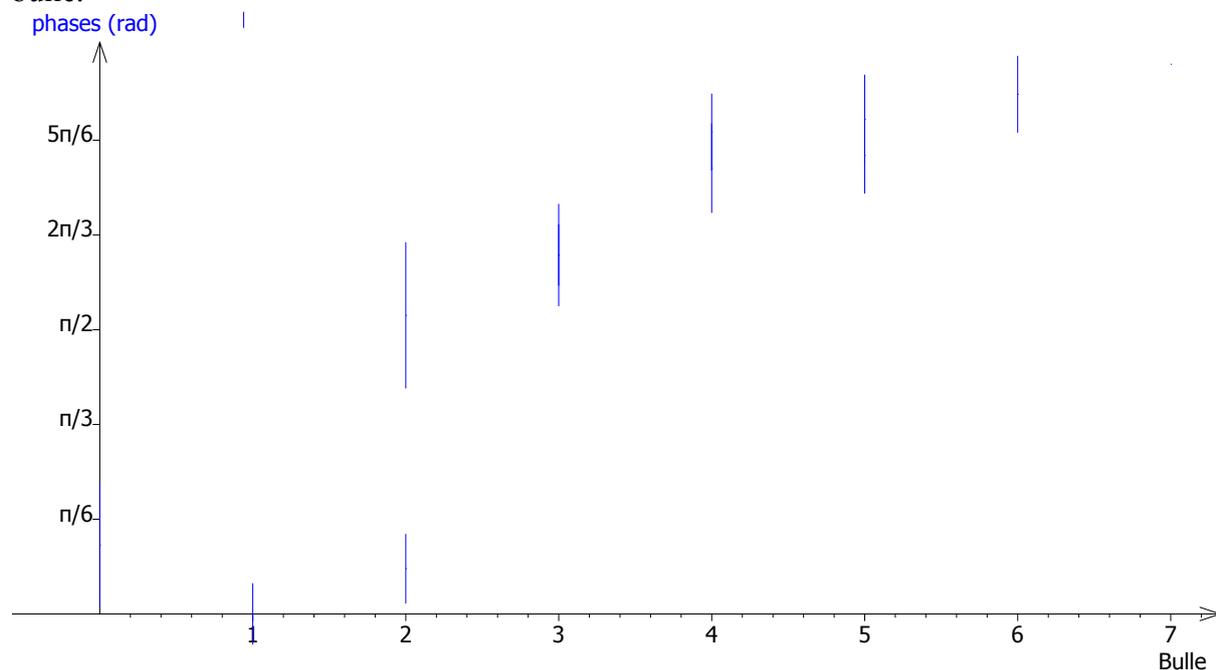
J'ai donc recommencé l'expérience en essayant de faciliter la prise d'image. Cette fois l'eau est colorée, le stroboscope de bien meilleure qualité et l'éclairage se fait par-dessous à travers un verre dépoli. Les résultats sont désormais exploitables, au détail près que le contraste étant plutôt mauvais sur le bord du champ de la caméra, la position de certaines bulles est peu précise. Illustrons cela pour 38Hz avec les bulles 0 et 3



Mais le pointage est très long à effectuer. De plus il est souvent difficile de choisir le pixel qui représente l'extrémité d'une bulle ; la mesure est donc subjective et imprécise (pour une amplitude de 4 pixels et une incertitude d'un pixel l'erreur relative est de 25%). La solution à ces deux problèmes est le pointage automatique. Comme le logiciel qui était censé effectuer les mesures ne fonctionnait pas, il a fallu le bricoler pour y arriver. Le résultat est plutôt probant en terme de rapidité (20 minutes contre 3-4 heures) mais la qualité est médiocre. Voici les résultats pour les mêmes bulles :



Toutes les courbes obtenues permettent d'extraire la phase de chaque bulle, pour chaque fréquence. Donnons un exemple de résultat : pour 50Hz, déphasage en fonction du numéro de bulle.

