



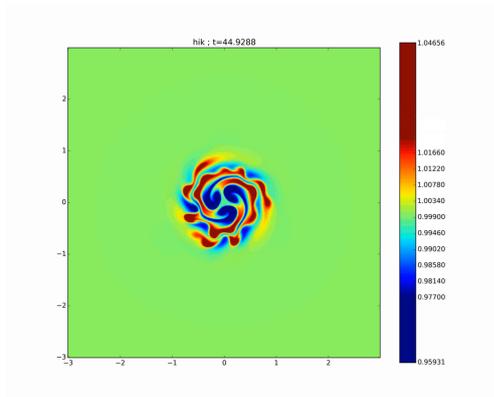
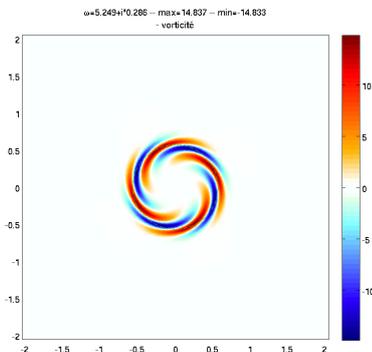
RAPPORT DE STAGE DE M2

Master océan, atmosphère, climat et observations spatiales

Instabilité dans le modèle d'eau peu profonde thermique

Élève :
Élie Gouzien

Supervision :
Vladimir Zeitlin



23 juin 2016

Sommaire

Introduction	3
I Obtention des équations du modèle	4
I.1 Modèle de départ tridimensionnel	4
I.2 Intégration verticale	5
I.2.1 Intégration de la partie inertielle	6
I.2.2 Expression sous forme de moyenne verticale	7
I.2.3 Simplification : faible variation verticale des vitesses	7
I.2.4 Reformulation sous forme d'advection	9
I.2.5 Expression du gradient de géopotentiel	9
I.3 Équations d'eau peu profonde thermique	11
I.4 Modèles similaires et discussion	12
I.4.1 Équations atmosphériques	12
I.4.2 Formulation en dynamique de fluide compressible	14
I.4.3 Équilibre géostrophique	14
II Analyse linéaire de stabilité	16
II.1 Écoulement de base	16
II.1.1 Principe de construction des profils	16
II.1.2 Alpha-gaussienne	17
II.1.3 Jet de Bickley	17
II.1.4 Vitesse constante	18
II.2 Principe de l'analyse	20
II.2.1 Linéarisation	20
II.2.2 Transformée de Fourier	20
II.2.3 Discrétisation	21
II.3 Résultats	22
II.3.1 Vortex	22
II.3.2 Jet	24
II.3.3 Vitesse constante	24
II.3.4 À retenir	28
III Simulation directe	29
III.1 Intérêt	29
III.2 Méthodes utilisées	29
III.3 Résultats	29
Conclusion	32

A Profil du vortex	33
A.1 Rappel des nombres adimensionnés	33
A.2 Adimensionnement	33
A.3 Remarque sur la résolution de l'équation différentielle	33
A.4 Profil de hauteur H	34

Introduction

L'ensoleillement à la surface de la Terre est extrêmement inhomogène. La circulation de l'eau des océans et de l'air de l'atmosphère rééquilibre la répartition de chaleur. Mais en moyenne la pseudo-force de Coriolis tend à dévier les flux jusqu'à trouver un équilibre (géostrophique) dans lequel la vitesse du fluide est orthogonale au gradient qui lui a donné naissance. Ainsi les écoulements moyens échouent à réduire les gradients qui leur ont donné naissance. Mais l'histoire ne s'arrête pas là ; les écoulements géophysiques sont essentiellement non visqueux donc de la turbulence peut s'y développer. En pratique ce sont les manifestations de la turbulence, notamment les vortex, qui contribuent le plus au transport méridional de chaleur, quantité de mouvement, etc.

Les vortex jouent donc un rôle primordial dans les bilans énergétiques. De plus ils sont essentiels à la compréhension des variabilités autour de l'état moyen. C'est pourquoi l'étude de leur dynamique est fondamentale. En particulier examiner les instabilités d'écoulements permet d'identifier des processus de naissance de perturbations. Ces dernières peuvent alors en retour modifier le flux d'où elles ont émergé, par exemple par un renforcement, affaiblissement, dislocation, etc.

Pour étudier l'émergence d'instabilité on se place dans le cadre du modèle d'eau peu profonde thermique, introduit par R. L. Lavoie [4]. Le principe de ce modèle est de moyenner verticalement les équations d'Euler entre deux couches. La différence par rapport au modèle d'eau peu profonde standard est qu'on autorise la densité à varier horizontalement, par exemple sous l'effet d'un gradient de température. Cela ajoute donc une variable au problème, ce qui l'enrichit radicalement. L'intérêt d'utiliser ce modèle est qu'il est plutôt simple (2D, ...), amène la richesse d'une température non homogène, tout en restant très proche de celui d'eau peu profonde, qui a été très étudié et peut servir de référence. Du fait qu'il soit à deux dimensions les simulations numériques sont plutôt rapides. De plus les mêmes équations peuvent aussi bien décrire l'océan que l'atmosphère. Les conclusions de cette étude seront donc utilisables aussi bien pour un cyclone tropical que pour un vortex océanique.

L'objectif du stage a été d'étudier la stabilité des vortex possédant un gradient thermique. Et en particulier de s'intéresser aux instabilités qui ne sont pas présentes dans le modèle d'eau peu profonde standard. On commencera par dériver les équations du modèle d'eau peu profonde thermique et étudier rapidement ses propriétés fondamentales. Ensuite nous allons décrire le principe et les résultats de l'analyse linéaire de stabilité, qui permet de déterminer le comportement initial des instabilités. Enfin nous allons expliquer le principe de la simulation directe, qui sert de contrôle et surtout permet d'observer la manière dont l'instabilité sature.

I Obtention des équations du modèle

Le modèle dont on va dériver les équations est celui d'eau peu profonde, mais dont on autorise la densité à varier horizontalement.

I.1 Modèle de départ tridimensionnel

On regarde une couche de fluide. On se place dans un repère cartésien avec x et y les coordonnées horizontales. L'altitude z est prise positive vers le haut. Le temps est noté t .

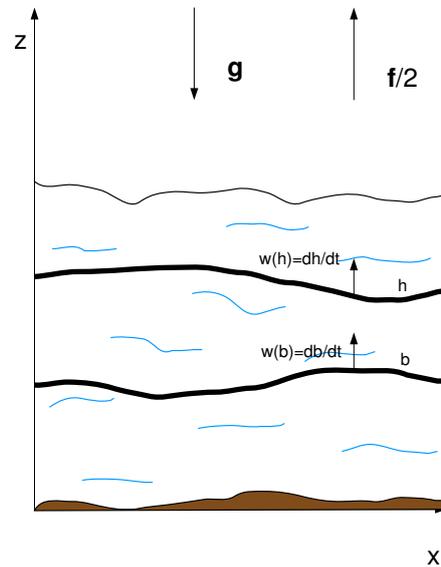


FIGURE 1 – Modèle à une couche.

On note $b(x, y, t)$ l'altitude du bas de la couche. Et $h(x, y, t)$ l'altitude du haut de la couche.

On va partir des équations primitives pour l'océan. Soit θ la perturbation relative de densité, définie par $\theta = \frac{\sigma}{\rho_0}$, avec $\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \rho_s(z) + \sigma(x, y, z, t)$ où σ est la perturbation contenant la partie intéressante de la densité. On définit alors le géopotentiel $\phi = \frac{\pi}{\rho_0}$, où π est la perturbation de pression liée par l'équilibre

hydrostatique à la perturbation de densité σ . Ce dernier s'exprime alors :

$$g\theta + \partial_z\phi = 0 \quad (1)$$

La vitesse est décomposée selon les axes du repère en u , v et w (vitesse verticale).

Les équations primitives océaniques (qui incluent l'approximation de Boussinesq) s'écrivent :

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u - fv = -\partial_x\phi \quad (2a)$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + fu = -\partial_y\phi \quad (2b)$$

$$\partial_t\theta + u\partial_x\theta + v\partial_y\theta + w\partial_z\theta + w d_z \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) = 0 \quad (2c)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \quad (2d)$$

On peut les reformuler sous forme de conservation de flux.

$$\partial_t(u) + \partial_x(u^2) + \partial_y(vu) + \partial_z(wu) - f\rho v = -\partial_x\phi \quad (3a)$$

$$\partial_t(v) + \partial_x(uv) + \partial_y(v^2) + \partial_z(wv) + f\rho u = -\partial_y\phi \quad (3b)$$

$$\partial_t(\theta) + \partial_x(u\theta) + \partial_y(v\theta) + \partial_z(w\theta) + w d_z \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) = 0 \quad (3c)$$

$$\partial_x(u) + \partial_y(v) + \partial_z(w) = 0 \quad (3d)$$

I.2 Intégration verticale

Nous allons ensuite intégrer verticalement ces équations. Pour cela il est utile de se remémorer la formule de Leibnitz :

$$\partial_x \left(\int_{a(x)}^{b(x)} F(x, z) dz \right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x F(x, z) dz + F(x, b) \partial_x b(x) - F(x, a) \partial_x a(x) \quad (4)$$

On va alors détailler pour chaque membre des équations les simplifications qui apparaissent ainsi que les hypothèses associées.

