

Cycle Ingénieur - 1<sup>ère</sup> année - 2020/2021

T. P. de Mathématiques et Signal

## Analyse spectrale numérique

Proposition de correction v2 (V.G.)

### 1 Mise en œuvre de la Transformée de Fourier Discrète

1. On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction  $g(t) = \exp(2i\pi f_0 t)$  est  $\tilde{g}(f) = \delta(f - f_0)$  où  $\delta$  est la distribution de Dirac. De cette égalité découle alors simplement la transformée de Fourier de  $s(t) = [e^{2i\pi f_0 t} - e^{-2i\pi f_0 t}] / 2i$  :

$$\tilde{s}(f) = \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] = \frac{i}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

On peut alors tracer la partie imaginaire et la partie réelle de la transformée de Fourier du signal  $s$  (dont la composante réelle est nulle).

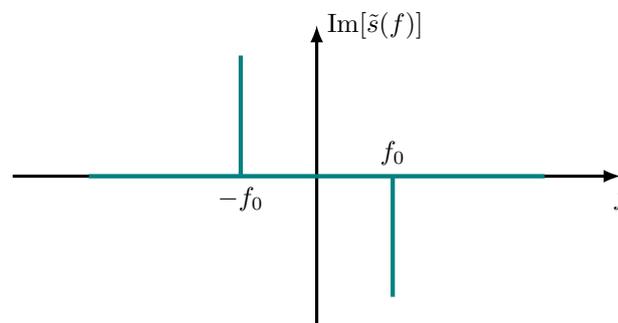


Figure 1: Partie imaginaire de la transformée de Fourier de la fonction  $s$ .

2. On rappelle (c.f. le cours) que la transformée de Fourier de  $s(t) \text{III}_{1/F_e}(t)$  est donnée par la convolution des deux transformées de Fourier. Dans notre cas, nous obtenons ainsi

$$\tilde{s}_e(f) = F_e \tilde{s}(f) \otimes \text{III}_{F_e}(f) = F_e \int d\nu \sum_k \tilde{s}(\nu) \delta(f - kF_e - \nu)$$

où  $\nu$  est la variable muette de la convolution. L'inversion de la somme et de l'intégrale permet d'obtenir

$$\tilde{s}_e(f) = F_e \sum_k \int d\nu \tilde{s}(\nu) \delta(f - kF_e - \nu) = F_e \sum_k \tilde{s}(f - kF_e)$$

On voit donc que l'échantillonnage a répliqué le spectre : là où la transformée de Fourier était à la question 1 une simple somme de deux fonctions  $\delta$ , nous avons maintenant une somme de deux fonctions peignes, dont chaque  $\delta$  est espacé de  $F_e$ .

3. On a tracé ci-dessous l'allure de la partie imaginaire de la fonction  $\tilde{s}_e$  pour  $f_0 = 100\text{Hz}$  et  $f_0 = 900\text{Hz}$ .

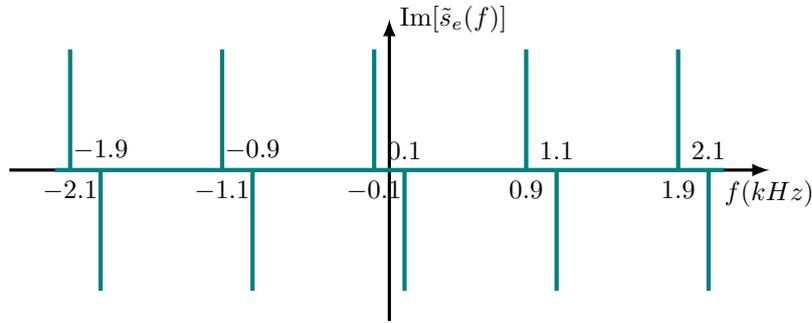


Figure 2: Partie imaginaire de la transformée de Fourier de la fonction  $s_e$  pour  $f_0 = 100\text{Hz}$  et  $F_e = 1\text{kHz}$ .