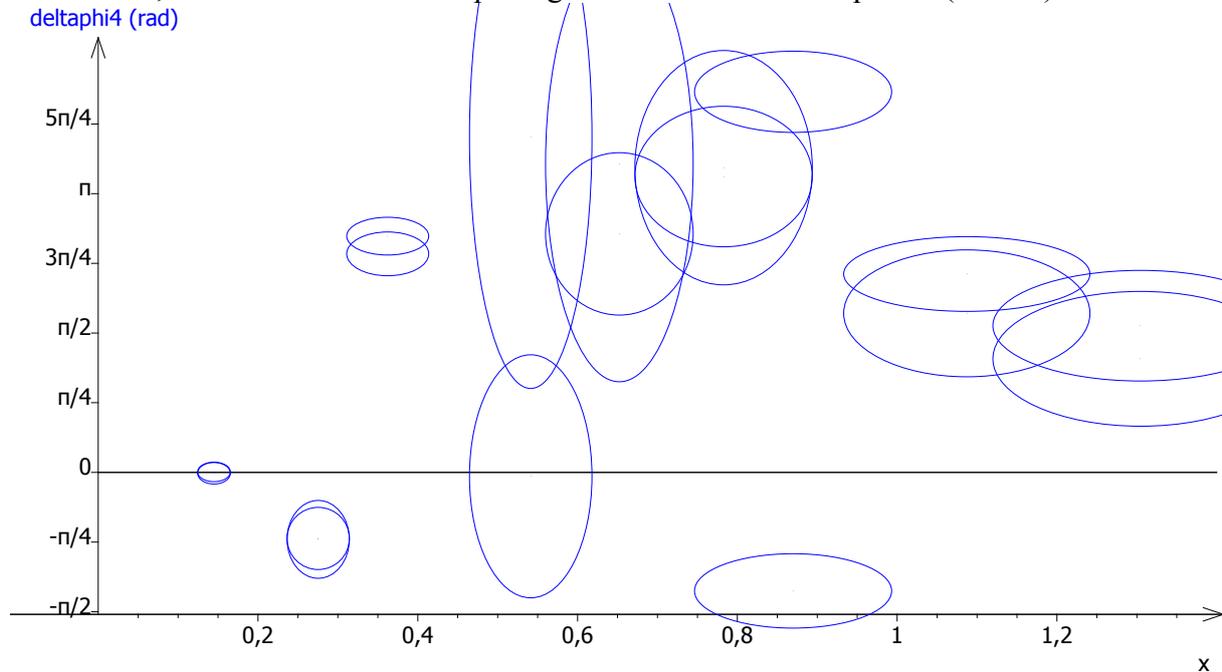


Compte tenu des valeurs numériques de l'expérience, la théorie prévoit que la bulle 1 soit en phase avec la bulle 0 tandis que toutes les autres sont en opposition de phase par rapport à cette même bulle 0.

Mis à part la bulle 2, si l'on décide qu'une bulle est soit en phase soit en opposition de phase, l'expérience corrobore la théorie. Mais il apparaît également que la phase évolue moins brutalement que le prévoit la théorie (qui je le rappelle néglige les frottements).

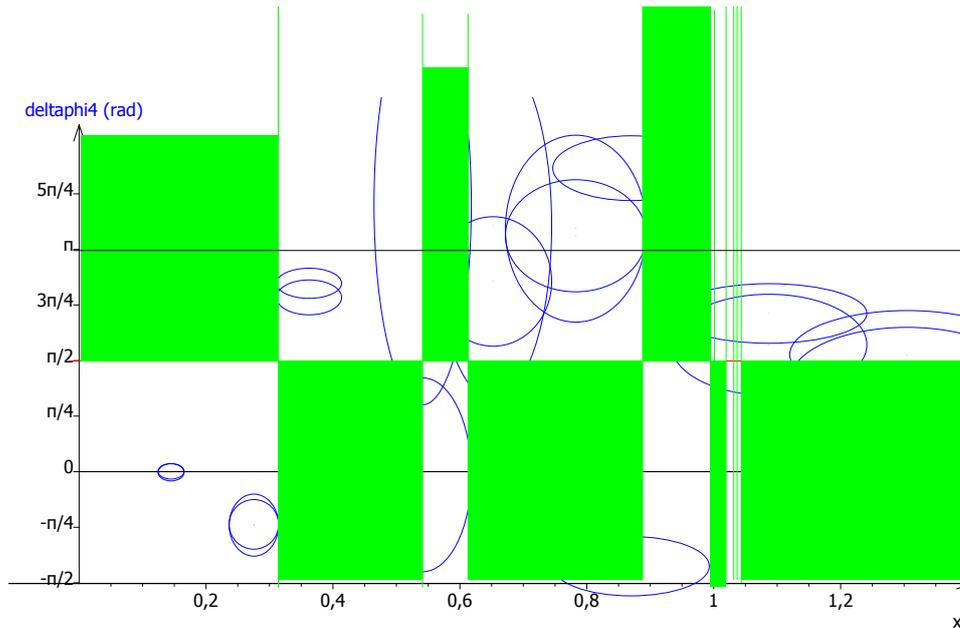
Pour la bulle 2 : la théorie prévoit que la fréquence à laquelle l'amplitude du mouvement de cette bulle change de signe est 50.5 Hz. Compte tenu de l'incertitude sur la fréquence d'excitation et sur la pulsation ω_0 , il n'est pas aberrant d'avoir obtenu un résultat différent entre les deux répétitions de la mesure.

Maintenant, si l'on s'intéresse au déphasage en fonction de la fréquence (réduite) :



Clairement il arrive que le déphasage prenne d'autres valeurs que 0 et π . On pouvait s'y attendre : c'est toujours ce qui arrive lorsque l'on néglige les frottements, surtout pour des fréquences proches des fréquences de résonnances (et cela a été fait). Si l'on veut malgré tout comparer les déphasages expérimentaux aux théoriques, on peut très bien décider que quand la théorie prévoit un déphasage de 0, le déphasage réel est attendu entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ et que quand la théorie prévoit un déphasage de π , le déphasage réel est attendu entre $\pi/2$ et $3\pi/2$. Représentons sur un même graphique le déphasage réel ainsi que la zone où la théorie prévoit la présence du déphasage. Le déphasage est attendu dans la zone NON colorée en vert.

Bulle 4



Compte tenu des incertitudes (importantes), toutes les bulles se trouvent là où on les attendait.

Conclusion : L'étude théorique du mélange eau-bulles d'air a mis en évidence des propriétés remarquables, notamment le comportement de filtre passe bas. L'expérience est peu précise mais on peut estimer que ses résultats ne rentrent pas en contradiction avec la théorie, bien que de mesures auraient été nécessaires pour accéder à une valeur expérimentale de la pulsation caractéristique. Quoiqu'il en soit il ressort clairement que les phénomènes intéressants (mouvement notable des bulles mais pas toutes en phase avec l'excitateur) sont observés pour des fréquences du même ordre de grandeur que celui de la fréquence caractéristique établie par la théorie et calculée avec les valeurs numériques de l'expérience. Une longue étude expérimentale resterait à mener pour contrôler l'influence des paramètres des bulles et des fluides sur cette fréquence.

Il faut noter qu'il a été impossible (absence d'hydrophone) de vérifier la pertinence de l'approximation qui est certainement la plus grossière de toutes : considérer la propagation unidimensionnelle.