



RAPPORT DE STAGE DE M2

Département de Physique de l'Éns

---

# Limite quantique pour la mesure de concentration

---

*Élève :*  
Élie Gouzien

*Supervision :*  
Claude Fabre  
Nicolas Treps

14 avril 2014

## Résumé

Ce travail traite du problème d'évaluer l'incertitude sur la mesure optique de densité d'un gaz donné (spectre connu) dans à la limite quantique standard (mesure optimale effectuée avec des états cohérents).

Les outils de calcul de cette limite sont détaillés puis appliqués au cas qui nous intéresse. Enfin l'exemple d'une raie lorentzienne est étudié.

## Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>I Optimisation de la mesure optique quantique</b>	<b>2</b>
I.1 Incertitude sur l'estimation d'un paramètre	3
I.1.1 Définitions	3
I.1.2 Information de Fisher et limite de Cramér–Rao	3
I.2 Application à la mesure quantique	5
I.2.1 Modèle de mesure	5
I.2.2 Information de Fisher quantique et variance	6
I.3 La lumière comme sonde	7
I.3.1 Modèle de lumière	7
I.3.2 Limite quantique standard	7
I.3.3 Détection homodyne	8
<b>II Mesure de concentration d'un gaz</b>	<b>9</b>
II.1 Limite quantique	9
II.1.1 Traversée du milieu	9
II.1.2 Calcul de la limite	10
II.1.3 Répartition amplitude/phase	10
II.2 Réexpression en terme de section efficace	11
II.2.1 Définition	11
II.2.2 Réexpression de l'information de Fisher	12
II.3 Mesure de traces de gaz avec un peigne de fréquence	12
II.3.1 Source de lumière : le peigne de fréquences	13
II.3.2 Limite des faibles concentrations	13
<b>III Cas typique : la résonance lorentzienne</b>	<b>14</b>
III.1 De l'électron élastiquement lié à la résonance lorentzienne	14
III.1.1 Présentation du modèle	14
III.1.2 Approximations	15
III.1.3 Section efficace	16
III.1.4 Cas lorentzien plus général	16
III.2 Limite quantique standard pour une résonance lorentzienne	16
III.2.1 Expression	16
III.2.2 Ordres de grandeurs	18
III.3 Localisation de l'information	18
III.3.1 Localisation spectrale	18
III.3.2 Amplitude/Phase	20
<b>Conclusion</b>	<b>22</b>

## Introduction

L'introduction de la quantification des phénomènes observables a permis à la science de basculer au-delà d'une simple description qualitative. Une étude qualitative est, du fait de son imprécision, difficile à infirmer (et donc également à confirmer) et incapable de prédire ce qu'il advient d'un système soumis à des phénomènes antagonistes. La notion de théorie quantitative amène naturellement à celle de mesure. Cela à la fois pour connaître les conditions initiales, et pour vérifier la théorie en comparant ce qu'elle prédit à ce qui est mesuré.

Bien souvent la précision des prédictions est limitée par celle de la mesure des conditions initiales (les autres limitations usuelles sont la capacité de calcul et la théorie elle-même). D'où l'intérêt de réaliser les mesures les plus précises possibles. Une bonne mesure se distingue par deux qualités :

- elle donne en moyenne la vraie valeur du paramètre mesuré, et ce indépendamment de la valeur de tout autre paramètre.
- elle a une faible dispersion ; cela permet d'être à peu près sûr que la valeur mesurée est à peu de choses près « la bonne », même en n'ayant réalisé la mesure qu'une seule fois.

Une mesure s'effectue en faisant interagir son appareil avec le système étudié. Mais en pratique il est impossible d'empêcher l'appareil de subir l'influence de l'environnement. Ainsi les mesures sont en pratique quasiment toujours limités par du bruit venu d'ailleurs que l'échantillon étudié. Cependant, même si on arrivait à isoler l'ensemble {système étudié – appareil de mesure} de toute influence extérieur, on aurait toujours une dispersion des résultats lors de mesures successives. En effet, les lois de la physique quantique prévoient un certain aléatoire pour le résultat d'une mesure. Par exemple si l'on mesure la puissance d'un faisceau lumineux, celle-ci va varier du fait de l'arrivée à des moments aléatoires des photons (indivisibles). Ce type de limitation devient significative dans le cas où la quantité mesurée est si faible que le signal mesuré est de l'ordre de grandeur du bruit quantique.

Ici nous nous intéressons en particulier au cas de la mesure de densité de traces d'un gaz. Outre le défi que cela représente, une telle mesure a d'innombrables applications. On citera notamment le suivi de polluants (tant pour eux même que comme marqueurs), la vulcanologie [5] (on arrive notamment à prédire les températures d'aquifère à partir de l'analyse des fumerolles) ou la défense (détection d'explosifs, gaz toxiques).

Dans ce document nous allons voir comment déterminer la variance sur une mesure quantique et utiliser cela dans le cas de la mesure de densité d'un gaz. Le cas d'une résonance lorentzienne sera détaillé, tant comme brique élémentaire des spectres usuels que comme exemple afin de mieux comprendre le cas général.

## I Optimisation de la mesure optique quantique

Cette section s'appuie en grande partie sur la thèse récemment soutenue par Pu Jian [4], et en reprend les outils nécessaires à formuler la suite. Les notations sont compatibles pour ce qui est traité dans les deux documents.

**Présentation du problème** On considère un système dans un état décrit par un paramètre  $\Theta$ . Le problème qui nous intéresse est de trouver comment récupérer la valeur  $\theta$  de  $\Theta$  et, plus important ici, d'évaluer les fluctuations qui entachent l'estimation de ce paramètre. Pour faire cela, commençons par adopter une description de la mesure. Le paramètre sera évalué à partir du résultat de multiples mesures. Ici on considérera une mesure en trois étapes :

1. La sonde est préparée dans un état quantique donné.

2. La sonde interagit avec le système étudié. L'état du système avant le passage de la sonde est caractérisé par le paramètre  $\Theta$  qui a pour valeur  $\theta$ .
3. La sonde est mesurée au sens de la physique quantique.

Ayant effectué  $Q$  mesures (réalisation des trois étapes précédentes) identiques et indépendantes, on calcule une estimation  $\tilde{\theta}$  du paramètre  $\theta$ .

Ici on considérera toujours l'état initial de la sonde comme une donnée du problème; en pratique seul les états proches des états classiques peuvent être facilement générés. Par contre la mesure effectuée n'est pas fixée et il faudra trouver celle qui permet d'estimer au mieux le paramètre. Le calcul effectué sur le résultat des  $Q$  mesures n'est pas non plus fixé. Ainsi la précision de la mesure est une caractéristique intrinsèque à l'état de la sonde après l'interaction avec l'échantillon, qui dépend directement de la valeur du paramètre.

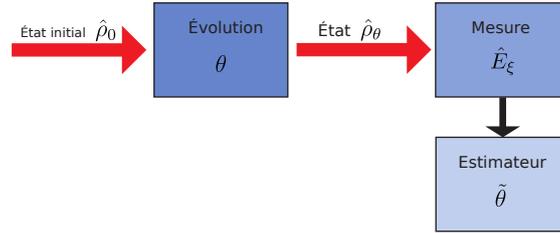


FIGURE 1 – Illustration du principe de l'estimation du paramètre.

Commençons par étudier le cas général d'une variable aléatoire dépendant d'un paramètre.

## I.1 Incertitude sur l'estimation d'un paramètre

### I.1.1 Définitions

Soit une famille de variables aléatoires  $\xi$  dépendantes d'un paramètre  $\Theta$ . Étant donnée une valeur  $\theta$  de  $\Theta$  (on n'a donc rien de plus qu'une variable aléatoire), la question qui se pose est : comment évaluer au mieux la valeur  $\theta$ ? En réalité nous ne répondront pas exactement à cette question mais plutôt à la question : quelle est la plus faible variance possible pour l'estimation de  $\Theta$ ?

Afin de réaliser cette estimation, nous tirons  $Q$  réalisations indépendantes de  $\xi$ . Notons  $\xi_i$  le résultat du  $i$ -ème tirage de  $\xi$  et  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_Q)$  la donnée des valeurs des  $Q$  réalisations de  $\xi$ . On définit un estimateur de  $\Theta$  comme étant une fonction  $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ . Une telle fonction se doit d'approcher  $\theta$  le mieux possible. Il ne faut pas perdre de vue que  $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi})$  dépend des réalisations et est donc une variable aléatoire.

Définissons enfin  $P_\theta(\boldsymbol{\xi})$  la probabilité (cas discret) ou densité de probabilité (cas continu) d'obtenir les réalisations  $\boldsymbol{\xi}$  étant donné que  $\Theta$  vaut  $\theta$ .

Les deux grandeurs importantes pour la suite seront la moyenne et la variance de  $\tilde{\theta}$  (variable aléatoire).