I.2.1 Intégration de la partie inertielle

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \int_b^h (3a) dz : \quad & \partial_t \left(\int_b^h u dz \right) - (\partial_t h) [u]_h + (\partial_t b) [u]_b \\
 & + \partial_x \left(\int_b^h u^2 dz \right) - (\partial_x h) [u^2]_h + (\partial_x b) [u^2]_b \\
 & + \partial_y \left(\int_b^h uv dz \right) - (\partial_y h) [uv]_h + (\partial_y b) [uv]_b \\
 & \quad \quad \quad + [wu]_h \quad - [wu]_b \quad - f \int_b^h v dz \\
 & = - \int_b^h \partial_x \phi dz
 \end{aligned}$$

Une particule fluide en $z = h$ ou $z = b$ suit la surface correspondante. Ainsi :

$$[w]_h = \frac{dh}{dt} = \partial_t h + u \partial_x h + v \partial_y h \quad (5a)$$

$$[w]_b = \frac{db}{dt} = \partial_t b + u \partial_x b + v \partial_y b \quad (5b)$$

En injectant cela dans les équations précédentes, les termes faisant intervenir la vitesse en h et b s'annulent. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \int_b^h (3a) dz : \quad & \partial_t \left(\int_b^h u dz \right) + \partial_x \left(\int_b^h u^2 dz \right) + \partial_y \left(\int_b^h uv dz \right) - f \int_b^h v dz \\
 & = - \int_b^h \partial_x \phi dz
 \end{aligned}$$

De même,

$$\int_b^h (3b) dz : \quad \partial_t \left(\int_b^h v dz \right) + \partial_x \left(\int_b^h uv dz \right) + \partial_y \left(\int_b^h v^2 dz \right) + f \int_b^h u dz$$

$$= - \int_b^h \partial_y \phi dz$$

et

$$\int_b^h (3c) dz : \quad \partial_t \left(\int_b^h \theta dz \right) + \partial_x \left(\int_b^h \theta u dz \right) + \partial_y \left(\int_b^h \theta v dz \right) + \int_b^h w \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) dz$$

$$= 0$$

$$\int_b^h (3d) dz : \quad \partial_t \left(\int_b^h 1 dz \right) + \partial_x \left(\int_b^h u dz \right) + \partial_y \left(\int_b^h v dz \right) = 0$$

I.2.2 Expression sous forme de moyenne verticale

On va reformuler les équations en faisant intervenir la moyenne verticale pondérée par l'épaisseur du fluide (ce qui correspond à la densité surfacique de masse inertielle) : $\langle F \rangle = \frac{1}{h-b} \int_b^h F dz$. On obtient alors :

$$\partial_t ((h-b) \langle u \rangle) + \partial_x ((h-b) \langle u^2 \rangle) + \partial_y ((h-b) \langle uv \rangle) - f (h-b) \langle v \rangle = - \int_b^h \partial_x \phi dz$$

$$\partial_t ((h-b) \langle v \rangle) + \partial_x ((h-b) \langle uv \rangle) + \partial_y ((h-b) \langle v^2 \rangle) + f (h-b) \langle u \rangle = - \int_b^h \partial_y \phi dz$$

$$\partial_t ((h-b) \langle \theta \rangle) + \partial_x ((h-b) \langle \theta u \rangle) + \partial_y ((h-b) \langle \theta v \rangle) + (h-b) \left\langle w \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \right\rangle = 0$$

$$\partial_t (h-b) + \partial_x ((h-b) \langle u \rangle) + \partial_y ((h-b) \langle v \rangle) = 0$$

I.2.3 Simplification : faible variation verticale des vitesses

On souhaiterait retrouver une forme d'advection aux équations. Pour cela il faudrait transformer les moyennes de produits en produits de moyenne, afin

de pouvoir séparer leurs différentiations. On souhaite donc faire l'approximation $\langle uv \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle$, $\langle u^2 \rangle = \langle u \rangle^2$ et $\langle v^2 \rangle = \langle v \rangle^2$. Voyons à quoi correspond cette approximation.

Écrivons $u(z) = \langle u \rangle + u'(z)$. Alors $\langle u^2 \rangle = \langle u \rangle^2 + \langle u'^2 \rangle$. La différence avec l'approximation est donc $\langle u'^2 \rangle = \frac{1}{(h-b)} \int_b^h u'^2 dz$. L'approximation sera donc valable quand cette grandeur est petite par rapport à $\langle u \rangle^2$.

L'approximation consiste donc à négliger les variations verticales de la vitesse. Cette hypothèse est propre aux modèles à deux dimensions. En effet le modèle décrit le fluide par sa vitesse moyenne et il est normal qu'on ne puisse pas bien représenter un écoulement où la vitesse varie beaucoup verticalement.

Le terme $\left\langle w \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \right\rangle$ est une moyenne verticale de variation verticale. Ainsi les hypothèses de faible variation verticale et de faible vitesses verticales nous conduisent à négliger ce terme.

On peut alors réécrire les équations sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t ((h-b) \langle u \rangle) + \partial_x ((h-b) \langle u \rangle^2) + \partial_y ((h-b) \langle u \rangle \langle v \rangle) - f (h-b) \langle v \rangle &= - \int_b^h \partial_x \phi dz \\ \partial_t ((h-b) \langle v \rangle) + \partial_x ((h-b) \langle u \rangle \langle v \rangle) + \partial_y ((h-b) \langle v \rangle^2) + f (h-b) \langle u \rangle &= - \int_b^h \partial_y \phi dz \\ \partial_t ((h-b) \langle \theta \rangle) + \partial_x ((h-b) \langle \theta \rangle \langle u \rangle) + \partial_y ((h-b) \langle \theta \rangle \langle v \rangle) &= 0 \\ \partial_t ((h-b)) + \partial_x ((h-b) \langle u \rangle) + \partial_y ((h-b) \langle v \rangle) &= 0 \end{aligned}$$

Une alternative possible a été étudiée par P. Ripa [5]. Elle consiste à utiliser des profils linéaires de vitesse et densité. Un inconvénient majeur est qu'il faut alors prendre les pentes comme variables. On ajoute donc trois variables et équations.

À partir de maintenant on n'a plus que des valeurs moyennes. On va donc changer de notations ; u , v et θ désignent désormais les valeurs correspondantes moyennées verticalement.

I.2.4 Reformulation sous forme d'advection

En développant les dérivations et en utilisant la conservation du volume (dernière équation), on obtient :

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - f v = - \frac{1}{h-b} \int_b^h \partial_x \phi dz \quad (6a)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + f u = - \frac{1}{h-b} \int_b^h \partial_y \phi dz \quad (6b)$$

$$\partial_t \theta + u \partial_x \theta + v \partial_y \theta = 0 \quad (6c)$$

$$\partial_t (h-b) + \partial_x ((h-b)u) + \partial_y ((h-b)v) = 0 \quad (6d)$$

I.2.5 Expression du gradient de géopotentiel

Équilibre hydrostatique L'équilibre hydrostatique peut se justifier par des ordres de grandeur. En effet avec une accélération verticale nulle, l'équation d'Euler suivant la verticale donne l'équilibre hydrostatique. L'idée est donc que si le mouvement est principalement horizontal on a là une bonne approximation. Dans ce cas,

$$\phi(x, y, z, t) = [\phi]_h + g \int_{z'=z}^h \theta(x, y, z', t) dz' = [\phi]_b - g \int_{z'=b}^z \theta(x, y, z', t) dz'$$

Notons également que :

$$[\phi]_b = [\phi]_h + g(h-b) \langle \theta \rangle$$

Densité verticalement constante Si la perturbation de densité θ ne dépend pas de z :

$$\phi(x, y, z, t) = [\phi]_h + g\theta(h-z) = [\phi]_b - g\theta(z-b) \quad (7)$$

Cette hypothèse est extrêmement forte. Le cas d'une densité variant linéairement a été traité par P. Ripa [5] mais ajoute des variables.

Gradient de (géopotential moyen) Regardons une première méthode pour calculer le gradient de géopotential en utilisant (4) et (7).

$$\begin{aligned}
\int_b^h \partial_x \phi \, dz &= \partial_x \left(\int_b^h \phi \, dz \right) && -(\partial_x h) [\phi]_h + (\partial_x b) [\phi]_b \\
&= \partial_x ((h-b) [\phi]_h) + \partial_x \left(\int_b^h g\theta(h-z) \, dz \right) && -(\partial_x h) [\phi]_h + (\partial_x b) [\phi]_b \\
&= \partial_x ((h-b) [\phi]_h) + \partial_x \left(g\theta \left[\frac{-1}{2} (h-z)^2 \right]_b^h \right) && -(\partial_x h) [\phi]_h + (\partial_x b) [\phi]_b \\
&= \partial_x ((h-b) [\phi]_h) + g\partial_x \left(\theta \frac{(h-b)^2}{2} \right) && -(\partial_x h) [\phi]_h + (\partial_x b) [\phi]_h + (\partial_x b) g\theta(h-b)
\end{aligned}$$

En développant le premier terme, les termes en $[\phi]_h$ se simplifient. On a alors :

$$\int_b^h \partial_x \phi \, dz = (h-b) \partial_x ([\phi]_h) + g\partial_x \left(\theta \frac{(h-b)^2}{2} \right) + g\theta(h-b) \partial_x b$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
g\partial_x \left(\theta \frac{(h-b)^2}{2} \right) &= g \frac{(h-b)^2}{2} \partial_x \theta + g\theta \partial_x \left(\frac{(h-b)^2}{2} \right) \\
&= g \frac{(h-b)^2}{2} \partial_x \theta + g\theta \frac{\partial (h-b)^2}{\partial h} \partial_x h && + g\theta \frac{\partial (h-b)^2}{\partial b} \partial_x b \\
&= g \frac{(h-b)^2}{2} \partial_x \theta + g\theta(h-b) \partial_x h && -g\theta(h-b) \partial_x b
\end{aligned}$$

Le dernier terme se simplifie dans l'expression totale du gradient de géopotential. En factorisant par $h-b$, on obtient :

$$\int_b^h \partial_x \phi \, dz = (h-b) \left[\partial_x ([\phi]_h) + g \frac{h-b}{2} \partial_x \theta + g\theta \partial_x h \right] \quad (8)$$

Moyenne du gradient de géopotentiel Ce calcul est équivalent à l'autre mais plus conforme à l'intuition (car on moyenne directement la force). On utilise l'expression du géopotentiel avec θ verticalement constant (7).

$$\begin{aligned}
\int_b^h \partial_x \phi \, dz &= \int_b^h \partial_x [\phi]_h \, dz + \int_b^h g \partial_x (\theta(h-z)) \, dz \\
&= (h-b) \partial_x [\phi]_h + \int_b^h g(h-z) \partial_x \theta \, dz + \int_b^h g \theta \partial_x h \, dz \\
&= (h-b) \partial_x [\phi]_h + g \left[\frac{-1}{2} (h-z)^2 \right]_b^h \partial_x \theta + g \theta (h-b) \partial_x h \\
&= (h-b) \partial_x [\phi]_h + g \frac{(h-b)^2}{2} \partial_x \theta + (h-b) g \theta \partial_x h
\end{aligned}$$