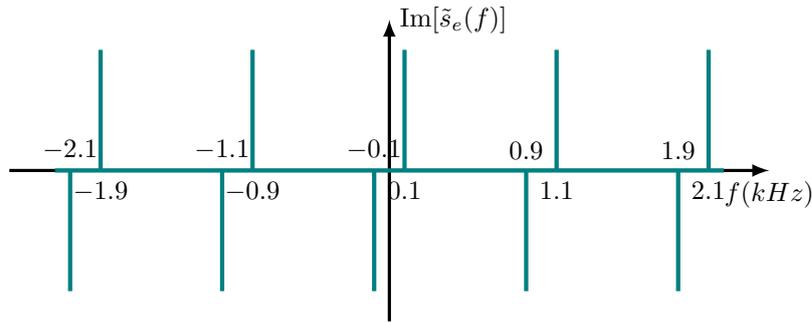


Figure 3: Partie imaginaire de la transformée de Fourier de la fonction  $s_e$  pour  $f_0 = 900\text{Hz}$  et  $F_e = 1\text{kHz}$ .

4. On rappelle qu'une fonction  $s(t)$  est dit à spectre borné s'il existe une fréquence  $\nu_M$  telle que pour toute fréquence dont la norme  $\nu$  est supérieure à cette fréquence  $\nu_M$ , le module  $|f(\nu)|$  est nul. Par exemple, dans le cas où  $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$  alors,  $s$  est à spectre borné et  $\nu_M = f_0$ . Le théorème de Shannon stipule que l'échantillonnage de  $s$  se fait alors sans perte d'information si on échantillonne avec une fréquence  $F_e$  telle que  $F_e > 2\nu_M$ .

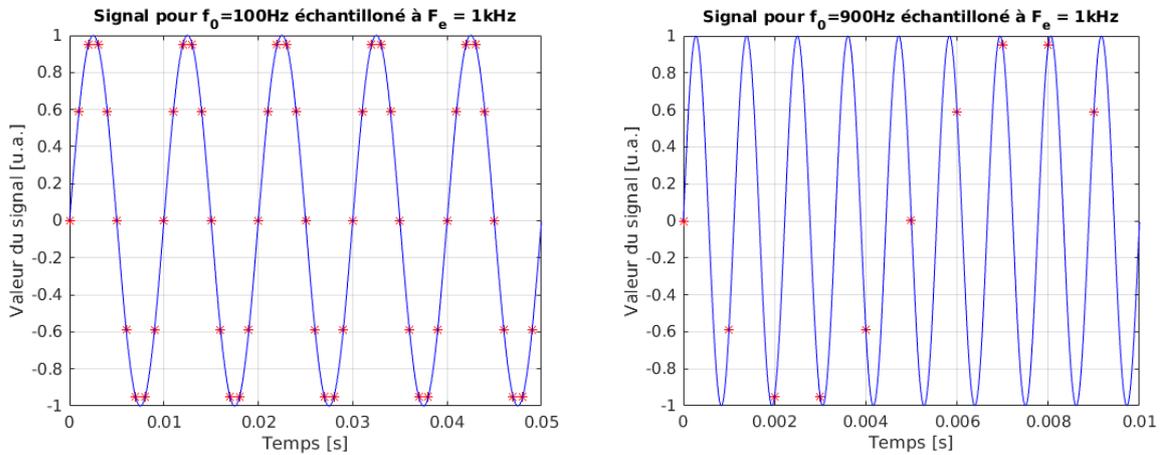


Figure 4: Signaux générés par le code `GenererSinusoides`.