### I.1.2 Information de Fisher et limite de Cramér–Rao

Notons  $E[\tilde{\theta}]$  l'espérance de la variable aléatoire  $\tilde{\theta}$ . Par définition,

$$E[\tilde{\theta}] = \int P_\theta(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d^Q \boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

Donc

$$\int P_\theta(\boldsymbol{\xi})(\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) - E[\tilde{\theta}]) d^Q \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (2)$$

En dérivant par rapport à  $\theta$  on obtient :

$$\int \frac{dP_\theta(\boldsymbol{\xi})}{d\theta}(\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) - E[\tilde{\theta}]) d^Q \boldsymbol{\xi} + \int P_\theta(\boldsymbol{\xi}) \frac{d(\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) - E[\tilde{\theta}])}{d\theta} d^Q \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (3)$$

Comme par définition  $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi})$  est indépendant de  $\theta$ , et  $E[\tilde{\theta}]$  indépendant de  $\boldsymbol{\xi}$ ,

$$\int \frac{dP_\theta(\boldsymbol{\xi})}{d\theta}(\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) - E[\tilde{\theta}]) d^Q \boldsymbol{\xi} = \frac{dE[\tilde{\theta}]}{d\theta} \quad (4)$$

Utilisons que  $\frac{d \ln(P_\theta(\boldsymbol{\xi}))}{d\theta} = \frac{1}{P_\theta(\boldsymbol{\xi})} \frac{dP_\theta(\boldsymbol{\xi})}{d\theta}$  :

$$\int \frac{d \ln(P_\theta(\boldsymbol{\xi}))}{d\theta}(\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) - E[\tilde{\theta}])P_\theta(\boldsymbol{\xi}) d^Q \boldsymbol{\xi} = \frac{dE[\tilde{\theta}]}{d\theta} \quad (5)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit alors :

$$\left( \frac{dE[\tilde{\theta}]}{d\theta} \right)^2 \leq \left[ \int (\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) - E[\tilde{\theta}])^2 P_\theta(\boldsymbol{\xi}) d^Q \boldsymbol{\xi} \right] \left[ \int \left( \frac{d \ln(P_\theta(\boldsymbol{\xi}))}{d\theta} \right)^2 P_\theta(\boldsymbol{\xi}) d^Q \boldsymbol{\xi} \right] \quad (6)$$

Le premier terme du membre de droite est la variance de  $\tilde{\theta}$ , que l'on notera  $\sigma_{\tilde{\theta}}^2$ . Pour traiter le second terme, on remarque en tout premier lieu que comme les  $Q$  tirages sont indépendant (et qu'on a une loi à densité),

$$P_\theta(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^Q P_\theta(\xi_i) \quad (7)$$

Avec  $P_\theta(\xi_i)$  la densité de probabilité d'obtenir  $\xi_i$  lors d'un unique tirage (à  $\theta$  fixé). Ensuite on remarque que

$$\forall i, \int \frac{d \ln(P_\theta(\xi_i))}{d\theta} P_\theta(\xi_i) d\xi_i = \int \frac{dP_\theta(\xi_i)}{d\theta} d\xi_i = \frac{d \left[ \int P_\theta(\xi_i) d\xi_i \right]}{d\theta} = 0 \quad (8)$$

Et donc que

$$\forall i \neq j, \int \frac{d \ln(P_\theta(\xi_i))}{d\theta} \frac{d \ln(P_\theta(\xi_j))}{d\theta} P_\theta(\xi_i) P_\theta(\xi_j) d\xi_i d\xi_j = 0 \quad (9)$$

On peut donc réécrire l'inéquation sous la forme :

$$\left( \frac{dE[\tilde{\theta}]}{d\theta} \right)^2 \leq \sigma_{\tilde{\theta}}^2 Q \int \left( \frac{d \ln(P_\theta(\boldsymbol{\xi}))}{d\theta} \right)^2 P_\theta(\boldsymbol{\xi}) d\xi \quad (10)$$

À ce stade, l'intégrale qui apparaît est indépendante de  $\tilde{\theta}$ . C'est donc une caractéristique intrinsèque du système, et ne dépend pas de l'exploitation des données. On est ainsi amené à définir l'information de Fisher par :

$$I_F(\theta) = \int \left( \frac{d \ln(P_\theta(\boldsymbol{\xi}))}{d\theta} \right)^2 P_\theta(\boldsymbol{\xi}) d\xi = \int \frac{1}{P_\theta(\boldsymbol{\xi})} \left( \frac{dP_\theta(\boldsymbol{\xi})}{d\theta} \right)^2 P_\theta(\boldsymbol{\xi}) d\xi \quad (11)$$

L'estimateur  $\tilde{\theta}$  est dit non biaisé si  $E[\tilde{\theta}] = \theta$ . Si tel est le cas,  $\frac{dE[\tilde{\theta}]}{d\theta} = 1$ . On en déduit alors ce qui est appelé limite de Cramér–Rao<sup>1</sup> :

$$\boxed{\forall \tilde{\theta}, \quad \frac{1}{QI_F(\theta)} \leq \sigma_{\tilde{\theta}}^2} \quad (12)$$

Replaçons cela dans le contexte de la mesure de  $\Theta$ . Étant donné un estimateur  $\tilde{\theta}$ , lorsque l'on répète des cycles de mesure (un cycle de mesure étant  $Q$  mesures puis le calcul de l'estimateur  $\tilde{\theta}$ ), les résultats ont un écart-type  $\sigma_{\tilde{\theta}}$ . La dispersion statistique peut être vue comme du bruit. On ne pourra alors que détecter un signal plus important que le bruit. Il est donc naturel de considérer que l'on mesure à la précision limite quand le rapport signal sur bruit vaut 1. Ainsi la plus petite variation de  $\theta$  mesurable est  $\sigma_{\tilde{\theta}}$ .

Notons  $\delta\theta_{\min}$  la plus petite variation de  $\theta$  mesurable (le choix de l'estimateur est libre). L'inégalité (12) donnant pour cet incertitude une borne indépendante de l'estimateur choisi,

$$\frac{1}{\sqrt{QI_F(\theta)}} \leq \delta\theta_{\min} \quad (13)$$

Il est possible dans certains cas de montrer que cette borne peut être atteinte. On considérera (sans conséquences autres que sémantiques) que c'est le cas. On a alors :

$$\boxed{\delta\theta_{\min} = \frac{1}{\sqrt{QI_F(\theta)}}} \quad (14)$$

## I.2 Application à la mesure quantique

Pour l'instant nous avons étudié une variable aléatoire dépendante d'un paramètre. Le but était de reconstituer la valeur du paramètre en utilisant les tirages de cette variable aléatoire. En pratique ce qui nous intéresse est d'estimer le paramètre dont dépend l'état quantique du système. Voyons donc comment appliquer les résultats de I.1 à la mesure quantique.

### I.2.1 Modèle de mesure

Avant d'aller plus en avant, précisons le modèle de mesure quantique utilisé. La mesure projective est assez restrictive; nous considéreront donc des mesures généralisées. Rappelons les principes de ce modèle. L'état du système est caractérisé par la donnée de sa matrice densité  $\hat{\rho}$ .

Une mesure est la donnée d'un ensemble d'opérateurs  $\{\hat{M}_j\}$  tels que  $\sum_j \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j = \mathbb{1}$ . Ces opérateurs ne sont pas nécessairement hermitiens. Lors de la mesure d'un système dans l'état  $\hat{\rho}$ , la probabilité d'obtenir  $j$  est  $P_j = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j)$ . L'état du système après la mesure est  $\frac{\hat{M}_j \hat{\rho} \hat{M}_j^\dagger}{P_j}$ .

Ici on ne s'intéresse pas à l'état de la sonde après la mesure (en pratique pour une mesure optique telle qu'on l'envisage, la sonde est détruite par la mesure). Il est alors possible de simplifier un peu les notations. Posons<sup>2</sup>  $\hat{E}_j = \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j$ . La mesure est alors caractérisée par la seule donnée

1. Maurice Fréchet et Georges Darmon semblent avoir également participé à l'établissement de cette borne.

2.  $\hat{E}_j$  n'a rien à voir avec le champ électrique

des  $\hat{E}_j$ , opérateurs hermitiens positifs vérifiant  $\sum_j \hat{E}_j = \mathbb{1}$ . La probabilité  $P_j$  de mesurer  $j$  est alors

$$P_j = \text{Tr} \left( \hat{\rho} \hat{E}_j \right) \quad (15)$$

Si l'on veut retrouver le cas d'une variable aléatoire à valeur dans  $\mathbb{R}$ , on indexe les opérateurs par une variable continue ( $\xi$ ). La condition de normalisation s'écrit alors  $\int \hat{E}_\xi d\xi = \mathbb{1}$ . La densité de probabilité prend la forme :  $P(\xi) = \text{Tr} \left( \hat{\rho} \hat{E}_\xi \right)$

### I.2.2 Information de Fisher quantique et variance

Rappelons les notations. Comme décrit précédemment, on commence par préparer une sonde. Celle-ci est initialement dans l'état ayant pour matrice densité  $\hat{\rho}_0$ . Ensuite on fait interagir la sonde avec le système à mesurer. Celle-ci est modifiée par l'interaction et en ressort dans l'état  $\hat{\rho}_\theta$ . L'objectif est maintenant de mesurer  $\theta$ , et surtout de prédire la sensibilité sur cette mesure.

Dans un premier temps, on fixe la mesure par la donnée de  $\{\hat{E}_\xi\}$ . Pour appliquer le formalisme de la partie I.1, la variable aléatoire est le résultat de cette mesure appliquée à l'état  $\hat{\rho}_\theta$ . Ainsi pour chaque mesure l'équation (14) impose une limite de précision sur l'estimation de  $\theta$ . L'information de Fisher pour ce cas est :

$$\begin{aligned} I_{F, \{\hat{E}_\xi\}} &= \int \left( \frac{d \ln \left( \text{Tr} \left( \hat{\rho}_\theta \hat{E}_\xi \right) \right)}{d\theta} \right)^2 \text{Tr} \left( \hat{\rho}_\theta \hat{E}_\xi \right) d\xi \\ &= \int \frac{1}{\text{Tr} \left( \hat{\rho}_\theta \hat{E}_\xi \right)} \left( \frac{d \text{Tr} \left( \hat{\rho}_\theta \hat{E}_\xi \right)}{d\theta} \right)^2 \text{Tr} \left( \hat{\rho}_\theta \hat{E}_\xi \right) d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

Pour trouver la meilleure précision atteignable (étant donné  $\hat{\rho}_\theta$ ), il reste à optimiser sur l'ensemble des mesures. Formellement on peut écrire :

$$\delta\theta_{\min}^2 = \frac{1}{Q \max_{\{\hat{E}_\xi\}} \left( I_F(\theta)_{\{\hat{E}_\xi\}} \right)} \quad (17)$$

On en vient donc à définir l'information de Fisher quantique :

$$I_Q(\theta) = \max_{\{\hat{E}_\xi\}} \left( I_F(\theta)_{\{\hat{E}_\xi\}} \right) \quad (18)$$

Avec l'aide de cette définition, on peut formuler la limite :

$$\delta\theta_{\min} = \frac{1}{\sqrt{Q I_Q(\theta)}} \quad (19)$$

Il est utile de remarquer que l'information de Fisher quantique n'a pas été exprimée explicitement (de manière indépendante de la mesure). Une telle expression existe, mais est techniquement relativement lourde à obtenir. Pour plus de détails, voir la thèse de Pu Jian [4].