On a obtenu de nouveau (8) et à moindre effort :

$$\int_b^h \partial_x \phi \, dz = (h-b) \left[\partial_x ([\phi]_h) + g \frac{h-b}{2} \partial_x \theta + g \theta \partial_x h \right]$$

I.3 Équations d'eau peu profonde thermique

En rassemblant tout ce qu'on a fait précédemment, on obtient :

$\partial_t(u)$	$+u\partial_x(u)$	$+v\partial_y(u)$	$-fv = -\partial_x([\phi]_h) - g\theta\partial_x h - g\frac{h-b}{2}\partial_x\theta$
$\partial_t(v)$	$+u\partial_x(v)$	$+v\partial_y(v)$	$+fu = -\partial_y([\phi]_h) - g\theta\partial_y h - g\frac{h-b}{2}\partial_y\theta$
$\partial_t(\theta)$	$+u\partial_x(\theta)$	$+v\partial_y(\theta)$	$=0$
$\partial_t(h-b)$	$+\partial_x((h-b)u)$	$+\partial_y((h-b)v)$	$=0$

Si on se place dans le cas d'une surface libre et d'un fond plat, $\partial_x [\phi]_h = 0$ et $b = 0$, alors

$$\partial_t(u) + u\partial_x(u) + v\partial_y(u) - fv = -g\theta\partial_x h - g\frac{h}{2}\partial_x\theta \quad (9a)$$

$$\partial_t(v) + u\partial_x(v) + v\partial_y(v) + fu = -g\theta\partial_y h - g\frac{h}{2}\partial_y\theta \quad (9b)$$

$$\partial_t(\theta) + u\partial_x(\theta) + v\partial_y(\theta) = 0 \quad (9c)$$

$$\partial_t(h) + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0 \quad (9d)$$

I.4 Modèles similaires et discussion

I.4.1 Équations atmosphériques

Dans le contexte atmosphérique en coordonnée pression, on part d'équations similaires. Les différences sont qu'alors la variable verticale est la pression p , θ représente la température potentielle et l'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\partial_p \phi = -\frac{R}{p} \left(\frac{p}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \theta$$

avec R la constante massique des gaz parfaits pour l'air, c_p la capacité thermique à pression constante et p_s la pression de référence.

Ensuite le calcul se déroule de manière similaire. h est alors pris comme étant la pression au sol, et b null (pression à une distance infinie du sol). Reprenons le calcul du gradient de géopotential (selon la seconde méthode). Formellement le géopotential s'écrit :

$$\phi(x, y, p, t) = [\phi]_h + \frac{R}{c_p} \int_{p_s}^h p'^{\frac{R}{c_p}-1} \theta(x, y, p', t) dp'$$

Si on ajoute l'hypothèse que θ est constante selon la verticale, et ne dépend donc pas de p ,

$$\phi(x, y, p, t) = [\phi]_h + c_p \theta \left(\left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} - \left(\frac{p}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right)$$

On peut alors calculer l'intégrale du gradient de géopotential :

$$\begin{aligned}
\int_b^h \partial_x \phi \, dp &= \int_b^h \partial_x [\phi]_h \, dp + \int_b^h c_p \partial_x \left(\theta \left(\left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} - \left(\frac{p}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right) \right) \, dp \\
&= (h-b) \partial_x [\phi]_h + \int_b^h c_p \left(\left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} - \left(\frac{p}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right) \partial_x \theta \, dp \\
&\quad + \int_b^h c_p \theta \partial_x \left[\left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] \, dp \\
&= (h-b) \partial_x [\phi]_h + (h-b) c_p \left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \partial_x \theta - c_p (\partial_x \theta) \int_b^h \left(\frac{p}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \, dp \\
&\quad + c_p \theta (h-b) \partial_x \left[\left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] \\
&= (h-b) \partial_x [\phi]_h + (h-b) c_p \left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \partial_x \theta \\
&\quad - c_p (\partial_x \theta) \frac{p_s}{1 + \frac{R}{c_p}} \left[\left(\frac{h}{p_s} \right)^{1 + \frac{R}{c_p}} - \left(\frac{b}{p_s} \right)^{1 + \frac{R}{c_p}} \right] \\
&\quad + R \theta (h-b) \frac{1}{p_s} \left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p} - 1} \partial_x h
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h-b} \int_b^h \partial_x \phi \, dp &= \partial_x [\phi]_h \\
&+ \left[c_p \left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} - \frac{c_p p_s}{1 + \frac{R}{c_p}} \frac{1}{h-b} \left[\left(\frac{h}{p_s} \right)^{1 + \frac{R}{c_p}} - \left(\frac{b}{p_s} \right)^{1 + \frac{R}{c_p}} \right] \right] \partial_x \theta \\
&\quad + R \left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p} - 1} \theta \partial_x \frac{h}{p_s}
\end{aligned}$$

Dans la cas où $b = 0$ et $[\phi]_h$ constant il se simplifie en :

$$\frac{1}{h-b} \int_b^h \partial_x \phi \, dp = \frac{R}{1 + \frac{R}{c_p}} \left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p}} \partial_x \theta + R \left(\frac{h}{p_s} \right)^{\frac{R}{c_p} - 1} \theta \partial_x \frac{h}{p_s} \quad (10)$$

Cette forme est très proche de celle que l'on a obtenu dans le cas océanique. Avec $p_s = 1$ et $R = c_p = 1$ on la retrouve exactement. La différence provient des hypothèses. Pour la version océanique, on suppose la perturbation de densité constante, alors que dans le cas atmosphérique c'est la température potentielle qui est prise constante et le profil de densité qui en résulte n'est pas constant.

De manière générale le choix d'un profil vertical de densité, dépendant de θ , détermine la forme du gradient de pression (fonction de h , θ , $\overrightarrow{\text{grad}}(h)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(\theta)$) du modèle d'eau peu profonde. Pour la suite de l'étude on se restreint au cas océanique.

I.4.2 Formulation en dynamique de fluide compressible

En factorisant les dérivations du gradient de pression, on peut réécrire les équations du modèle (9) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\partial_t(u) + u\partial_x(u) + v\partial_y(u) - fv &= -g\frac{1}{h}\partial_x\frac{\theta h^2}{2} \\ \partial_t(v) + u\partial_x(v) + v\partial_y(v) + fu &= -g\frac{1}{h}\partial_y\frac{\theta h^2}{2} \\ \partial_t(\theta) + u\partial_x(\theta) + v\partial_y(\theta) &= 0 \\ \partial_t(h) + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) &= 0\end{aligned}$$

Sous cette forme ce sont les équations d'un fluide compressible de densité h , entropie θ et de pression $g\frac{\theta h^2}{2}$.

Il n'est par contre pas possible de trouver un potentiel dont découle la force de pression (divisée par h). En effet, soit $F(\theta, h)$ un tel potentiel, alors $\frac{\partial F}{\partial \theta} = g\frac{h}{2}$ et $\frac{\partial F}{\partial h} = g\theta$ mais alors $\frac{1}{g}\frac{\partial^2 F}{\partial h \partial \theta} = \frac{1}{2} \neq 1 = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial h}$.

I.4.3 Équilibre géostrophique

Voyons dans quelles conditions le modèle d'eau peu profonde thermique admet un équilibre géostrophique. L'équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression nous donne le champ de vitesse. Il reste à voir si ce champ conserve (exactement ou approximativement) la hauteur h et l'anomalie relative de densité θ .

On part des équations (9) sous la dernière forme. Le champ de vitesses s'écrit alors :

$$\begin{aligned}-fv &= -g\frac{1}{h}\partial_x\frac{\theta h^2}{2} \\ +fu &= -g\frac{1}{h}\partial_y\frac{\theta h^2}{2}\end{aligned}$$

Soit $\psi = g\frac{\theta h^2}{2}$ et \vec{z} le vecteur unité pointant vers la verticale. Les équations précédentes se réécrivent :

$$f\vec{z} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{h}\overrightarrow{\text{grad}}(\psi)$$

ou de manière équivalente,

$$fh\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(\psi\vec{z})$$

Ici le paramètre de Coriolis f est constant. Sous cette forme la divergence de $h\vec{v}$ est nulle, et donc $\partial_t h = 0$: la hauteur n'évolue pas sous l'effet du champ de vitesse en équilibre avec la pression.

Pour avoir un équilibre il faut encore que $\partial_t \theta = 0$. Voyons à quelle condition ça peut arriver :

$$\partial_t \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\theta) = 0 \Leftrightarrow fh\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\theta) = 0 \Leftrightarrow J(\theta, \psi) = 0$$

Ainsi le flot est stationnaire si et seulement si θ et ψ sont fonctions l'une de l'autre. Cela est également équivalent au fait que θ et h sont fonctions l'une de l'autre ; ou autrement dit leur courbes iso-niveau sont parallèles en tout point.

Au-delà de ces considérations, une théorie quasi-géostrophique pour ce modèle a été formulée dans l'article [6].

II Analyse linéaire de stabilité

L'analyse linéaire de stabilité consiste à choisir un écoulement de base puis à linéariser les équations du modèle autour de cet écoulement et chercher les solutions instables. La linéarité nous permet de découpler cause et conséquence et d'utiliser de puissants outils mathématiques sinon inadaptés. C'est tout à fait pertinent pour étudier l'émergence d'instabilité (tant que la perturbation reste faible) et savoir laquelle va émerger en premier. Voyons comment cela fonctionne et les résultats qu'on obtient.

Toute cette partie est construite à partir du travail de thèse de Noé Lahaye [2] qui a appliqué ces méthodes dans le cadre de modèle de Saint-Venant à une ou deux couches. Un exemple récent d'utilisation est une application aux cyclones tropicaux [3].