Dans le cas de la première sinusoïde où  $f_0 = 100\text{Hz}$ , on a  $\nu_M = 100\text{Hz}$  et comme  $F_e = 1\text{kHz} > 200\text{Hz}$ , le critère de Shannon est respecté. En revanche, pour la seconde sinusoïde, on a  $\nu_M = 900\text{Hz}$  ainsi puisque  $F_e < 1800\text{Hz}$ , le critère n'est pas respecté. On peut d'ailleurs le "voir" sur la figure de l'échantillonnage : les points rouge du signal à 900Hz semblent former une sinusoïde de fréquence 100Hz.

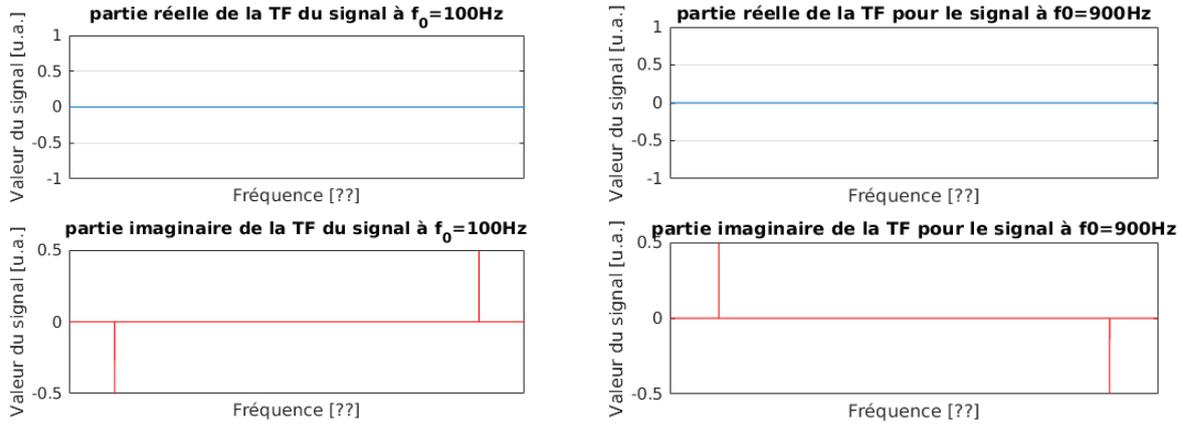


Figure 5: Signaux générés par le code TFDSinusoides.

- La fréquence nulle se trouve à gauche et le spectre affiché se trouve entre 0 et  $F_e$ . Ce que nous voyons donc est la partie positive du spectre ainsi que la moitié du premier repliement. Les spectres correspondent ainsi à nos précisions : pour le signal à 100Hz, nous avons un pic négatif à 10% de  $F_e$  puis un pic positif à 90% de  $F_e$  et c'est l'inverse pour le signal à 900Hz.
- Tout d'abord, on remarque que la partie réelle du signal est nulle, comme nous l'attendions. Concernant la partie imaginaire, on observe seulement deux pics alors que nous en attendions plusieurs. De plus, si le zéro se trouve au milieu de la fenêtre, le sens des pics n'est pas le même que celui anticipé. Si jamais nous n'avions accès qu'au module de la TF, il n'y aurait pas de différence entre les deux spectres...

## 2 Analyse spectrale par TFD

- Étant donné que le signal n'est enregistré que durant une durée  $T$ , cela revient à considérer que le signal physique est donné par  $x_T$ . On utilise maintenant encore le fait que la TF d'un produit est la convolution des TF des deux fonctions. On se rappelle également que la TF d'un rectangle est un sinus cardinal<sup>1</sup>.

$$\tilde{x}_T(f) = T \int \tilde{x}(\nu) \text{sinc}[\pi T(f - \nu)] d\nu$$

Or, étant donné ce qui a été fait en partie 1, on a

$$\tilde{x}(\nu) = \sum_{j=1}^3 \frac{ia_j}{2} [\delta(f + f_j) - \delta(f - f_j)]$$