### I.3 La lumière comme sonde

La lumière présente de grandes qualités pour être utilisée comme sonde. En effet elle est peu intrusive, permet d'effectuer des mesures à distance et très précises (interférométrie par exemple). Dans ce qui nous intéressera pour la suite, la lumière est utilisée comme sonde. Il faut donc adopter une description et y adapter les résultats précédents.

Concrètement de la lumière émise par un laser traverse un échantillon du gaz à étudier. L'échantillon modifie les propriétés de la lumière. Enfin on vient mesurer la lumière qui émerge de l'échantillon. On en déduit la valeur du paramètre.

#### I.3.1 Modèle de lumière

Tout d'abord précisons que dans la perspective d'une mesure optique de densité d'une molécule, nous cherchons à décrire de la lumière provenant d'un laser. L'utilisation d'un modèle purement classique ne serait pas pertinent, car nous nous intéressons à des fluctuations quantiques. Nous allons adopter une approche semi-classique en gardant les fluctuations, mais en travaillant autant que possible sur les valeurs moyennes.

Commençons par rappeler très brièvement les principes de la quantification du champ électromagnétique. En électromagnétisme classique il est possible sous certaines conditions (portant sur les bords), de décomposer le champ sur une base de modes orthogonaux dont les évolutions sont découplées et harmoniques. On peut alors quantifier indépendamment ces modes en reproduisant la procédure utilisée pour l'oscillateur harmonique. Pour plus de précisions sur ce sujet, le lecteur pourra consulter les notes du cours *Atomes et lumière* de Claude Fabre [2] (en français) ou bien celles de son successeur, Jean-Michel Raimond [6] (en anglais).

La lumière est donc représentée par une assemblée d'oscillateurs harmoniques. On cherche à modéliser un laser. Il est donc adapté de considérer que chaque mode est dans un état cohérent (aussi appelés quasi-classiques). Ces états ont des propriétés remarquables, notamment de se comporter de manière très classique. Les ouvrages [2] et [6] étudient ces états en détail.

Pour résumer, on décrit la lumière comme étant dans un état cohérent (a priori multimode). On a donc choisi un état pur.

#### I.3.2 Limite quantique standard

Maintenant que l'on a adopté un modèle pour décrire la sonde, il serait bon de réexprimer l'équation (19) dans ce cadre plus restreint. Les calculs sont long à effectuer. Une manière de procéder est d'exprimer l'information de Fisher quantique à l'aide de la distance de Bures. Ensuite il est possible de l'explicitier en terme de la fonction de Wigner. Il ne reste plus qu'à écrire cette fonction pour un état cohérent. Le lecteur souhaitant voir cela mis en œuvre peut lire [4].

Avant d'explicitier une formule pour l'information de Fisher, donnons quelques définitions. Ici mes notations s'éloignent légèrement de celle de Pu Jian [4].

On étudie un faisceau lumineux qui se propage. Pour la partie spatiale, seul les changements dans la direction de la propagation vont nous intéresser. On ne prendra donc pas en compte les dimensions transversales. Pour décrire l'évolution temporelle, on va travailler dans l'espace de Fourier, en prenant comme variable les pulsations.

On note  $z$  l'abscisse le long de la direction de propagation de la lumière et  $\omega$  la pulsation. Dans toute la suite la norme  $|||$  se référera à la norme  $L^2$  (la pulsation étant la variable). Elle vaut à des facteurs numériques près la moyenne temporelle. Les quantités physiques que l'on va utiliser sont le champ électrique  $E^{(+)}(z, \omega)$  et la moyenne (au sens quantique) de l'opérateur

local d'annihilation (intégré sur les dimensions transverses)  $\bar{a}(z, \omega)$ . Ils vérifient :

$$\bar{a}(z, \omega) = \frac{\text{Cst}}{\sqrt{\omega}} E^{(+)}(z, \omega) \quad (20)$$

et

$$\int |\bar{a}(z, \omega)|^2 d\omega = \|\bar{a}(z, \omega)\|^2 = N \quad (21)$$

Avec  $N$  le nombre moyen de photons reçu en  $z$ .

L'état quantique du champ dépendant du paramètre  $\theta$ , la moyenne  $\bar{a}(z, \omega)$  dépend donc aussi de  $\theta$ .

On note avec un prime ' la dérivée par rapport à  $\theta$ .  $z$  est ici fixé. Le long calcul décrit précédemment mène au résultat suivant :

$$I_Q = 4 \|\bar{a}'\|^2 \quad (22)$$

Ainsi l'équation (19) se réécrit sous la forme :

$$\delta\theta_{\min} = \frac{1}{2\sqrt{Q} \|\bar{a}'\|} \quad (23)$$

Cette limite a été obtenue avec les états cohérents, qui ont les mêmes fluctuations que le vide. On l'appelle communément la « Limite quantique standard ».

### I.3.3 Détection homodyne

Dans ce qui précède nous avons trouvé une borne inférieure à la variance de tout estimateur du paramètre  $\Theta$ . Cependant cela ne nous donne aucune indication sur la mesure ni l'analyse des données à effectuer pour atteindre cette borne. Il se trouve que dans le cas de la lumière cohérente, il existe un moyen d'atteindre la borne : la détection homodyne.

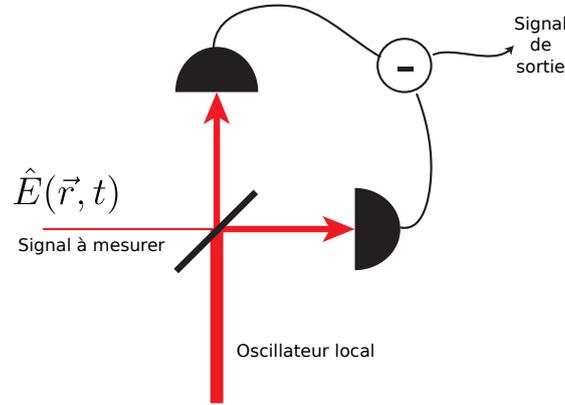


FIGURE 2 – Principe de la détection homodyne.

Le principe est d'envoyer le signal sur une lame semi-réfléchissante (50/50). On place une photodiode à chaque sortie. On envoie sur la deuxième entrée un mode bien choisi, de phase bien définie et peuplé d'un grand nombre de photon. On appelle ce qu'on envoie sur cette entrée l'oscillateur local. On prend comme signal la différence du courant des photodiodes.

On peut alors montrer [4] que dans le cas où l'oscillateur local est intense (faibles fluctuations relatives d'intensité), la détection homodyne revient à effectuer une mesure sur le faisceau de signal. Le mode dans lequel on mesure est celui de l'oscillateur local. La quadrature mesurée est donnée par la phase de l'oscillateur local. Cela revient à effectuer le produit scalaire du signal avec l'oscillateur local.

Dans le cas de la mesure que l'on cherche à faire, pour une petite variation de  $\theta$  on peut écrire :

$$\bar{a}_{\theta+\delta\theta}(z, t) = \bar{a}_\theta(z, t) + \delta\theta \bar{a}'_\theta(z, t) \quad (24)$$

En plaçant l'oscillateur local dans le mode  $\bar{a}'_\theta(z, t)$  (appelé mode dérivé), on récupère moyennant une légère modification du signal de sortie, le paramètre  $\delta\theta$ . On peut également montrer que cette mesure permet d'atteindre la limite quantique standard (équation (23)).

On a donc mis en évidence une méthode qui permet d'effectuer la mesure du paramètre avec une précision théorique égale à la limite quantique standard.

## II Mesure de concentration d'un gaz

Tout au long de la première partie nous avons déterminé la précision maximale théorique d'une mesure effectuée avec de la lumière constituée de modes purs cohérents, émis par un peigne de fréquence. Nous avons également vu que la détection homodyne permet en principe d'atteindre cette limite.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas particulier de la mesure de densité de molécule. Nous considérerons que le laser traverse une cellule de longueur<sup>3</sup>  $L$  emplie d'un gaz pur de densité moléculaire  $\rho$ . C'est donc ici ce que nous avons appelé  $\theta$  jusqu'à présent : la valeur du paramètre à mesurer. Les résultats étaient exprimés en fonction de l'état de la sonde au moment de sa mesure. On va maintenant exprimer cet état en fonction de  $\rho$ , des paramètres du gaz et de la lumière incidente.

### II.1 Limite quantique

#### II.1.1 Traversée du milieu

On considère que le laser traverse une cellule de gaz de longueur  $L$ . La propagation est toujours prise unidimensionnelle et la polarisation est oubliée. Soit  $k$  le vecteur d'onde (en fait nombre d'onde) dans le gaz.  $k$  est a priori complexe. Le gaz est supposé homogène donc  $k$  est indépendant de la position. On considère alors que :

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}(1 + \alpha(\omega)\rho) \quad (25)$$

Avec  $\alpha(\omega)$  a priori complexe que l'on exprimera si nécessaire sous la forme  $\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$  avec  $\alpha'(\omega)$  et  $\alpha''(\omega)$  réels.