Pour toute cette section on présente les équations sous une forme adimensionnée naïvement. En pratique on a utilisé le même adimensionnement que dans l'article [6]. Mais comme cela alourdi les calculs on préfère alléger les notations afin de présenter le principe sans pour autant rentrer dans les détails techniques.

II.1 Écoulement de base

II.1.1 Principe de construction des profils

L'écoulement autour duquel on linéarise doit être bien défini et équilibré. Sans cela l'ajustement risque d'être le résultat principale de l'analyse de stabilité. Ici on a fait le choix de partir d'un profil de vitesse (ou de vorticité) puis d'en déduire les champs h et θ correspondants. Pour un écoulement à symétrie cylindrique (vortex), l'équilibre cyclo-géostrophique doit être observé. Notons v_φ la vitesse ortho-radiale, et r la distance au centre du repère (coordonnée radiale en polaire). L'équilibre est :

$$v_\varphi + \frac{v_\varphi^2}{r} = \theta \partial_r h + \frac{h}{2} \partial_r \theta$$

Étant donné v_φ , le choix n'est pas unique. Afin d'avoir des profils de h et θ assez proches mais non identiques on a fait le choix arbitraire suivant : soit h_{iso} la hauteur qu'on aurait pour un modèle de Saint-Venant standard.

$$v_\varphi + \frac{v_\varphi^2}{r} = \partial_r h_{\text{iso}}$$

On définit un coefficient α que l'on appelle coefficient thermique. Par choix on prend :

$$\theta = (1 - \alpha) h_{\text{iso}}$$

Une fois ce choix effectué, l'équilibre cyclo-géostrophique est une équation différentielle ordinaire du premier degré en h . On peut donc expliciter les solutions. Voir l'annexe (A) pour le détail du calcul et de l'adimensionnement utilisé en pratique.

II.1.2 Alpha-gaussienne

On veut un profil radial typique pour un vortex. On a choisi comme profil une alpha-gaussienne définie par :

$$v_\varphi(r) = r e^{-\frac{r^\alpha - 1}{\alpha}} \quad (11)$$

avec α un paramètre qui règle la raideur du profil (attention, ça n'est pas le coefficient thermique). En pratique on a pris $\alpha = 3$.

Les bonnes propriétés de ce profil sont qu'il est très régulier, isolé (la circulation sur un contour fermé loin du centre tend vers 0) et que le gradient de vorticité potentielle ne change qu'une fois de signe ; et donc l'instabilité barotrope a une structure simple.

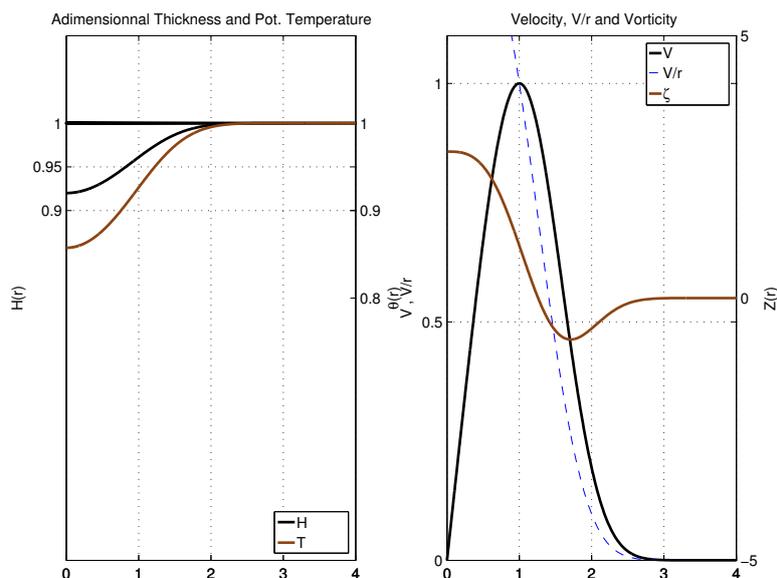


FIGURE 2 – Profil de l'alpha-gaussienne pour un coefficient thermique de 0.5

II.1.3 Jet de Bickley

L'interprétation des résultats n'est pas évident pour un vortex. Certaines instabilités sont spécifiques à la symétrie cylindrique ou à la force centrifuge. Confronté

à une instabilité inconnu il a paru raisonnable d'essayer un profil invariant par translations selon une direction afin de se placer dans un cas plus simple que le vortex.

Le jet de Bickley est un exemple type de jet régulier. Il est défini par sa vitesse :

$$u(y) = \operatorname{sech}^2(y) = \frac{1}{(\cosh(y))^2}$$

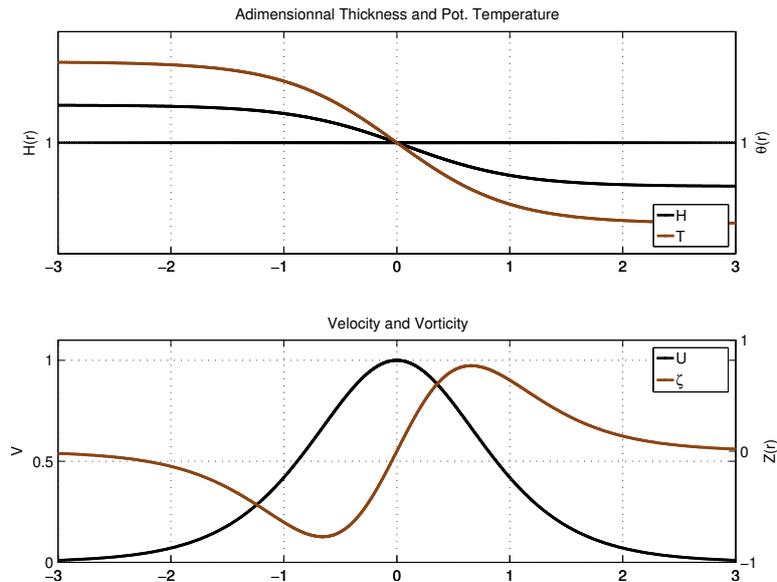


FIGURE 3 – Profil du jet de Bickley pour un coefficient thermique de 0.5

II.1.4 Vitesse constante

On verra dans la partie sur les résultats que le jet de Bickley ne permet pas d'isoler facilement les modes qui vont nous intéresser. Ainsi on va être amené à choisir un profil encore plus simple : vitesse constante, pas de gradient de hauteur. Il y a par contre besoin de se placer le long d'une paroi pour garder une température positive en tout point.

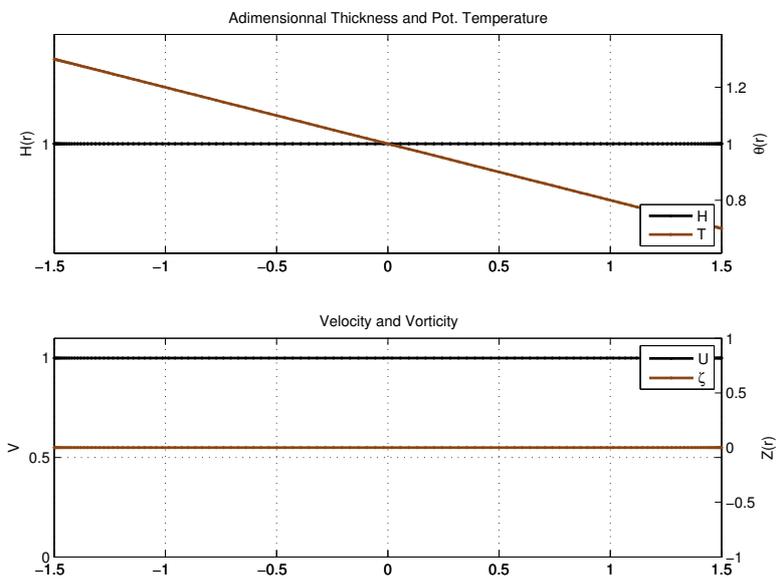


FIGURE 4 – Profil du jet à vitesse constante pour un coefficient thermique de 0

II.2 Principe de l'analyse

Comme précédemment évoqué, l'idée de l'analyse linéaire est de chercher les solutions instables des équations du modèle linéarisées autour d'un écoulement donné. On a déjà détaillé les écoulements autour desquels on allait linéariser.

II.2.1 Linéarisation

À partir de maintenant, les lettres majuscules représentent les champs du flot de base et les lettres minuscules ceux de la perturbation. L'équation linéarisée peut se mettre (pour les variables de perturbation) sous la forme :

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \\ \theta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \\ \theta \end{pmatrix}$$

avec A une « matrice » dont les coefficients sont des opérateurs linéaires sur les champs u , v , h et θ . En pratique les opérateurs contenus dans A sont des addition et multiplications par des constantes ou des champs connus, ou bien des dérivations partielles par rapport à une variable d'espace.

Par exemple dans le cas d'un jet en cartésien, avec les champs de base ne dépendant que de y et $V = 0$, la linéarisation des équations (9) mène à :

$$\begin{aligned} \partial_t u + U \partial_x u + v \partial_y U - f v + g \Theta \partial_x h &+ g \frac{H}{2} \partial_x \theta &= 0 \\ \partial_t v + U \partial_x v &+ f u + g \Theta \partial_y h + g \theta \partial_y H + g \frac{H}{2} \partial_y \theta + g \frac{h}{2} \partial_y \Theta &= 0 \\ \partial_t h + U \partial_x h + v \partial_y H &+ H (\partial_x u + \partial_y v) &= 0 \\ \partial_t \theta + U \partial_x \theta + v \partial_y \Theta &&= 0 \end{aligned}$$

Et l'on peut alors expliciter la matrice A :

$$A = - \begin{pmatrix} U \partial_x & \partial_y U - f & g \Theta \partial_x & g \frac{H}{2} \partial_x \\ f & U \partial_x & g \frac{1}{2} \partial_y \Theta + g \Theta \partial_y & g \partial_y H + g \frac{H}{2} \partial_y \\ H \partial_x & \partial_y H + H \partial_y & U \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \Theta & 0 & U \partial_x \end{pmatrix}$$

II.2.2 Transformée de Fourier

L'équation d'évolution de la perturbation est linéaire. Tous les coefficients sont constants en temps, et respectent les invariances spatiales du jet de base. Il est donc possible d'effectuer une transformation de Fourier selon le temps et la « direction » de l'espace laissant invariant la matrice A .

