Cycle Ingénieur - $1^{\text{ère}}$ année - 2020/2021

T. P. de Mathématiques et Signal

Analyse spectrale numérique

Objectifs du TP : Réaliser une analyse spectrale de signaux numériques en vous appuyant sur les notions et outils vus en cours de Signaux Certains.

Remarque : Ce TP repose sur l'utilisation du logiciel MATLAB que la plupart d'entre vous ne connaissent pas. MATLAB propose un environnement de programmation et des fonctionnalités similaires à PYTHON. Néanmoins, ce TP se concentre sur l'analyse des résultats affichés et ne nécessite ni connaissance du logiciel ni programmation avancée.

Vous devez rendre en fin de séance une feuille de résultats contenant la réponse aux questions posées.

1 Mise en œuvre de la Transformée de Fourier Discrète

On rappelle que la TF d'un produit est la convolution des TF.

1. Rappelez quelle est la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ de fréquence f_0 ?Tracer la partie imaginaire et la partie réelle de ce spectre.
2. Quelle est la transformée de Fourier du signal échantillonné $s_e(t) = s(t)\,\text{III}_{1/Fe}(t)$ où
$$\text{III}_{1/F_e}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k)$$
avec $t_k = k/F_e$ et F_e la fréquence d'échantillonnage?
3. Donnez l'allure théorique des parties réelle et imaginaire du spectre du signal s pour $f_0 = 100$ Hz échantillonné à la fréquence $F_e = 1$ kHz, et celui pour $f_0 = 900$ Hz échantillonné à la même fréquence F_e. Vous préciserez bien les axes de vos graphes.
4. Dans la fenêtre de commande, utilisez l'instruction `GenererSinusoides`. Cela va afficher deux signaux sinusoïdaux (en bleu) de fréquences $f_0 = 100$ Hz et $f_0 = 900$ Hz échantillonnés (en rouge) à la même fréquence $F_e = 1$kHz .
Rappelez le théorème de Shannon. Les deux sinusoïdes que vous avez précédemment tracées vérifient-elles ce théorème? Justifiez votre réponse.
5. Utilisez maintenant l'instruction `TFDSinusoides`. Cette instruction calcule et affiche les parties réelle et imaginaire des transformées de Fourier discrète (TFD) des signaux échantillonnés affichés en 4. Où se trouve la fréquence nulle ?
6. Commentez ce que vous observez : est-ce conforme à vos prévisions ? Pourquoi? Quel est le problème si on a seulement accès au module des TFD?

2 Analyse spectrale par TFD

On considère maintenant un signal $x(t)$ comprenant trois composantes spectrales :

$$x(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t) + a_2 \sin(2\pi f_2 t) + a_3 \sin(2\pi f_3 t)$$

Dans cet exercice, on souhaite étudier les performances de la TFD pour déterminer les amplitudes et les fréquences de ces composantes. On considère que le signal $x(t)$ est échantillonné sur N points et acquis sur une durée T.

1. Expliquez pourquoi les données que l'on considère peuvent être vues comme le résultat de l'échantillonnage du signal $x_T(t) = x(t)\text{Rect}(t/T)$ où Rect est la fonction porte de hauteur unité et de largeur unité. Quelle est la transformée de Fourier de ce signal x_T? Représentez son allure.

2. Rappeler la définition de la TFD.

   - Quel est l'intervalle de fréquence (réduite) séparant chacun des échantillons de ces TFD ?
   - Pour quel k se trouve la fréquence nulle ?
   - Quelle est la fréquence réduite précise du dernier échantillons ?

3. Utilisez l'instruction `GenererSignalTest`.
   Cela vous affiche, sur une première fenêtre, le signal $x_T(t)$ (en bleu) et sa discrétisation sur $N = 128$ points (en rouge) donnée par :
   $$x_n = x(t_n) = 0.1\sin(2\pi\nu_1 n) + 10\sin(2\pi\upsilon_2 n) + 5\sin(2\pi\upsilon_3 n) \quad (1)$$
   où $\upsilon_1 = 0.21$, $\upsilon_2 = 0.30$, $\upsilon_3 = 0.35$, $t_n = n/F_e$ et $n = 0, 1, ..., N-1$.
   Sur une seconde fenêtre, l'instruction vous affiche le **module** de la TFD de x_n.
   Si ce signal était issu d'un échantillonnage à F_e = 10kHz quelles seraient les fréquences f_1, f_2 et f_3 (en Hz) correspondantes aux fréquences réduites υ_1, υ_2 et υ_3 ? Quelle serait la durée d'acquisition correspondante ?

4. La forme du module de la TFD est-elle conforme à votre réponse de la question 1? Expliquez l'impact de la discrétisation de la Transformée de Fourier sur la forme de ce module.

5. En observant en détail le spectre donné par `GenererSignalTest`, pouvez-vous déterminer le nombre de composantes spectrales présentes dans le signal et leurs fréquences réduites? Quelle est la précision d'estimation de ces fréquences? (Vous pourrez utiliser l'outil '`Data Cursor`' (icône avec une petite croix noire) de la fenêtre graphique Matlab).

6. Que dire des amplitudes? (Vous pourrez là aussi utiliser l'outil '`Data Cursor`'). Proposez une explication.

7. MATLAB (dans sa boîte à outils de traitement du signal) dispose de routines qui permettent de générer des fenêtres dites d'*apodisation*. L'instruction `ApodiserSignal` permet de générer et visualiser le signal $x(t)$ apodisé (en tirets bleus) et son échantillonnage (en rouge) à comparer au signal $x(t)$ initiale en noir. Dans une seconde fenêtre s'affiche la TFD (correctement **normalisée**) du signal apodisé et échantillonné.
   Comparez au résultat obtenu sans apodisation. Essayez d'expliquer les différences.

3 *Zero-padding*

1. Rappelez la définition de la TFD de x en fonction des termes x_n de sa discrétisation.

2. On définit maintenant la suite $(y_n)_{n\in 0,N+P-1}$ telle que
   $$\begin{cases} y_n = x_n, & \forall 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ y_n = 0, & \forall N \leqslant n \leqslant N+P-1 \end{cases}$$
   Donnez l'expression de la TFD de y en fonction des y_n puis des x_n.

3. En vous appuyant sur vos réponses aux questions précédentes, expliquez pourquoi calculer la TFD de y revient à mieux échantillonner la TFD de x. On appelle cela le *zero-padding*.

4. L'instruction `ZeroPadding` permet d'appliquer cette méthode à la TFD générée et visualisée dans la question 7 de la partie précédente, en calculant le spectre sur 1024 points au lieu de 128. Commentez et expliquez ce que vous observez. Comparez notamment l'allure du spectre de la question 7.

5. L'instruction `ZeroPaddingNonApodise` permet d'appliquer la méthode du zéro Padding sans apodisation. Comparez ce spectre à celui de la question précédente. On pourra notamment discuter de la forme du spectre et comparer résolution spectrale et sa résolution en amplitude par rapport au spectre de la question précédente.