La propagation s'écrit en terme de champ électrique sous la forme :

$$E^{(+)}(z, \omega) = e^{ik(\omega)z} E^{(+)}(0, \omega) \quad (26)$$

En terme d'opérateur annihilation cette équation devient :

$$\bar{a}(z, \omega) = e^{ik(\omega)z} \bar{a}(0, \omega) \quad (27)$$

On a alors :

$$|\bar{a}(z, \omega)|^2 = e^{-2\frac{\omega}{c}\alpha''(\omega)\rho z} |\bar{a}(0, \omega)|^2 \quad (28)$$

---

3. En fait longueur effective dans le cas où la mesure est effectuée dans une cavité

### II.1.2 Calcul de la limite

La limite a été déterminée dans le cas général. Ici la dérivation ' se fait par rapport à la densité  $\rho$  (qui prend le rôle de  $\theta$ ). Compte tenu des équations de propagation :

$$\boxed{\bar{a}'(L, \omega) = iL \frac{\omega}{c} \alpha(\omega) \bar{a}(L, \omega)} \quad (29)$$

L'expression de l'information de Fisher sous la forme de l'équation (22) permet de conclure.

$$\boxed{I_Q = 4 \int \left| L \frac{\omega}{c} \alpha(\omega) \bar{a}(L, \omega) \right|^2 d\omega = 4 \frac{L}{c} \int |\omega \alpha(\omega)|^2 e^{-2\frac{\omega}{c} \alpha''(\omega) \rho L} |\bar{a}(0, \omega)|^2 d\omega} \quad (30)$$

Sous cette forme l'information de Fisher peut s'interpréter comme étant l'intégrale d'un spectre  $\left| \frac{L}{c} \omega \alpha(\omega) \right|^2$  par rapport à la mesure  $|\bar{a}(L, \omega)|^2 d\omega$  (normalisée à  $N$ ).

En effet  $|\bar{a}(L, \omega)|^2 d\omega$  est le nombre (moyen) de photon dans la bande de largeur  $d\omega$  centré en  $\omega$ .  $\left| \frac{L}{c} \omega \alpha(\omega) \right|^2$  est donc l'information portée par un photon de pulsation  $\omega$ .

### II.1.3 Répartition amplitude/phase

Les méthodes les plus communes de mesures spectrométriques ne s'intéressent qu'à l'amplitude du signal de sortie. L'information portée par la phase n'est en général pas récupérée. Quelle fraction de l'information récupère-t-on lorsque l'on ne mesure que l'intensité du signal en fonction de la fréquence ?

La manière rigoureuse de répondre à cette question serait d'utiliser l'équation (16) dans ce cas particulier. Nous allons proposer une méthode alternative plus rapide reposant sur une conjecture.

Supposons que ne pas mesurer la phase est équivalent à ne pas la prendre en compte dans la description de la sonde. Cela se traduit par l'hypothèse que l'information sur  $\rho$  contenue dans l'état et accessible sans mesurer la phase est la même que celle obtenue si on avait seulement  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} (1 + i\alpha''(\omega)\rho)$ , c'est à dire quand le déphasage ne dépend pas de  $\rho$  et n'apporte donc aucune information dessus.

On peut alors écrire :

$$I_{Q, \text{amplitude}} = 4 \int \left( L \frac{\omega}{c} \alpha''(\omega) \right)^2 |\bar{a}(L, \omega)|^2 d\omega \quad (31)$$

Par analogie,

$$I_{Q, \text{phase}} = 4 \int \left( L \frac{\omega}{c} \alpha'(\omega) \right)^2 |\bar{a}(L, \omega)|^2 d\omega \quad (32)$$

On a donc la relation attendue :

$$I_Q = I_{Q, \text{amplitude}} + I_{Q, \text{phase}} \quad (33)$$

Ces expressions confortent l'idée que l'information obtenue est la somme des informations portées par chacun des photons. Ainsi l'information moyenne par photon qui arrive sur le détecteur est  $\left| \frac{L}{c} \omega \alpha''(\omega) \right|^2$  pour la part apportée par l'amplitude du champ et  $\left| \frac{L}{c} \omega \alpha'(\omega) \right|^2$  celle apportée par la phase.

## II.2 Réexpression en terme de section efficace

La section efficace est une grandeur assez intuitive. De plus dans les tables de spectroscopie la profondeur d'une raie est souvent exprimée à l'aide de la section efficace. C'est pour cela que nous allons reformuler les résultats précédents en remplaçant  $\alpha$  par la section efficace.

### II.2.1 Définition

Une définition usuelle [3] de la section efficace part de l'intensité lumineuse. Pour une onde se propageant selon l'axe  $z$  dans un milieu diffusant de densité  $\rho$ , on définit  $\sigma(\omega)$  la section efficace à la pulsation  $\omega$  par :

$$\frac{dI(\omega)}{dz} = -\sigma(\omega)\rho I(\omega) \quad (34)$$

Avec  $I(\omega)$  la densité spectrale de puissance à la fréquence  $\omega$ .

Cette définition coïncide bien avec la surface qu'auraient des objets opaques présents avec une densité  $\rho$  et produisant la même déperdition d'intensité.

Il est tout à fait possible dans l'équation précédente de diviser par  $\omega$  et d'éliminer les constantes. La définition prend alors la forme suivante :

$$\frac{d|\bar{a}(z, \omega)|^2}{dz} = -\sigma(\omega)\rho|\bar{a}(z, \omega)|^2 \quad (35)$$

Dans notre cas, en utilisant la formule (28), on obtient  $\sigma(\omega) = 2\frac{\omega}{c}\alpha''(\omega)$ .

Une telle définition n'est pas tout à fait satisfaisante car on ne peut pas coder toute la connaissance du gaz dans  $\sigma(\omega)$ . Nous allons donc en proposer une autre (non équivalente; la notation change de signification ici).

Prenons comme définition pour  $\sigma(\omega)$  (nombre complexe) :

$$\boxed{\frac{d\bar{a}(z, \omega)}{dz} = i\frac{\omega}{c}\bar{a}(z, \omega) - \frac{\sigma(\omega)}{2}\rho\bar{a}(z, \omega)} \quad (36)$$

Cela mène alors à :

$$\frac{d|\bar{a}(z, \omega)|^2}{dz} = -\text{Re}(\sigma(\omega))\rho|\bar{a}(z, \omega)|^2 \quad (37)$$

En comparant les équations (35) et (37), on trouve que la partie réelle de cette section efficace coïncide avec la définition usuelle.

On adoptera pour  $\sigma$  les mêmes conventions d'écriture que pour  $\alpha$  :  $\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega)$

**Interprétation** La partie réelle coïncide avec la section efficace usuelle. Essayons d'interpréter la partie imaginaire.

Prenons  $\bar{a} = |\bar{a}|e^{i\varphi}$ . On a alors :

$$\frac{d\bar{a}}{dz} = \left( \frac{1}{\bar{a}} \frac{d|\bar{a}|}{dz} + i \frac{d\varphi}{dz} \right) \bar{a} \quad (38)$$

En comparant avec la définition de la section efficace on obtient :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\omega}{c} - \frac{\sigma''(\omega)}{2}\rho \quad (39)$$

Réécrivons cela en terme de longueur d'onde  $\lambda$  ( $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ).

$$d\varphi = 2\pi \frac{dz}{\lambda} - 2\pi \frac{\lambda}{4\pi} \sigma''(\omega) \rho dz \quad (40)$$

Le premier terme correspond à la propagation dans le vide. Dans le second,  $\sigma''(\omega) \rho dz$  est le nombre de particules de section  $\sigma''(\omega)$  rencontrées sur la distance  $dz$  et  $\frac{\lambda}{4\pi}$  un chemin optique.

Ainsi le second terme peut s'interpréter par le fait qu'avec un  $\sigma$  complexe pur donné la situation est équivalente à avoir des objets de section  $\text{Im}(\sigma)$  présents avec la densité  $\rho$ ; chacun affecte tout rayon lumineux qui le touche en lui retirant une phase  $2\pi \frac{\lambda}{4\pi} = \frac{1}{2}$ . On pourrait décrire cela par un « piège » dans l'espace-temps induisant un chemin optique supplémentaire de longueur  $\frac{\lambda}{4\pi}$  à tout rayon lumineux qui le touche.

**lien avec  $\alpha$**  Partant de l'équation (27), on trouve que

$$i \frac{\omega}{c} \alpha(\omega) = -\frac{\sigma(\omega)}{2} \quad (41)$$

On peut ainsi écrire :

$$\boxed{k(\omega) = \frac{\omega}{c} + i \frac{\sigma(\omega)}{2} \rho} \quad (42)$$

## II.2.2 Réexpression de l'information de Fisher

Partant de l'équation (29), on peut réécrire  $\bar{a}'$  :

$$\bar{a}'(L, \omega) = -L \frac{\sigma(\omega)}{2} \bar{a}(L, \omega) \quad (43)$$

L'équation (30) se met sous la forme :

$$I_Q = 4 \int \left| L \frac{\sigma(\omega)}{2} \bar{a}(L, \omega) \right|^2 d\omega \quad (44)$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{I_Q = L^2 \int |\sigma(\omega)|^2 |\bar{a}(L, \omega)|^2 d\omega} \quad (45)$$

Cette forme met en évidence une information par photon de  $L^2 |\sigma(\omega)|^2$ . On peut toujours la séparer en une partie provenant de l'amplitude :  $L^2 |\sigma'(\omega)|^2$ , et l'autre de la phase :  $L^2 |\sigma''(\omega)|^2$ .

## II.3 Mesure de traces de gaz avec un peigne de fréquence

La mesure de densité de traces de gaz est un exemple d'expérience qui nécessite une excellente précision. Voyons comment les résultats établis précédemment s'expriment dans ce cas, pour donner un résultat facilement interprétable. Mais avant décrivons le peigne de fréquence et voyons pourquoi son usage est adapté à cette mesure.

### II.3.1 Source de lumière : le peigne de fréquences

Afin de réaliser les mesures, il faut une source lumineuse. L'absorption dépend de la fréquence; il est donc préférable d'avoir un spectre le plus large possible (une molécule n'a jamais qu'une résonance). Ensuite pour effectuer une mesure selon le mode dérivé, il faut connaître la phase de la lumière, et ce à toutes les fréquences utilisées.

Les peignes de fréquences répondent à ces deux exigences. Le principe est qu'en introduisant un couplage entre les modes longitudinaux de la cavité, les phases des différents modes s'harmonisent. Ainsi dans le domaine temporel le laser émet une succession d'impulsions, dont les phases sont bien définies. De plus les dents sont situées à des fréquences bien précises. Cela a des applications en métrologie ou en spectroscopie [1].