Cas du vortex L'invariance spatiale est selon φ . Ainsi la transformation de Fourier se concrétise en recherchant des solutions proportionnelles à $e^{i(k\varphi - \omega t)}$. Le raccordement $\varphi = 0 / \varphi = 2\pi$ impose $k \in \mathbb{N}$.

Cas du jet L'invariance spatiale est selon x . Ainsi la transformation de Fourier se concrétise en recherchant des solutions proportionnelles à $e^{i(kx - \omega t)}$. Il n'y a pas de conditions de raccordement et $k \in \mathbb{R}$.

Une fois cette transformation effectuée, le problème devient :

$$i\omega \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \\ \theta \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \\ \theta \end{pmatrix}$$

avec L la matrice complexe qui se déduit de A en remplaçant les dérivées par rapport à φ ou x (selon le cas) par une multiplication par ik , au signe près. L ne contient plus que des multiplications, additions et dérivations par rapport à la variable spatiale selon laquelle les champs du profil de base changent (r pour le vortex et y pour le jet). Ainsi le problème initial concernait l'évolution de champs à deux dimensions et on l'a réduit en un problème d'évolution de champ à une dimension.

II.2.3 Discrétisation

On pourrait réduire l'équation linéaire précédente en une équation différentielle ordinaire portant sur une seule variable. Comme les coefficients sont quelconques, cela a un intérêt réduit vu que l'on ne peut expliciter les solutions exactes que dans peu de cas.

C'est pour cela que l'on va résoudre le problème numériquement. Il nous faut définir une grille et une matrice de différentiation. En pratique on en a utilisé plusieurs différentes afin de palier aux défauts de chacune (quand nécessaire) et de pouvoir les comparer.

Une première solution est d'utiliser des différences finies. Ça n'est pas très fin mais présente l'avantage d'être tout à fait local (et donc de ne pas propager un problème en un point à l'ensemble du domaine).

Sinon les polynômes de Tchebychev sont très performants pour interpoler et dériver des fonctions bornées sur $[0, 1]$, surtout quand on travaille sur une grille définie à partir d'une sinusoïde. En utilisant un changement de variable on peut les utiliser sur un domaine différent. Par exemple pour le vortex on les utilise sur $[0, +\infty[$ grâce à la transformation $x \mapsto L \frac{1+x}{1-x}$ (L est une longueur caractéristique de la grille). La dérivée est adaptée par multiplication par le jacobien du changement

de variable. Il faut tout de même rester prudent ; dans le cas de l'exemple précédent les fonctions à dériver doivent décroître plus vite que $\frac{1}{\sqrt{r}}$ pour rester interpôlable, ce qui n'est pas le cas des fonctions radiatives.

Une fois les grilles et matrice de différentiation définies, on peut voir la matrice L non plus comme agissant sur un vecteur contenant 4 champs mais comme une matrice agissant sur les valeurs des champs évalués sur les points de la grille. Il suffit pour cela de construire L par bloc, chaque bloc représentant une multiplication par un champ ou une différentiation.

Le problème se réduit désormais à la diagonalisation de L , pour trouver les pulsations ω et les vecteurs propres associés. Un mode est instable si et seulement si la partie imaginaire de ω est strictement positive.

II.3 Résultats

II.3.1 Vortex

Pour le vortex on retrouve le mode barotrope quand on ne prend qu'un gradient de hauteur (coefficient thermique = 1). Par contre quand on ajoute un gradient de température, toute une famille de modes instables apparaît.

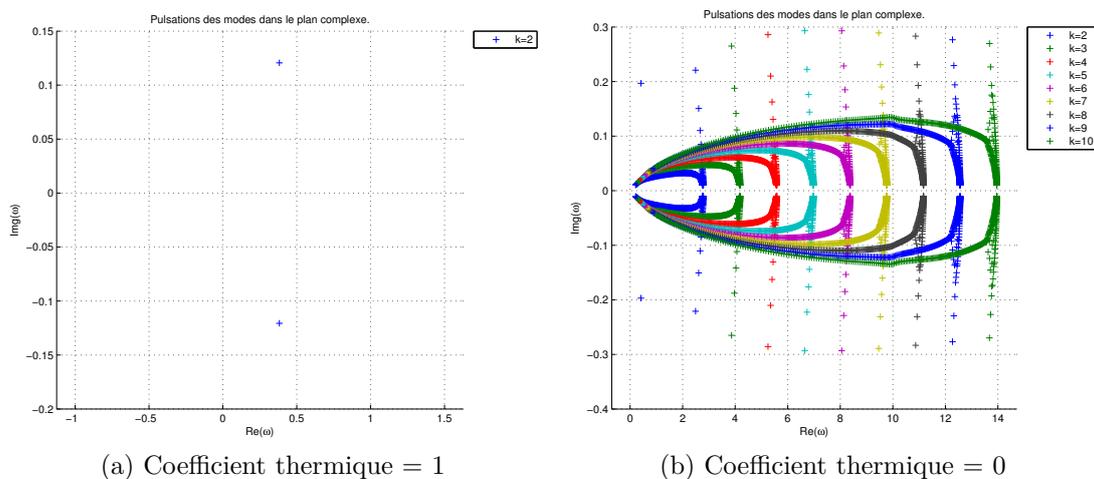


FIGURE 5 – Répartition des valeurs propres dans le plan complexe pour le vortex.

Détaillons les observations utiles sur la figure représentant les pulsations dans le plan complexe (5). Une image seule n'est pas facile à interpréter ; ce qui est dit ici est une synthèse illustré par la figure et non conclue à partir d'elle seule.

Le mode barotrope est présent dans le cas isotherme (sous-figure (a)). Il n'existe que pour $k = 2$, ce qui est spécifique à la structure radiale choisie. On peut

l'identifier en traçant sa structure radiale. Il est également présent sur la sous-figure (b) ; c'est celui qui est seul pour $k = 2$. On ne va pas détailler le suivi de ce mode mais on peut tout de même observer qu'il n'est pas exactement à la même position.

Concernant les autres modes, le « continuum » est en fait un ensemble de pseudo-modes numériques qui disparaissent quand on augmente la résolution. Les modes qui se détachent sont des modes qui apparaissent quand on introduit un gradient de température à l'écoulement de base et n'existent pas sinon. Pour chaque k , l'alignement quasi-vertical est une même famille de modes ; leurs structures radiales ont de plus en plus de nœuds au fur et à mesure que la partie imaginaire de la pulsation diminue.

Traçons la représentation d'un de ces nouveaux modes. On peut observer que

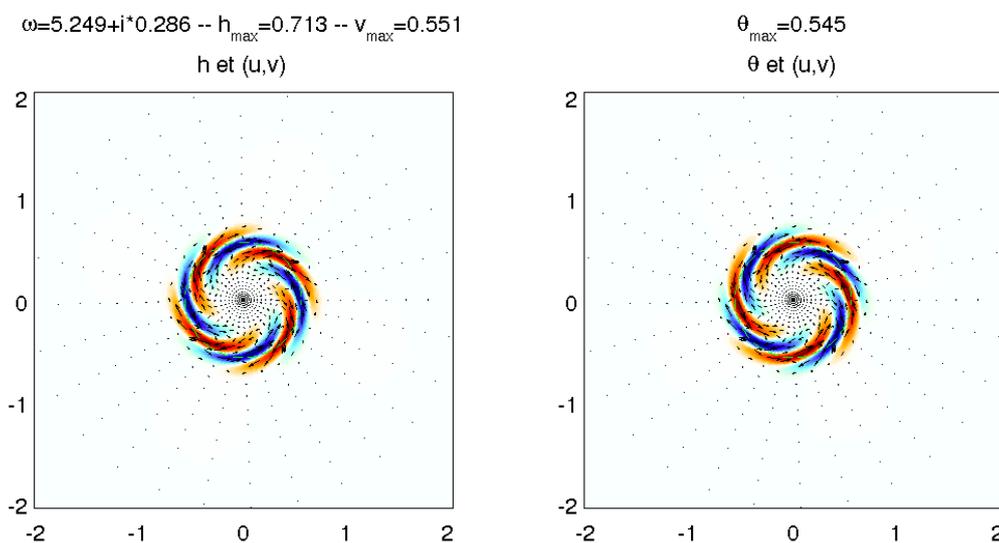


FIGURE 6 – Représentation du mode le plus instable pour $k = 4$.

le mode est concentré autour d'un niveau critique. Toutes les variables ont à peu près la même structure, à des déphasages près. L'interprétation physique de ce mode n'est pas évident compte tenu de la géométrie cylindrique. C'est pour cela qu'ensuite nous avons étudié des situations invariante par translation, pour lesquelles les coordonnées cartésiennes sont adaptées.

Conditions d'existence Quand on modifie les valeurs des paramètres pour inverser le sens des gradients, on se rend compte qu'il est possible de faire disparaître les nouveaux modes instables. Un critère empirique d'existence est que le gradient

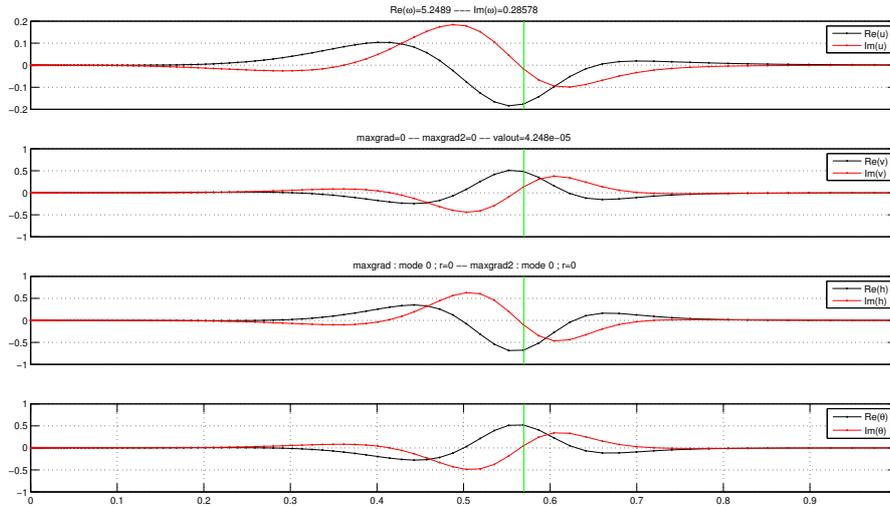


FIGURE 7 – Structure radiale du mode le plus instable pour $k = 4$.

thermique doit être orienté dans le sens tel qu'il pourrait être équilibré par la pseudo-force de Coriolis.