Ce qui donne

$$\tilde{x}_T(f) = \frac{iT}{2} \sum_{j=1}^3 a_j (\text{sinc}[\pi T(f + f_i)] - \text{sinc}[\pi T(f - f_i)])$$

On obtient donc trois sinus cardinaux centrés en  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . Nous avons représenté ci-dessous  $x_T$  en prenant des amplitudes telles que  $a_1 < a_3 < a_2$ . Nous avons encore là l'illustration d'une règle abordée en cours : si  $T$  est trop petit, alors la largeur spectrale de chaque pic qui est de l'ordre de  $1/T$  peut devenir aussi grand que l'écart entre deux fréquences. Si  $1/T > \text{Min}\{|f_i - f_j|\}_{i \neq j}$ , alors on ne des pics ne sont plus distinguables.

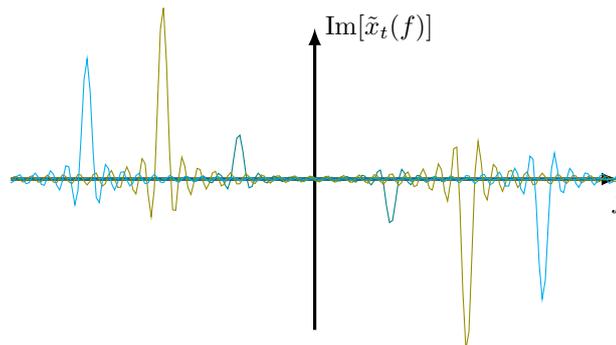


Figure 6: Spectre de  $x_T$  où la contribution de chaque composante spectrale a été tracée d'une couleur.

<sup>1</sup>Pour une fonction porte de largeur  $T$  centrée en 0, sa transformée de Fourier est donnée par  $T \text{sinc}(\pi f T)$

2. Soit une fonction  $f$  qui a été échantillonnée ( $N$  échantillons) et dont les échantillons valent  $f_n$ . Alors la transformée de Fourier discrète TFD est échantillonnée également ( $N$  échantillons) dont leur valeur sont

$$\tilde{f}_k = \sum_n f_n e^{-2i\pi kn/N}$$

Toutes les durées ont été normalisées telles que  $\bar{t} = t/\tau$  où  $\tau$  est le pas d'échantillonnage. On a ainsi  $\bar{f} = f/F_e$ . Chaque fréquence réduite est séparée de  $1/N$  et la fréquence réduite du dernier échantillon est  $(N-1)/N$ . La fréquence nulle se trouve pour  $k=0$ . On le retrouve si on utilise la formule ci-dessus :  $\tilde{f}_0 = \sum_n f_n$  c'est-à-dire la moyenne du signal : la composante continue.

3. Pour ré-obtenir les fréquences  $f_i$  correspondant aux fréquences réduites  $\nu_i$ , il suffit de multiplier celles-ci par  $F_e$ . On obtient ainsi  $f_1 = 2.1\text{kHz}$ ,  $f_2 = 3\text{kHz}$  et  $f_3 = 3.5\text{kHz}$ . Étant donné que 128 points ont été acquis, la durée d'acquisition est de  $127 \times \tau = 127/F_e = 13\text{ms}$ .