Un modèle de forme du champ électrique consiste à prendre :

$$E^{(+)}(0, t) = \sum_n \mathcal{A}_{\text{env}}(t - n\tau) e^{-i\omega_p(t-n\tau)} e^{-in\Delta\Phi_{CE}} \quad (46)$$

Avec  $\tau$  le temps entre deux impulsions,  $\mathcal{A}_{\text{env}}(t - n\tau)$  l'enveloppe de chaque pulsation qui est lentement variable en comparaison au terme exponentiel,  $\omega_p$  la pulsation de la porteuse et  $\Delta\Phi_{CE}$  une constante représentant la différence de phase entre l'enveloppe et la porteuse.

Dans le domaine fréquentiel cela devient :

$$E^{(+)}(0, \omega) = E_{\text{env}}^{(+)}(0, \omega) \sum_n \delta(\omega - \omega_n) \quad (47)$$

Avec  $\omega_n = \omega_{CE} + n\omega_r$ ,  $\omega_{CE} = \frac{\Delta\Phi_{CE}}{2\pi}\omega_r$  et  $\omega_r = \frac{2\pi}{\tau}$ .

En pratique pour une résonance moléculaire donnée,  $E_{\text{env}}^{(+)}(0, \omega)$  ne varie presque pas.

### II.3.2 Limite des faibles concentrations

Ici on cherche à mesurer des traces de gaz. L'absorption est donc négligeable et on pourra faire l'approximation que  $|\bar{a}(L, \omega)|^2 = |\bar{a}(0, \omega)|^2$ . Cette approximation est discutée en III.3.1 dans le cas d'une résonance lorentzienne.

On remarque que  $\bar{a}(z, \omega) = \frac{\text{Cst}}{\sqrt{\omega}} E^{(+)}(z, \omega)$ . Ici on étudie des phénomènes où les largeurs spectrales caractéristiques sont celles des résonances moléculaires. Les fréquences sont dans le visible ou l'infrarouge. Ainsi les variations de fréquences sont négligeables comparé à la fréquence centrale des résonances. Le  $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$  peut être considéré comme constant pour les variations qui nous intéressent. Il est donc équivalent de dire que le spectre  $|E^{(+)}(0, \omega)|^2$  ou bien  $|\bar{a}(0, \omega)|^2$  sont indépendants de  $\omega$ .

La largeur spectrale des résonances moléculaires est en général faible devant la pulsation caractéristique d'évolution de l'enveloppe d'un peigne de fréquence. On peut donc considérer que l'enveloppe du peigne est constante. Très loin de la résonance une telle hypothèse n'a aucune importance puisque la section efficace est de toute façon quasiment nulle.

On va ajouter l'hypothèse que les dents du peigne de fréquence sont suffisamment resserrées pour que le spectre de la molécule ne change presque pas entre deux dents. Avec cette hypothèse, on peut remplacer une succession de dents resserrées par leur valeur moyenne, proportionnelle à la valeur du champ de l'enveloppe. On peut donc approximer le spectre du peigne de fréquences par un spectre continu.

En résumé de toutes ces hypothèses, on peut raisonnablement considérer que  $|\bar{a}(L, \omega)|^2$  est indépendant de  $\omega$ .

Soit  $\Gamma$  la largeur spectrale de  $\sigma$ . Comme la notion de largeur spectrale n'est pas définie dans le cas général,  $\Gamma$  est une constante positive arbitraire. Elle a le sens d'une largeur spectrale. Soit  $\Sigma$  la section efficace moyenne définie par :

$$\Sigma = \sqrt{\int |\sigma(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\Gamma}} \quad (48)$$

Avec les hypothèses retenues,  $|\bar{a}(L, \omega)|^2$  est indépendant de  $\omega$ . On va donc l'écrire  $|\bar{a}(L, \omega)|^2 = \frac{N}{\omega_L}$ , densité spectrale de photon ( $\omega_L$  représente la largeur spectrale totale du laser,  $N$  la quantité de photons ; la fraction restera indissociable).

Avec ces notations,

$$I_Q = L^2 \Sigma^2 \frac{N}{\omega_L} \Gamma \quad (49)$$

Ainsi la variance sur la mesure de densité s'exprime :

$$\delta\rho_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{\omega_L} \Gamma}} \frac{1}{L\Sigma} \quad (50)$$

Ce résultat est particulièrement simple. En effet il signifie que la précision évolue en  $\frac{1}{\sqrt{N_{\text{eff}}}}$  avec  $N_{\text{eff}}$  le nombre de photons envoyés à la fréquence de résonance à  $\Gamma$  près. Cela revient à dire que chacun de ces photons effectue une mesure indépendante de celle des autres. Chacun de ces photons est capable en moyenne de détecter une particule dans le volume  $L\Sigma$  qu'il balaye lors de la traversée de la cellule.

### III Cas typique : la résonance lorentzienne

Jusqu'à présent nous n'avons pas donné de forme particulière à la section efficace. Afin de mieux comprendre les résultats précédents on va étudier le cas d'une résonance lorentzienne. Plus qu'un exemple, ce cas sert bien souvent de brique pour construire les spectres de molécules. Certaines tables de spectres partent de l'hypothèse que chaque résonance est de cette forme et en donne les deux paramètres.

Dans toute cette partie on fait l'hypothèse que  $|\bar{a}(0, \omega)|^2$  est indépendant de  $\omega$ . Cette hypothèse a été discutée juste avant l'équation (48). On prendra donc toujours  $|\bar{a}(0, \omega)|^2 = \frac{N}{\omega_L}$ .

#### III.1 De l'électron élastiquement lié à la résonance lorentzienne

##### III.1.1 Présentation du modèle

Le modèle de l'électron élastiquement lié consiste à décrire un atome comme étant composé d'un noyau immobile de charge  $-q$  et un électron mobile de charge  $q$  et masse  $m$ . On suppose l'existence d'une force de rappel harmonique, telle que la pulsation des oscillations naturelles est  $\omega_0$ . Comme toute charge accélérée, l'électron va rayonner. On modélise cette déperdition d'énergie par un terme de frottement fluide de fréquence caractéristique  $\Gamma$ . On note  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide et  $\varepsilon_0$  la permittivité du vide. Un calcul partant de la formule de Larmor permet d'obtenir une expression de  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \frac{\omega_0^2 q^2}{6\pi\varepsilon_0 m c^3} \quad (51)$$

Exprimons avec les notations usuelles le vecteur d'onde pour ce modèle.

$$k = \frac{\omega}{c}n = \frac{\omega}{c}\sqrt{1+\chi} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right) \quad (52)$$

avec  $\chi$  la susceptibilité électrique du milieu qui s'exprime ici par :

$$\chi = \frac{\rho q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} = \frac{\rho q^2}{m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \quad (53)$$

On a donc

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{2m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} = \frac{q^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \quad (54)$$

### III.1.2 Approximations

On va utiliser l'approximation usuelle qui consiste à mettre la résonance sous forme lorentzienne. On note  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ . On a :

$$\omega^2 |\alpha(\omega)|^2 = \frac{q^4}{4m^2\varepsilon_0^2} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \quad (55)$$

$$\omega\alpha'(\omega) = \frac{q^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \quad (56)$$

$$\omega\alpha''(\omega) = \frac{q^2\Gamma}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \quad (57)$$

Avec cette approximation,

$$\frac{\omega^2}{((\omega - \Delta\omega)^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} = \frac{1}{\Gamma^2 + 4\Delta\omega^2 - 4\frac{\Delta\omega^3}{\omega} + \frac{\Delta\omega^4}{\omega^2}} \simeq \frac{1}{\Gamma^2} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega^2}{(\frac{\Gamma}{2})^2}} \quad (58)$$

$$\frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{((\omega - \Delta\omega)^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} = \frac{-2\Delta\omega + \frac{\Delta\omega^2}{\omega}}{\Gamma^2 + 4\Delta\omega^2 - 4\frac{\Delta\omega^3}{\omega} + \frac{\Delta\omega^4}{\omega^2}} \simeq \frac{1}{\Gamma} \frac{-\frac{\Delta\omega}{2}}{1 + \frac{\Delta\omega^2}{(\frac{\Gamma}{2})^2}} \quad (59)$$

Et donc :

$$\omega\alpha'(\omega) = \frac{q^2}{2\Gamma m\varepsilon_0} \frac{-\frac{\Delta\omega}{2}}{1 + \frac{\Delta\omega^2}{(\frac{\Gamma}{2})^2}} \quad (60)$$

$$\omega\alpha''(\omega) = \frac{q^2}{2\Gamma m\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega^2}{(\frac{\Gamma}{2})^2}} \quad (61)$$

On arrive donc au résultat :

$$\omega^2 |\alpha(\omega)|^2 = \frac{q^4}{4\Gamma^2 m^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega^2}{(\frac{\Gamma}{2})^2}} \quad (62)$$

### III.1.3 Section efficace

Exprimons la section efficace dans le cas lorentzien (proche de la résonance). Il suffit d'utiliser les équations (41), (60) et (61).

$$\sigma = \frac{q^2}{\Gamma m \varepsilon_0 c} \frac{1 + i \frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2} \quad (63)$$

En injectant  $\Gamma = \frac{\omega_0^2 q^2}{6\pi \varepsilon_0 m c^3}$ , on obtient

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \lambda_0^2 \frac{1 + i \frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2}$$

La partie réelle est bien celle de l'électron élastiquement lié [3].

On a aussi :

$$|\sigma|^2 = \frac{q^4}{\Gamma^2 m^2 \varepsilon_0^2 c^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2} \quad (64)$$

### III.1.4 Cas lorentzien plus général

Les résonances des molécules ne mettent jamais en jeu un unique électron, mais sont souvent due aux vibrations des liaisons. Cependant leur forme restent lorentzienne. C'est pour cela que bien souvent ce qui est tabulé est la largeur à mi-hauteur et la section efficace à résonance.