Concrètement cela veut dire que pour un cyclone θ doit être plus faible au centre qu'à l'extérieur. Dans l'océan cela correspond à un cœur chaud alors que dans l'atmosphère ça arrive avec un cœur froid. Ainsi les vortex océaniques à cœur chaud semblent être les meilleurs candidats pour l'existence et le développement d'une telle instabilité.

II.3.2 Jet

Pour le jet on retrouve le même comportement. Quand on n'introduit pas de gradient de température on récupère seulement le mode barotrope. Avec un gradient de température toute une famille de modes apparaît. Ces modes sont toujours concentrés autour d'un niveau critique et il n'est pas toujours évident de les observer (car trop peu étendus donc mal résolus). Pour cette raison passons directement au profil suivant : celui dont la vitesse est constante.

II.3.3 Vitesse constante

Ce profil a une vitesse constante. Cela entraîne une température linéaire. On ne peut donc pas travailler sur un domaine infini. De plus on observe que les modes s'appuient sur le bord. On a imposé comme condition au bord l'impénétrabilité. Cette situation n'est pas là pour essayer d'imiter une situation atmosphérique ou

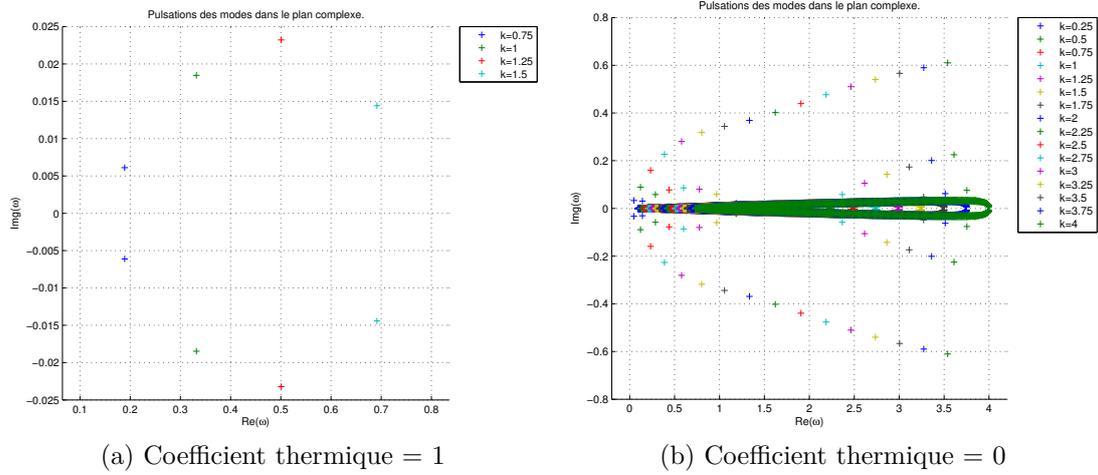


FIGURE 8 – Répartition des valeurs propres dans le plan complexe pour le jet de Bickley.

océanique mais pour comprendre l'origine de l'instabilité observée dans les autres situations.

On observe que sans gradient thermique il n'y a pas d'instabilité barotrope ; ça n'est pas étonnant vu qu'il n'y a aucun gradient de vorticité potentielle. Avec gradient thermique on a pour chaque nombre d'onde une famille de modes, comme dans les situations précédentes. Il n'y a par contre plus de pseudo-modes numériques. Représentons les premiers éléments d'une famille de modes.

Les modes semblent appartenir à une famille de fonction. On peut formuler analytiquement le problème. Une fois tout réduit à une variable, on a une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 à coefficients non constants. La résolution analytique n'est pas évidente.

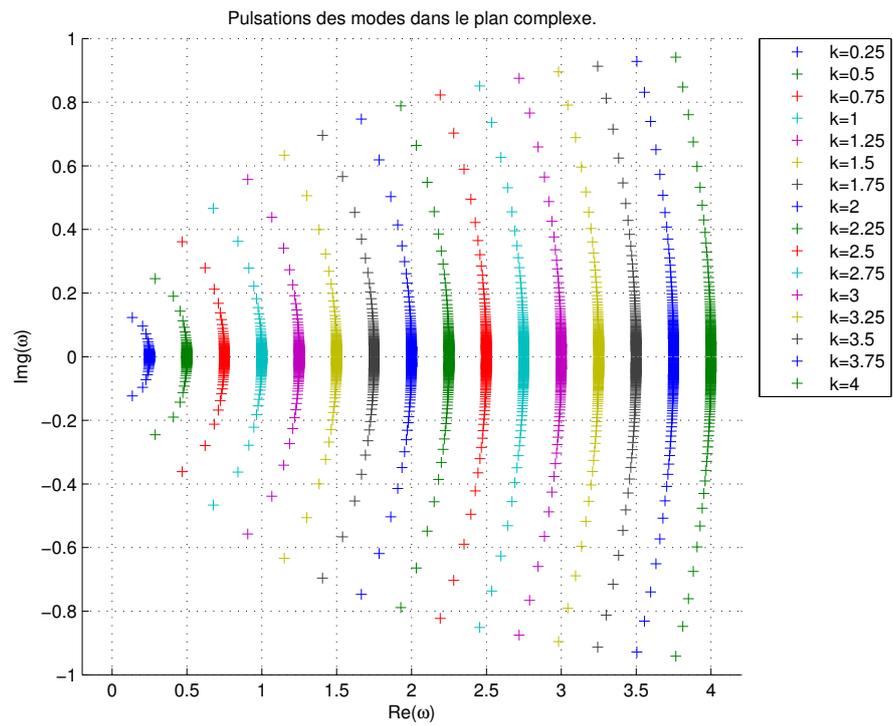


FIGURE 9 – Répartition des valeurs propres dans le plan complexe pour l'écoulement uniforme.

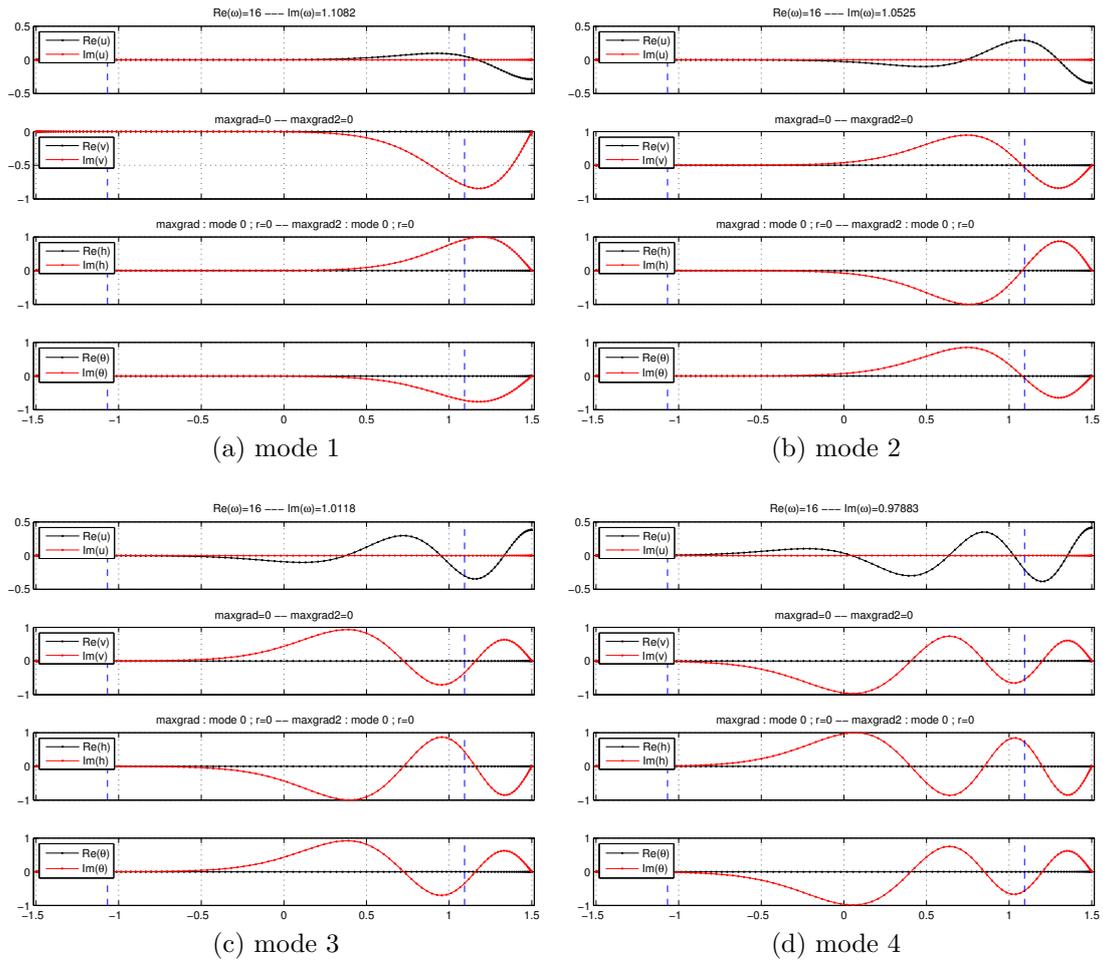


FIGURE 10 – Structure des 4 premiers modes dans la situation idéale.

Termes essentiels Le seul terme de équations que l'on peut retirer sans modifier foncièrement les solutions est la force de Coriolis.