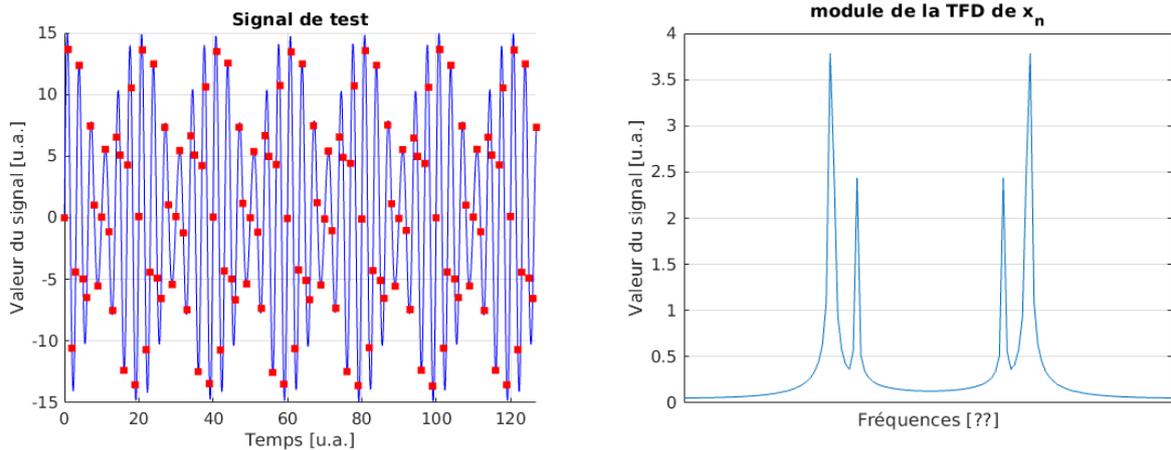


Figure 7: Signaux générés par le code `GenererSignalTest`.

4. En comparaison de ce que nous avons tracé en question 1, il semble manquer un pic. De plus, nous nous attendions à voir le premier pic plus petit. Concernant la première remarque ci-dessus, cela est dû à la différence d'amplitude des composantes spectrales : en effet, on a  $a_1 = 0.1$  alors que  $a_2 = 10$ . Le fait d'avoir acquis le signal sur une durée  $T$  a pour effet d'avoir perdu la largeur infiniment petite du pic. Maintenant que les pics sont des sinus cardinaux, ceux-ci "bavent" et polluent le signal sur des distances bien supérieures à  $1/T$  (en d'autres mots, la décroissance en  $1/f$  du sinus cardinal ne suffit pas car la différence entre l'amplitude de 10 et celle de 0,1). Ainsi, la composante spectrale de fréquence  $f_2$  a une amplitude trop forte pour que nous puissions distinguer la composante à la fréquence  $f_1$ . Il faudrait pour le voir augmenter le nombre de points  $N$  mais cela est gourmand en temps de calcul. À propos de la seconde remarque, il faut bien se rappeler que la fréquence nulle est située à gauche dans le graphe. Les deux pics situés à droite sur le spectre viennent du phénomène de repliement puisque le signal a été échantillonné.
5. Le haut du premier pic se trouve en  $x = 38$ . Comme les fréquences sont séparées les unes des autres de  $1/128$ , cela signifie que la fréquence réduite du premier pic est de  $38/128 = 0.2969 \sim 0.30$  ce qui colle avec  $\nu_2$ . De la même manière, on trouve la fréquence de la seconde composante spectrale :  $45/128 = 0.3516 \sim 0.35$  qui correspond à  $\nu_3$ . L'incertitude sur la fréquence est de  $1/N$ .
6. Concernant les amplitudes, la hauteur de la plus haute composante spectrale est de 3.79 alors que celle de la seconde est 2.44. Selon l'énoncé du TP, les amplitudes de chaque sinus sont respectivement de 10 et 5 ce qui signifie que le rapport des deux doit être 2. Ce n'est pas le cas. C'est là aussi dû au fait que l'on calcule la TF à seulement certaines fréquences, multiples de  $1/N$ . Si une composante du signal a sa fréquence réduite qui est multiple de  $1/N$ , alors le point sera au sommet du sinus cardinal alors que si ce n'est pas le cas, le point sera sur le côté et ne donnera donc pas la valeur du maximum du sinus cardinal.