Ainsi on va regarder le cas :

$$\sigma = \sigma_0 \frac{1 + i \frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2} \quad (65)$$

Où les valeurs de  $\sigma_0$  et  $\Gamma$  sont réelles. Ces valeurs sont tabulées. On va adopter la convention la plus courante dans les tables. On considère que  $\omega \in [0, +\infty[$ . Une erreur de convention peut donner lieu à une erreur d'un facteur 2.

On a alors :

$$|\sigma|^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2} \quad (66)$$

Dans la suite on utilisera cette forme le plus possible.

## III.2 Limite quantique standard pour une résonance lorentzienne

Nous allons déterminer la limite de précision sur la mesure de densité d'un gaz ayant une résonance lorentzienne.

### III.2.1 Expression

On se place dans les hypothèses de la partie II.3. C'est à dire que le milieu est peu absorbant (voir III.3.1) et la lumière incidente a un spectre constant (approximation valable quand les différentes grandeurs caractéristiques de pulsations sont bien séparées).

Soit une résonance lorentzienne avec  $\sigma_0$  et  $\Gamma$  données. On va utiliser l'équation (50). Comme choix du  $\Gamma$  (largeur spectrale arbitraire) qui rentre dans la définition de  $\Sigma$ , on prend le  $\Gamma$  de la résonance (largeur à mi-hauteur). Pour rappel :

$$\delta\rho_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{\omega_L}\Gamma}} \frac{1}{L\Sigma} \quad (67)$$

avec

$$\Sigma = \sqrt{\int |\sigma(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\Gamma}} \quad (68)$$

Ainsi

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{\Gamma} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2} d\omega \quad (69)$$

Posons  $x = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{\Gamma}{2}}$ . On a alors  $\omega = \omega_0 + \frac{\Gamma}{2}x$ .

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \int_{-\frac{\omega_0}{\frac{\Gamma}{2}}}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx \quad (70)$$

On effectue le changement de variable  $x = \tan(u)$ . Cela donne :

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega_0}{\frac{\Gamma}{2}}\right) \right) \quad (71)$$

En pratique l'arctan sera très proche de  $\frac{\pi}{2}$ . On pourra raisonnablement effectuer le remplacement quand  $\frac{\omega_0}{\frac{\Gamma}{2}} \gg 1 \Leftrightarrow \omega_0 \gg \frac{\Gamma}{2}$ . En pratique pour des mesures dans le visible (l'infra-rouge n'est pas très différent),  $\omega_0 \simeq$  quelques  $10^{15}$  Hz et  $\Gamma \simeq$  quelques  $10^7$  Hz. L'approximation est plus que légitime pour ces fréquences. On a donc dans le cas lorentzien :

$$\Sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (72)$$

$$\delta\rho_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{\omega_L}\Gamma}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{L\sigma_0} \quad (73)$$

Dans le cas d'un électron élastiquement lié qui dissipe son énergie par radiation,  $\sigma_0 = \frac{3}{2\pi} \lambda_0^2$  avec  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide de la lumière résonante.  $\lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega_0}$

En conclusion dans ce cas on trouve comme limite quantique standard :

$$\delta\rho_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{\omega_L}\Gamma}} \frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \frac{1}{L\lambda_0^2} \quad (74)$$

### III.2.2 Ordres de grandeurs

Calculons une valeur numérique de  $\delta\rho_{\min}$  pour  $L = 1$  m et  $\lambda_0 = 880$  nm. On fait le calcul pour un seul photon; la précision évolue en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ .

On utilise les valeurs tabulées des constantes ( $q$  et  $m$  sont celles d'un électron). Cela donne environ  $\Gamma = 28$  MHz. Pour une longueur  $L = 1$  m, on obtient :

$$\delta\rho_{\min} = 1,2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3} \quad (75)$$

### Réexpression avec d'autres variables

**En terme de pression** Dans l'hypothèse où l'on veut mesurer la concentration d'un gaz très dilué (dans l'air), il est plus que raisonnable de considérer qu'il suit la loi des gaz parfaits :  $P = \rho k_b T$ ,  $P$  la pression partielle du gaz,  $k_b$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. Dans les mêmes conditions que précédemment, à  $T = 300$  K on obtient donc :

$$\delta p_{\min} = 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}$$

**En partie par milliard** On prends ici le rapport des pressions en partie par milliard.

$$\frac{\delta p_{\min}}{P_{\text{atmosphère}}} = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ ppb}$$

En résumé :

Grandeur	densité (particules.m <sup>-3</sup> )	densité (mol.m <sup>-3</sup> )	pression (Pa)	fraction (ppb)
$\delta\rho_{\min}$	$1,21747 \cdot 10^{12}$	$2,02166 \cdot 10^{-12}$	$5,0427 \cdot 10^{-9}$	$4,97675 \cdot 10^{-5}$

## III.3 Localisation de l'information

Rappelons l'équation (45) :

$$I_Q = L^2 \int |\sigma(\omega)|^2 |\bar{a}(L, \omega)|^2 d\omega \quad (76)$$

On a déjà remarqué qu'il est naturel de définir l'information par photon comme  $L^2 |\sigma(\omega)|^2$ , que l'on peut séparer en une partie provenant de l'amplitude ( $L^2 |\sigma'(\omega)|^2$ ), et l'autre de la phase ( $L^2 |\sigma''(\omega)|^2$ ).

Cela permet de discuter de la répartition spectrale de l'information, ainsi que sa répartition entre amplitude et phase. Une telle étude n'a rien de futile. En effet ici le spectre de la lumière incidente est une donnée du problème. Dans le cas où ça devient un paramètre ajustable, on aura intérêt à mettre le plus de photons possibles aux fréquences qui maximisent le spectre d'information.

### III.3.1 Localisation spectrale

La question qui se pose est de savoir si l'information est plutôt au centre de la résonance ou sur les bords. Ici on n'introduit pas l'hypothèse d'une faible concentration. On va par contre prendre une lumière incidente de spectre ( $|\bar{a}(0, \omega)|$ ) constant. On va donc s'intéresser à l'intégrande qui

apparaît dans la formulation intégrale de l'information de Fisher. En posant  $x = \frac{\Delta\omega}{\frac{\sigma}{2}}$  cette intégrande vaut :

$$|\sigma(\omega)|^2 |\bar{a}(L, \omega)|^2 = |\sigma(\omega)|^2 e^{-\sigma'(\omega)\rho L} |\bar{a}(0, \omega)|^2 \quad (77)$$

$$= \sigma_0^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\frac{\sigma}{2}}\right)^2} e^{-\frac{\sigma_0 \rho L}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\frac{\sigma}{2}}\right)^2}} |\bar{a}(0, \omega)|^2 \quad (78)$$

$$= \sigma_0^2 \frac{1}{1 + x^2} e^{-\frac{\sigma_0 \rho L}{1 + x^2}} |\bar{a}(0, \omega)|^2 \quad (79)$$

Commençons par tracer quelques profils particuliers (figure 3). On remarque qu'on peut

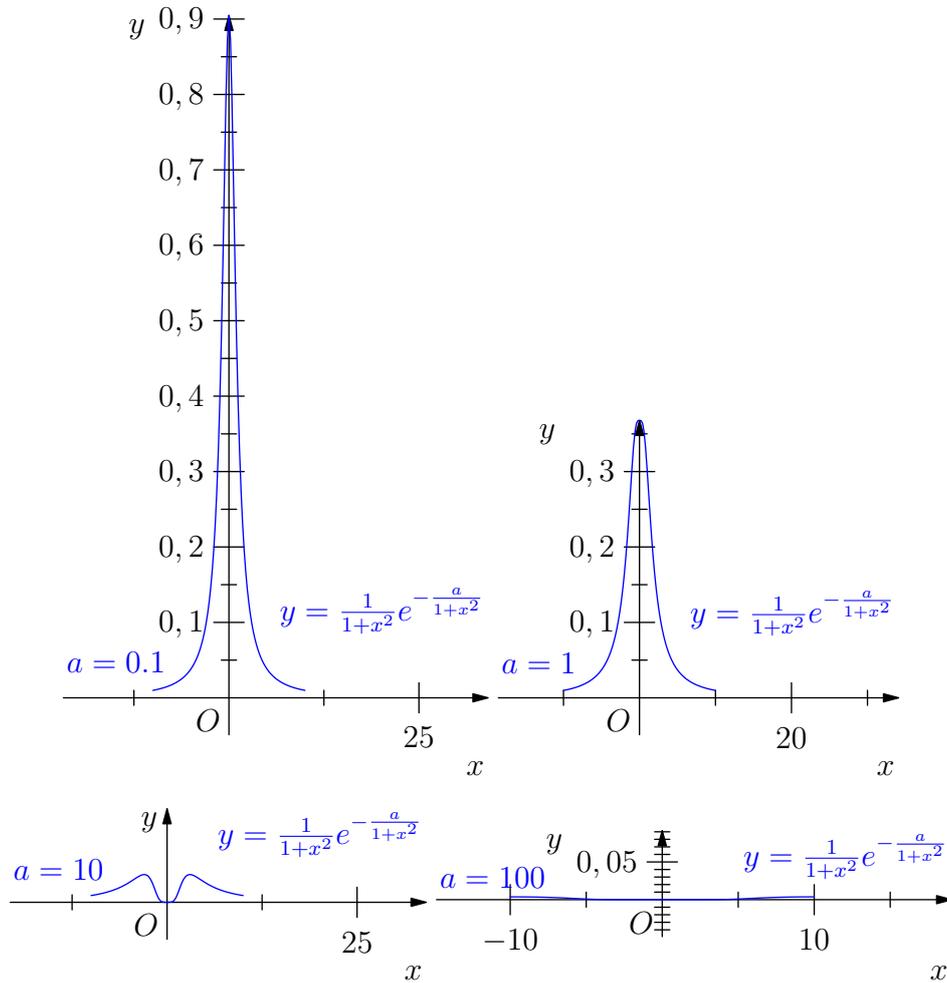


FIGURE 3 – Formes typiques de l'intégrande (densité spectrale d'information) pour différentes valeurs de paramètres

séparer les situations en deux cas. Soit l'information se trouve principalement au centre de la résonance, soit elle se trouve sur les bords.