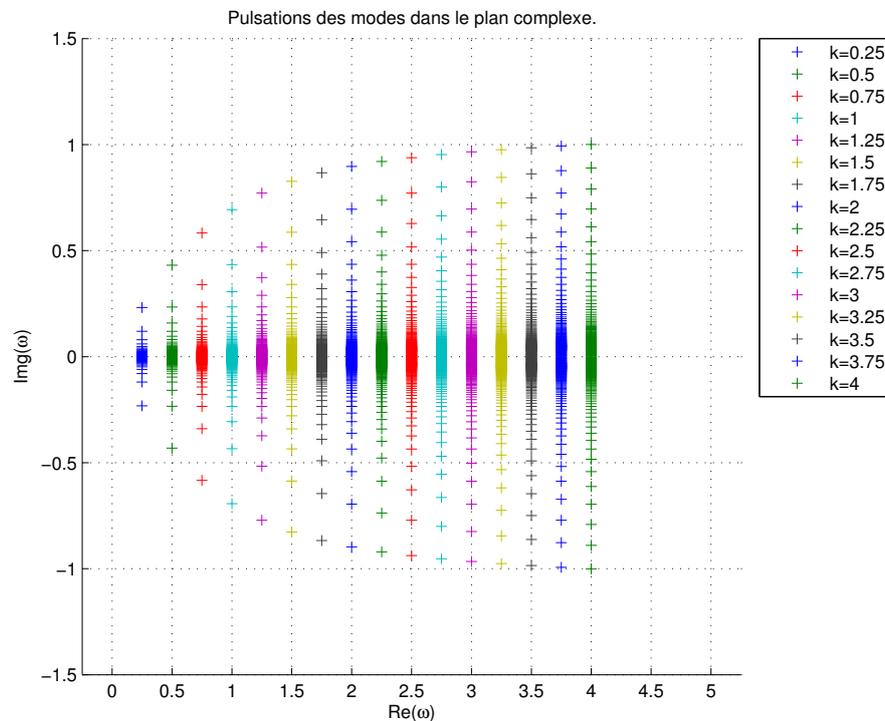


FIGURE 11 – Répartition des valeurs propres dans le plan complexe pour l'écoulement uniforme en retirant Coriolis du problème de diagonalisation.

II.3.4 À retenir

Résumons les résultats de l'analyse linéaire. Nous avons trouvé une nouvelle instabilité qui n'existe pas avec un modèle de Saint–Venant habituel. Cette instabilité est intrinsèquement liée à un gradient de densité (ou température) θ dans l'écoulement de base. C'est une instabilité de « niveau critique » : elle se développe sans se déplacer par rapport au fluide. Si la pseudo-force de Coriolis la modifie, ça n'est pas nécessaire à son existence. Elle a besoin d'un « bord » pour vivre. Celui-ci peut n'être qu'un gradient de densité ou hauteur (ça n'est pas encore bien clair).

III Simulation directe

On a effectué une simulation directe. L'initialisation de celle-ci se faisant avec le mode trouvé par l'analyse linéaire (évidemment combiné avec le profil de base).

III.1 Intérêt

L'intérêt d'effectuer une simulation directe est double. D'une part cela permet de s'assurer que le mode trouvé par l'analyse linéaire n'est pas une erreur numérique, ni humaine. En effet on doit voir le mode croître. Les méthodes sont très différentes de celles de l'analyse linéaire et il est donc hautement improbable que l'instabilité soit uniquement numérique. D'autre part ça permet de visualiser la saturation du mode et son effet sur le champ dont il a émergé.

III.2 Méthodes utilisées

La simulation est effectuée sur un domaine aux conditions aux limites périodiques. Les variables sont définies sur des grilles décalées. Spatialement des différences finies sont utilisées. Le schéma temporel est de type Runge–Kutta, il est décrit dans un article de Giraldo [1] sous le nom ARK2.

Un peu de viscosité a été introduite afin de limiter les instabilités numériques liées à l'advection de vorticité. L'advection de θ a été biaisée amont pour les mêmes raisons.

Pour ce qui est de la qualité de la simulation, le schéma par différences finies centrées n'est pas extraordinairement précis mais ne semble pas poser de problème ici (les champs sont plutôt réguliers). Par ailleurs on observe que la simulation conserve bien l'équilibre géostrophique, même pour le vortex pour lequel la grille cartésienne n'est pas très adaptée. Les conservations d'énergie totale et température moyenne sont respectées. La variation relative est de l'ordre de 10^{-4} .

Le code permet d'exporter des vidéos avec un échantillonnage arbitraire.

III.3 Résultats

Croissance initiale On a effectué les simulations avec le vortex. On observe que le mode trouvé par l'analyse linéaire est bien instable durant la simulation et conserve sa forme, au moins au début. L'évolution des anomalies (notamment de θ) semblent suivre une courbe exponentielle au début. On a tracé le logarithme de la perturbation de θ .   l' cil il semble bien suivre une droite au début, ce qui est le signe que c'est bien un mode propre du problème linéaire.

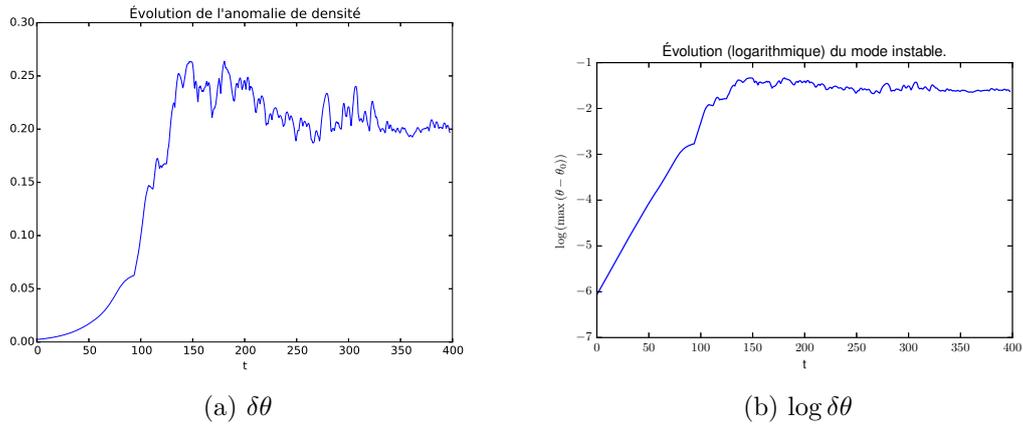


FIGURE 12 – Évolution de l’anomalie de densité θ du mode le plus instable de $k = 3$ pour le vortex.

Saturation À la saturation, des instabilités secondaires entraînent un mélange turbulent du fluide. Par ailleurs l’anomalie positive de vorticité rentre au cœur du cyclone tandis que l’anomalie négative en sort. Cela a tendance à renforcer le cyclone, tout en réduisant sa taille.

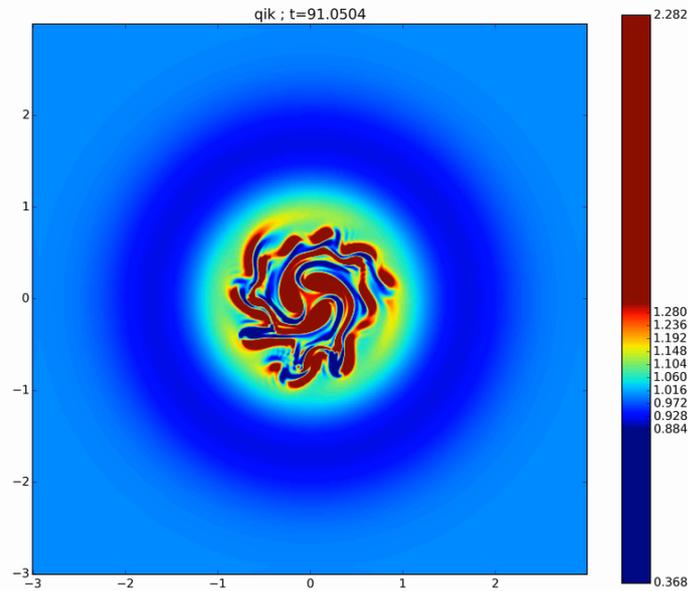


FIGURE 13 – Vorticité potentielle lors de la saturation du mode $k = 3$.