Passons au calcul pour déterminer les conditions dans lesquelles l'information atteint son maximum au centre de la résonance. Posons  $f = \frac{1}{1+x^2} e^{-\frac{A}{1+x^2}}$ .  $f$  est paire donc  $\frac{df}{dx}(0) = 0$ . La question est maintenant de savoir si  $f$  atteint un maximum ou un minimum local en  $x = 0$ . Pour cela, cherchons la courbure de la fonction en  $x = 0$ . Le calcul des dérivées étant un peu long, je l'ai fait avec `sympy` (bibliothèque de calcul formel en python).

On trouve  $\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 2(A-1)e^{-A}$ . La propriété d'avoir l'information principalement contenue dans la résonance se traduit par  $\frac{d^2f}{dx^2}(0) \leq 0$ .

$$\frac{d^2f}{dx^2}(0) \leq 0 \Leftrightarrow A \leq 1 \Leftrightarrow \sigma_0 \rho L \leq 1 \Leftrightarrow \rho \leq \frac{1}{\sigma_0 L} \quad (80)$$

Ainsi il existe une densité caractéristique  $\frac{1}{\sigma_0 L}$  frontière. Elle correspond à la densité telle qu'en moyenne chaque photon à résonance croise une molécule.

Pour les densités supérieures, les photons exactement à la pulsation résonnante (qui portent chacun beaucoup d'information) sont presque tous absorbés et ne donnent que l'information « la molécule est présente en grande concentration ». Il est alors préférable de regarder un peu hors résonance. Remarque : les photons diffusés portent a priori de l'information qu'il serait intéressant de récupérer.

Au contraire quand la densité est inférieure à la densité frontière, il vaut mieux envoyer les photons à résonance. Les situations qui nous intéressent sont celle où la concentration est très faible. Pour la suite, on se place dans ce cas. On négligera donc la partie exponentielle de l'intégrande, c'est à dire qu'on prendra  $|\bar{a}(L, \omega)| = |\bar{a}(0, \omega)| = \text{Constante}$ .

### III.3.2 Amplitude/Phase

On va reprendre ce qui a été fait en partie II.1.3, mais dans le cas particulier de la résonance lorentzienne. De plus on va comparer les informations apportées par la phase et l'amplitude pour chaque pulsation (la discussion portera sur l'intégrande).

Posons

$$\bar{a}'|_{\text{phase}} = i \frac{L}{c} \omega \alpha'(\omega) \bar{a}(\omega) = -L \frac{\sigma''(\omega)}{2} \bar{a}(\omega) \quad (81)$$

et

$$\bar{a}'|_{\text{amplitude}} = -\frac{L}{c} \omega \alpha''(\omega) \bar{a}(\omega) = -L \frac{\sigma'(\omega)}{2} \bar{a}(\omega) \quad (82)$$

Avec ces définitions,

$$|\bar{a}'|^2 = |\bar{a}'|_{\text{phase}}|^2 + |\bar{a}'|_{\text{amplitude}}|^2 \quad (83)$$

On va s'intéresser à  $|\bar{a}'|_{\text{phase}}|^2$  et  $|\bar{a}'|_{\text{amplitude}}|^2$ , et ce en fonction de la fréquence. Comme  $|\bar{a}|^2$  affecte de la même manière les deux parties, on ne va pas le prendre en compte. Son rôle a été traité dans la section précédente.

Pour une résonance lorentzienne, d'après la formule (65),

$$\left| \frac{\bar{a}'|_{\text{phase}}}{\bar{a}} \right|^2 = L^2 \left( \frac{\sigma''(\omega)}{2} \right)^2 = \frac{L^2 \sigma_0^2}{4} \frac{\frac{\Delta\omega^2}{(\frac{\Gamma}{2})^2}}{\left( 1 + \frac{\Delta\omega^2}{(\frac{\Gamma}{2})^2} \right)^2} \quad (84)$$

De même,

$$\left| \frac{\bar{a}' \text{amplitude}}{\bar{a}} \right|^2 = L^2 \left( \frac{\sigma'(\omega)}{2} \right)^2 = \frac{L^2 \sigma_0^2}{4} \frac{1}{\left( 1 + \frac{\Delta\omega^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \right)^2} \quad (85)$$

Traçons l'allure de ces fonctions, ce qui correspond à la répartition de l'information quand l'amplitude est constante (par rapport à la fréquence) (figure 4).

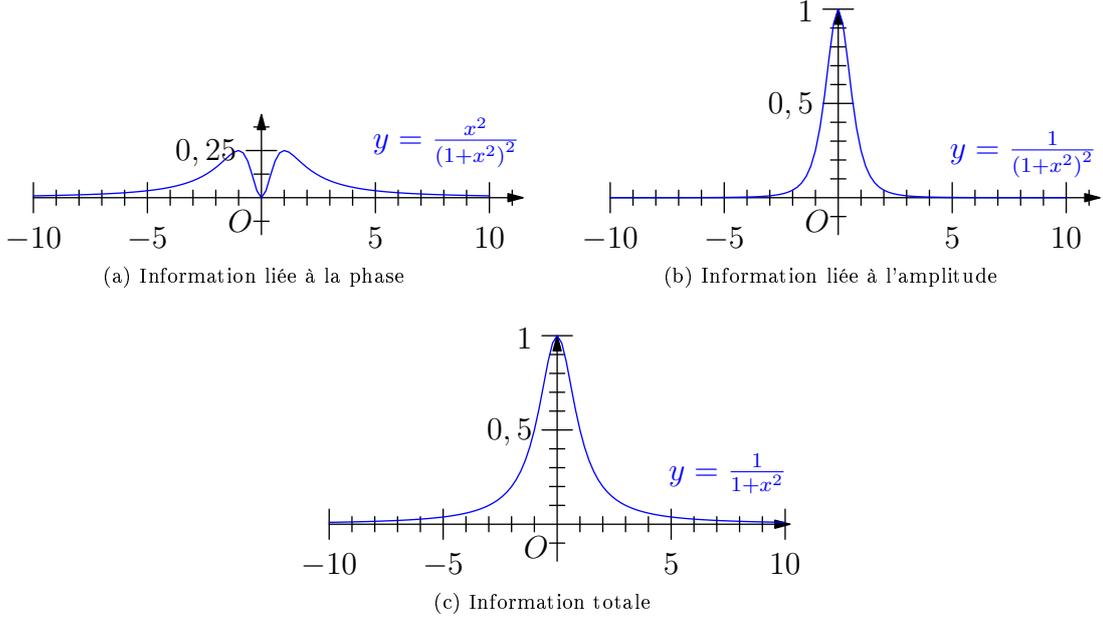


FIGURE 4 – Répartition des informations liées à la phase (a) et à l'amplitude (b) et information totale (c).

On remarque que la phase ne donne pas d'information exactement à la fréquence de résonance. Ceci n'est pas surprenant puisque à cette fréquence il n'y a aucun effet sur la phase, et ce indépendamment de la concentration du gaz.

Calculons la part d'information pour chacune des deux parties. Le choix des bornes d'intégration est expliqué en partie III.2.1. En notant  $A$  le facteur de proportionnalité et en utilisant le changement de variable habituel ( $x = \tan(u)$ ) :

$$I_{Q,\text{amplitude}} = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = A \frac{\pi}{2} \quad (86)$$

Or avec le même  $A$ ,

$$I_{Q,\text{total}} = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = A\pi \quad (87)$$

Ainsi dans le cas Lorentzien on a :

$$I_{Q,\text{amplitude}} = I_{Q,\text{phase}} = \frac{I_{Q,\text{total}}}{2} \quad (88)$$

Ainsi l'information est équitablement répartie entre phase et amplitude. L'information donnée par l'amplitude s'obtient pour des fréquences très proche de la résonance. L'information liée à la phase se situe de part et d'autre de la fréquence centrale.

## Conclusion

Au commencement, nous avons vu comment déterminer l'incertitude sur l'estimation d'un paramètre. L'application de ce formalisme au cas de la mesure quantique nous donne une limite sur la précision de l'estimation d'un paramètre physique. Plus précisément nous avons vu ce que cela donne dans le cas d'une mesure optique effectuée avec une lumière cohérente.

Ensuite nous avons appliqué cela pour déterminer la limite quantique standard sur la mesure de la densité d'un gaz. L'expression de cette limite a été reformulée en terme de section efficace, notion intuitive qu'il a fallu redéfinir pour l'occasion.

Enfin nous avons étudié l'archétype des résonances : la résonance lorentzienne. Cela a permis d'aboutir à une formule simple pour la limite de densité mesurable. Cela n'est pas anodin puisque la plupart des spectres sont très bien approchés par une somme de lorentziennes. Nous avons également acquis une meilleure compréhension du problème sur cet exemple, notamment pour savoir à quelle fréquence aller chercher l'information.

Ces résultats théoriques gagneraient à être transposés en expérience. Mais il faut garder à l'esprit que pour observer les fluctuations quantiques, il faut déjà éliminer les bruits classiques. Ça n'est pas impossible mais est un véritable défi expérimental.

Il faudra également vérifier que les caractéristiques du laser utilisé sont conformes aux approximations effectuées. En pratique les dents du peigne de fréquence du laboratoire sont espacées de 150 MHz. Cela est bien trop grand pour pouvoir effectuer la mesure sur des résonances qui ont comme largeur quelques dizaines à centaines de mégahertz.

Durant l'étude du cas lorentzien, il est ressorti quelque chose de remarquable. L'information liée à l'absorption est très localisée près du centre de la résonance (décroissance en  $\frac{1}{x^4}$ ). Au contraire la phase donne des informations sur la densité à des fréquences plus éloignées du centre. On peut d'ores et déjà imaginer des applications à cela. Typiquement pour une mesure précise d'un gaz présent en forte concentration, presque toute la lumière envoyée à la fréquence de résonance sera absorbée (voir figure 3). Il sera alors préférable de regarder la phase sur les bords de la résonance, là où la lumière passe. Dans un cas où on souhaiterait ne pas trop perturber le système, il serait avisé d'effectuer la mesure en utilisant la phase, à des fréquences où l'absorption est faible, mais où la phase donne encore beaucoup d'information.