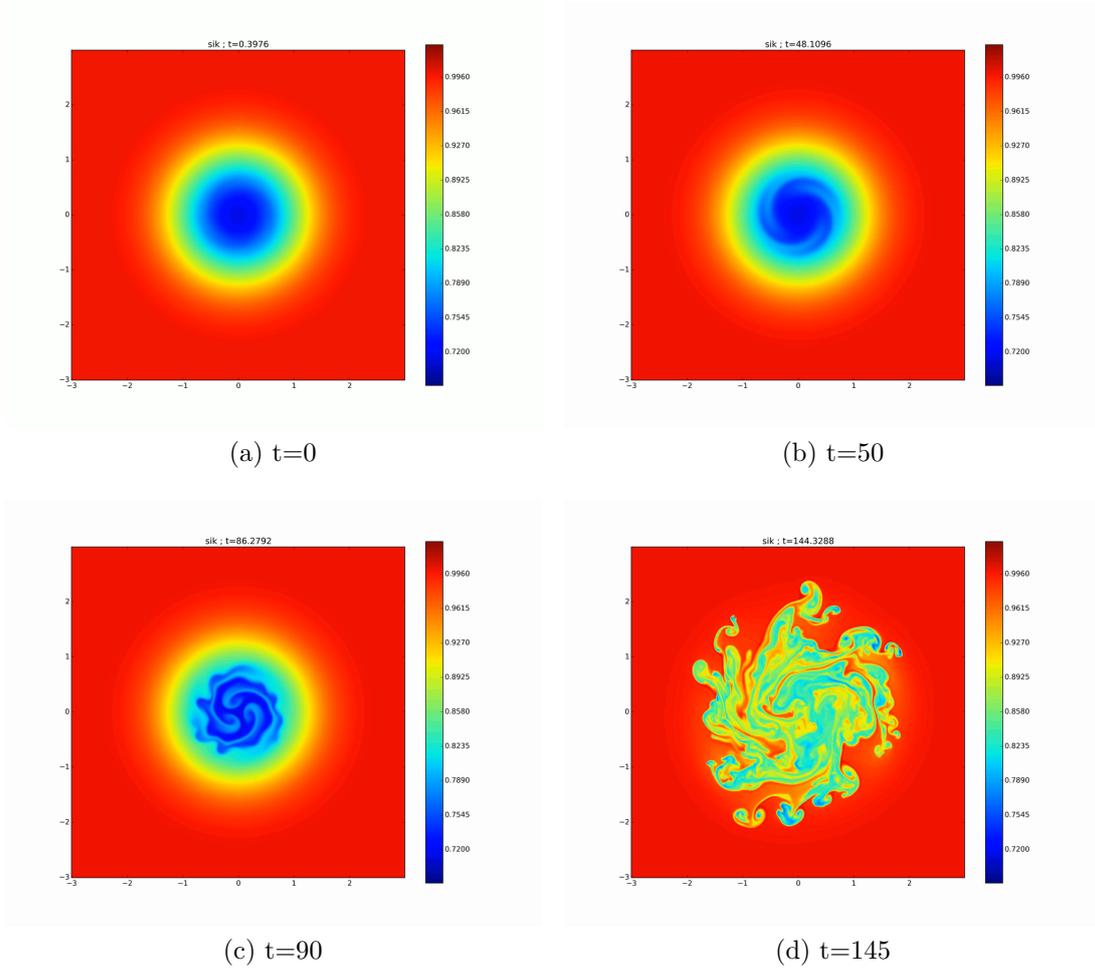


FIGURE 14 – Évolution de la densité pour le mode $k = 3$.

Conclusion

L'objet du stage était d'étudier les instabilités de vortex dans le cadre des équations d'eau peu profonde thermique. L'établissement des équations, sans comporter de véritable nouveauté, a été traité dans le cadre de différents modèles.

Le résultat de l'analyse linéaire de stabilité du vortex a été qu'outre les instabilités déjà existantes sans gradient thermique, il existe une nouvelle instabilité dont le taux de croissance peut être le plus important. Celle-ci a toutes les raisons de ne pas être un artefact numérique : elle survit à un changement de résolution du calcul, à un changement de dérivation numérique et se développe quand on l'injecte comme condition initiale de la simulation directe. Afin de comprendre le mécanisme à l'origine de cette nouvelle instabilité on s'est placé dans des cas plus simples. La symétrie cylindrique pouvant être à l'origine de beaucoup de phénomènes on est passé à un jet puis avec un écoulement uniforme d'origine purement thermique, s'appuyant sur un bord droit. Dans ces deux cas on a pu retrouver l'instabilité. Elle est d'ailleurs la seule à exister dans le dernier cas et présente une structure bien résolue.

Cette instabilité se développe systématiquement autour d'un niveau critique. Dans le cas où la vitesse est uniforme et en omettant la pseudo-force de Coriolis l'instabilité ne se propage pas ; elle se développe en restant immobile par rapport au fluide. L'interprétation physique que l'on propose est qu'elle s'appuie sur le bord, un peu comme les ondes de Kelvin sauf qu'ici le mélange entre les composantes de vitesse est introduit via le profil de fond de la température. Et ce qui rend la chose instable est la combinaison de la variation d'inertie et de la présence du bord qui casse la symétrie creusement/comblement qu'il y aurait sans. Dans les profils « réalistes » d'écoulement (vortex ou jet) il n'y a pas de bord. L'hypothèse la plus vraisemblable est que le gradient de température reproduise une sorte de bord faible, comme lorsqu'un escarpement suffit à servir de support aux ondes de Kelvin.

Pendant la saturation, la vortacité qui s'est créée durant le développement s'effondre vers le centre du vortex (en rappelant des motifs de champignons convectifs) tandis que celle de signe opposée s'échappe vers l'extérieur. Ainsi le vortex se trouve renforcé au centre, mais d'extension spatiale réduite. L'instabilité concentre le vortex. Par ailleurs durant cette phase des instabilités secondaires de type Kelvin-Helmholtz se forment et participent grandement à mélanger le fluide.

L'étude met en évidence une nouvelle instabilité. Cependant le sujet est loin d'être clos. En effet des outils numériques ont bien fonctionné mais une approche purement analytique permettrait de mieux comprendre les causes de l'instabilité, ainsi que d'avoir des prédictions claires sur l'influence des différents paramètres. Par ailleurs la question de savoir comment la présence d'un gradient thermique modifie les instabilités classiques n'a pas été traitée, et il y a là matière à réfléchir.

A Profil du vortex

Revenons sur l'obtention des profils de H et Θ , hauteur et perturbation de densité de l'écoulement de base du vortex. Toutes les variables sont radiales, leur nom les identifie facilement.

A.1 Rappel des nombres adimensionnés

On rappelle les définitions suivantes :

— Nombre de Rossby :

$$R_o = \frac{U}{Lf}$$

— Rayon de déformation :

$$R_d = \frac{\sqrt{gH}}{f}$$

— Nombre de Burger :

$$B_u = \frac{R_d^2}{L^2} = \frac{gH}{f^2 L^2}$$

— Nombre de Froude :

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gH}} = \frac{R_o}{\sqrt{B_u}}$$

A.2 Adimensionnement

On utilise l'adimensionnement de [6] :

$$l = Ll^* \quad u = Uu^* \quad t = \frac{L}{U}t^* \quad h = H_0 \left(1 + \frac{R_o}{B_u}h^*\right) \quad \theta = \Theta_0 \left(1 + 2\frac{R_o}{B_u}\theta^*\right)$$

Avec cet adimensionnement, l'équilibre cyclo-géostrophique s'écrit :

$$\left(1 + Ro\frac{V}{r}\right)V = \left(1 + 2\frac{Ro}{Bu}\Theta\right)H' + \left(1 + \frac{Ro}{Bu}H\right)\Theta'$$

A.3 Remarque sur la résolution de l'équation différentielle

Dans la suite il n'est absolument pas anodin de prendre comme borne inférieure l'infini. La solution particulière est trouvée par variation de la constante (qui fonctionne à tous les coups pour l'ordre 1). Le choix de la première borne infinie fait qu'elle satisfait les conditions aux limites (H et $T \rightarrow 0$ en l'infini).

A.4 Profil de hauteur H

Attention ici α désigne le coefficient d'importance des effets thermiques. À ne pas confondre avec α de α -gaussienne.

Intégration formelle :

On veut résoudre :

$$\left(1 + Ro \frac{V}{r}\right) V = \left(1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta\right) H' + \left(1 + \frac{Ro}{Bu} H\right) \Theta'$$

On pose :

$$B(r) = \frac{\frac{Ro}{Bu} \Theta'}{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}, \quad C(r) = \frac{\left(1 + Ro \frac{V}{r}\right) V - \Theta'}{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}$$

On a alors :

$$H' + B(r)H = C(r)$$

On considère que Θ est donné, et tend vers 0 en l'infini. La solution est :

$$H(r) = e^{-\int_{\infty}^r B(r') dr'} \int_{\infty}^r C(r') e^{\int_{\infty}^{r'} B(x) dx} dr'$$

Simplification :

On remarque que

$$\left(\ln \left(\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}\right)\right)' = B$$

Et par ailleurs

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \ln \left(\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}\right) = 0$$

Ainsi

$$\int_{\infty}^r B = \ln \left(\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}\right)$$

On peut donc simplifier l'expression de H :

$$H(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}} \int_{\infty}^r C(r') \sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta(r')} dr'$$

$$H(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}} \int_{\infty}^r \frac{\left(1 + Ro \frac{V}{r'}\right) V - \Theta'}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta(r')}} dr'$$

Utilisation de l'hypothèse sur la forme de Θ :

On a choisi Θ tel que :

$$\Theta' = (1 - \alpha) \left(1 + Ro \frac{V}{r'}\right) V$$

Ainsi

$$\left(1 + Ro \frac{V}{r'}\right) V - \Theta' = \alpha \left(1 + Ro \frac{V}{r'}\right) V = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \Theta'$$

En rentrant cela dans la formulation de H,

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}} \int_{\infty}^r \frac{\Theta'}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta(r')}} dr' \\ H(r) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{Bu}{Ro} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}} \int_{\infty}^r \frac{\frac{Ro}{Bu} \Theta'}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta(r')}} dr' \\ H(r) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{Bu}{Ro} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}} \left[\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta(r')} \right]_{\infty}^r \\ H(r) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{Bu}{Ro} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta}}\right) \end{aligned} \quad (12a)$$

On a alors

$$H'(r) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\Theta'}{\left(1 + 2 \frac{Ro}{Bu} \Theta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (12b)$$

Remarque :

L'expression de H ne dépend que de Θ . En fait peu importe l'équilibre que l'on cherche à vérifier. Les formules obtenues permettent de séparer la partie du gradient attribué à H et celui attribué à Θ à partir d'un profil de hauteur qui équilibre la vitesse dans le cas d'un écoulement isotherme (Saint-Venant standard).

Références

- [1] F. X. GIRALDO, J. F. KELLY et E. M. CONSTANTINESCU : Implicit-explicit formulations of a three-dimensional nonhydrostatic unified model of the atmosphere (numa). *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(5):B1162–B1194, 2013.
- [2] Noé LAHAYE : *Dynamics, interactions and instabilities of ageostrophic coherent structures in rotating shallow water models*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, octobre 2014.
- [3] Noé LAHAYE et Vladimir ZEITLIN : Understanding instabilities of tropical cyclones and their evolution with a moist convective rotating shallow-water model. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 73(2):505–523, 2016.
- [4] R. L. LAVOIE : A mesoseale numerical model of lake-effect storms. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29(6):1025–1040, 1972. [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469\(1972\)029<1025:AMNMOL>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469(1972)029<1025:AMNMOL>2.0.CO;2).
- [5] P. RIPA : On improving a one-layer ocean model with thermodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 303:169–201, 11 1995. http://journals.cambridge.org/article_S0022112095004228.
- [6] Emma S. WARNEFORD et Paul J. DELLAR : The quasi-geostrophic theory of the thermal shallow water equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 723:374–403, 5 2013.