Dans le travail présenté jusqu'ici, il n'y avait qu'une seule molécule à étudier. Peut-on mesurer la concentration d'une molécule donnée en présence d'autres molécules ayant des spectres proches? Quelle sera la limite de précision d'une telle mesure? Pour répondre à cette question, inspirons nous de (24) mais avec plusieurs paramètres :

$$\bar{a}_{\theta+\delta\theta,\mu+\delta\mu} = \bar{a}_\theta + \delta\theta \frac{\partial \bar{a}'_{\theta,\mu}}{\partial \theta} + \delta\mu \frac{\partial \bar{a}'_{\theta,\mu}}{\partial \mu} \quad (89)$$

Rappelons que la détection homodyne effectue un produit scalaire avec un mode donné. Si les modes  $\frac{\partial \bar{a}'_{\theta,\mu}}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \bar{a}'_{\theta,\mu}}{\partial \mu}$  sont orthogonaux alors il n'y aura aucun problème pour récupérer la

valeur d'un paramètre indépendamment des autres. Si ça n'est pas le cas, il est plausible qu'en regardant un mode orthogonal à une dérivée et non orthogonal à l'autre, on va pouvoir récupérer le valeur de l'un des deux paramètres indépendamment de celle de l'autre. Par contre ceci se payera au prix d'une réduction de la sensibilité, puisqu'on ne détecte alors plus sur un mode colinéaire.

D'autres pistes d'amélioration seraient de prendre en compte la polarisation, ou bien de chercher à optimiser l'état initial de la sonde (qui était une donnée ici). Il reste donc du travail pour examiner en détail ce qui a été esquissé dans la conclusion.

## Remerciements

Ce travail a été réalisé dans l'équipe d'optique quantique du laboratoire Kastler–Brossel. Je tiens à en remercier tous les membres sans qui le laboratoire ne serait pour moi qu'une table et parfois une chaise. Ma reconnaissance se porte tout particulièrement sur Nicolas Treppe, toujours disponible, prêt à aider et sans qui ce document n'aurait jamais vu le jour sous cette forme. Pu Jian a également été extraordinaire en me préparant le terrain, et en continuant à m'aider même depuis le bout du monde. Je n'oublie pas non plus Claude Fabre, toujours disponible pour mettre toute sa science à contribution.

Quand à tous les autres, ils n'ont pas besoin de mon aide pour se reconnaître et trouver une raison pour laquelle je les remercie.

## Liste des symboles

$\Theta$	Paramètre dont on cherche à déterminer la valeur . . . . .	2
$\sigma_{\tilde{\theta}}^2$	(réel) Variance de $\tilde{\theta}$ ( $\theta$ est fixé) . . . . .	4
$P_{\theta}(\xi_i)$	(réel) Probabilité (cas discret ou densité de probabilité (cas continu) d'obtenir $\xi_i$ lors d'un unique tirage ( $\theta$ est fixé) . . . . .	4
$I_F(\theta)$	(réel) Information de Fisher, voir équation (11) . . . . .	5
$\delta\theta_{\min}$	(réel) Plus petite variation de $\theta$ mesurable (le choix de l'estimateur étant libre) . . . . .	5
$\theta$	(réel) Valeur du paramètre $\Theta$ , c'est elle qu'on essaye d'obtenir . . . . .	2
$\xi$	Variable aléatoire réelle (ou vectorielle) dépendante du paramètre $\Theta$ . . . . .	3
$Q$	(entier) Nombre de réalisations de mesures indépendantes entrant dans l'estimation de la valeur du paramètre $\Theta$ . . . . .	3
$\xi_i$	(réel ou vectoriel) Valeur de la $i$ -ème réalisation de $\xi$ ( $\theta$ fixé) . . . . .	3
$\xi$	(liste de réels ou vecteurs) Liste des $Q$ valeurs des $Q$ réalisations de $\xi$ ( $\theta$ fixé) . . . . .	3
$\tilde{\theta}$	(réel) Estimation de la valeur de $\Theta$ calculée à partir des mesures (rassemblées dans $\xi$ ) . . . . .	3
$P_{\theta}(\xi)$	(réel) Probabilité (cas discret) ou densité de probabilité (cas continu) d'obtenir les réalisations $\xi$ étant donné que $\Theta$ vaut $\theta$ . . . . .	3
$E[\tilde{\theta}]$	(réel) Espérance de la variable aléatoire $\tilde{\theta}$ . . . . .	3
$\{\hat{E}_j\}$	Ensemble d'opérateurs hermitiens positifs définissant une mesure, voir équation (15) . . . . .	6
$\hat{\rho}_0$	(matrice densité) Matrice densité de la sonde dans son état initial . . . . .	6
$\hat{\rho}_{\theta}$	(matrice densité) Matrice densité de la sonde après interaction avec le système sondé . . . . .	6
$I_Q(\theta)$	(réel) Information de Fisher quantique, voir équation (18) . . . . .	6
$z$	(réel en m) Abscisse le long de la direction de propagation de la lumière . . . . .	7
$\omega$	(réel en Hz) Pulsation (variable muette) . . . . .	7
$\  \cdot \ $	(norme) Norme $L^2$ : $\ X\  = \int X(\omega) d\omega$ . . . . .	7
$N$	(entier) Nombre moyen de photons reçu en un $z$ donné . . . . .	8
$\bar{a}(z, \omega)$	(complexe) Moyenne (au sens quantique) de l'opérateur local d'annihilation (intégré sur les dimensions transverses) . . . . .	8
$'$	(opérateur de dérivation) dérivée par rapport à $\theta$ : $x' = \frac{dx}{d\theta}$ . . . . .	8
$L$	(réel en m) Longueur effective de la cellule de gaz . . . . .	9
$\rho$	(réel en $\text{molecule m}^{-3}$ ) Densité de gaz dans la cellule. C'est le paramètre que l'on cherche à mesurer . . . . .	9
$k$	(complexe en $\text{m}^{-1}$ ) Vecteur d'onde dans le gaz. Ne dépend que de $\omega$ , voir équation (25) . . . . .	9
$\alpha$	(complexe en $\text{m}^3\text{molecule}^{-1}$ ) Spectre de la molécule, voir équation (25) . . . . .	9
$\alpha'$	(réel en $\text{m}^3\text{molecule}^{-1}$ ) Partie réelle de $\alpha$ . . . . .	9
$\alpha''$	(réel en $\text{m}^3\text{molecule}^{-1}$ ) Partie imaginaire de $\alpha$ . . . . .	9

$\sigma$	(complexe en $\text{m}^2 \text{molecule}^{-1}$ ) Section efficace complexe (dépend de $\omega$ ) , voir équation (36).....	11
$\sigma'$	(réel en $\text{m}^2 \text{molecule}^{-1}$ ) Partie réelle de $\sigma$ .....	11
$\sigma''$	(réel en $\text{m}^2 \text{molecule}^{-1}$ ) Partie imaginaire de $\sigma$ .....	11
$\Sigma$	(réel en $\text{m}^2 \text{molecule}^{-1}$ ) Section efficace moyenne, voir équation (48).....	14
$\frac{N}{\omega_L}$	(réel en $\text{photon Hz}^{-1}$ ) densité spectrale de photons .....	14
$q$	(réel en C) Charge du porteur de charge mobile.....	14
$m$	(réel en kg) Masse du porteur de charge mobile.....	14
$\omega_0$	(réel en Hz) Pulsation des oscillations naturelles de l'électron élastiquement lié.....	14
$\Gamma$	(réel en Hz) Fréquence caractéristique de l'amortissement de l'électron élastiquement lié. Largeur à mi-hauteur de la résonance lorentzienne.....	14
$c$	(constante) Célérité de la lumière dans le vide.....	14
$\epsilon_0$	(constante) permittivité du vide.....	14
$\Delta\omega$	(réel en Hz) $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ .....	15
$\sigma_0$	(réel en $\text{m}^2$ ) Section efficace maximale d'une résonance lorentzienne.....	16
$\lambda_0$	(réel en m) Longueur d'onde dans le vide de la lumière résonante. $\lambda_0 = 2\pi\frac{c}{\omega_0}$ .....	17
$x$	(réel) $x = \frac{\Delta\omega}{\frac{\Gamma}{2}}$ .....	19

**Note sur les notations** Au long du document la discussion évolue d'un point de vue général vers un cas particulier. Ainsi la signification d'une notation est amenée à évoluer légèrement.

## Références

- [1] Birgitta BERNHARDT, Akira OZAWA, Patrick JACQUET, Marion JACQUEY, Yohei KOBAYASHI, Thomas UDEM, Ronald HOLZWARH, Guy GUELACHVILI, Theodor W. HÄNSCH et Nathalie PICQUÉ : Cavity-enhanced dual-comb spectroscopy. *Nature Photonics*, 4(1):55–57, 2010.
- [2] Claude FABRE : *Atomes et lumière, interaction matière rayonnement (notes de cours)*, 2006.
- [3] Claude FABRE, Alain ASPECT et Gilbert GRYNBERG : *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*. Ellipses, décembre 1997.
- [4] Pu JIAN : *Limites quantiques dans les mesures de distance à l'aide de peignes de fréquences*. Thèse de doctorat, Laboratoire Kastler Brossel, 2014.
- [5] S KASSI, M CHENEVIER, L GIANFRANI, A SALHI, Y ROUILLARD, A OUVRARD et D ROMANINI : Looking into the volcano with a mid-ir dfb diode laser and cavity enhanced absorption spectroscopy. *Opt Express*, 14(23):11442–52, 2006.
- [6] Jean-Michel RAIMOND : *Atoms and photons (notes de cours)*, 2013.