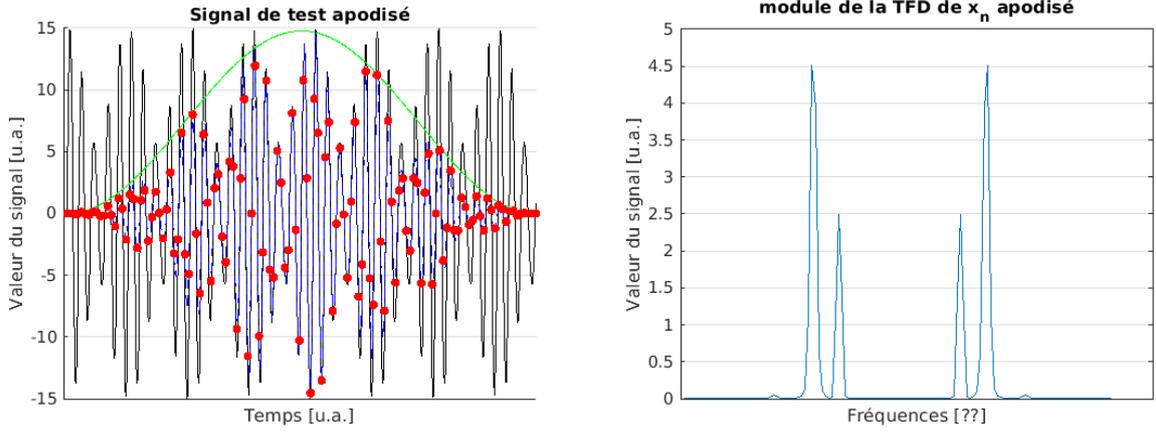


Figure 8: Signaux générés par le code `ApodiserSignal`.

7. À l'inverse du spectre du code `GenererSignalTest`, on peut maintenant légèrement distinguer le pic à la fréquence  $\nu_1$  sur le spectre du signal apodisé. De même, on voit que les ailes des deux pics sont moins importantes. La transformée de Fourier d'une fonction porte étant un sinus cardinal, son amplitude décroît en  $1/f$  donc pas très rapidement. Prendre une fenêtre différente (ici nous avons utilisé la fenêtre de Hanning en  $\cos^2(\pi t/T)$ ) permet d'atténuer les rebonds et donc de mieux distinguer les pics. Le prix à payer est une moindre résolution spectrale, même si ce n'est pas évident à voir entre ces deux graphes. La figure ci-dessous, tirée du cours, illustre notre explication.

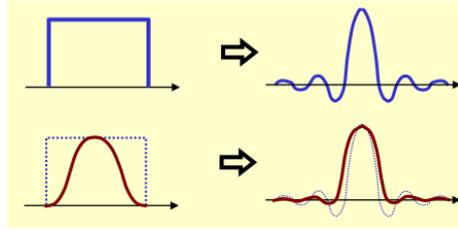


Figure 9: La fenêtre de Hanning permet de diminuer les rebonds en comparaison d'une porte. Tiré du cours.

### 3 Zero-padding

- On échantillonne la TF avec un pas de fréquence  $\delta\nu = 1/N$ , pas le plus grand que l'on puisse utiliser : il s'agit de la TFD. La TFD est ainsi définie par la valeur de ses  $N$  échantillons

$$\tilde{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-2i\pi \frac{nk}{N}\right) \quad \text{avec } k \in [0, N-1]$$

- De la même façon, la TFD de  $y$  est donnée par

$$\tilde{y}_k = \sum_{n=0}^{N-1+P} y_n \exp\left(-2i\pi \frac{nk}{N+P}\right) \quad \text{avec } k \in [0, N+P-1]$$

ainsi

$$\tilde{y}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-2i\pi \frac{nk}{N+P}\right)$$

- La différence entre  $\{\tilde{y}_k\}$  et  $\{\tilde{x}_k\}$  est qu'on a  $P$  plus de fréquence pour la TF de  $y$  que pour celle de  $x$ . Calculer la TFD de  $y$  revient à mieux échantillonner  $x$ , tout en gardant le même nombre de point du signal initial  $x$ .

**Attention:** il n'y a là aucune sorcellerie. Ce n'est pas parce que un signal  $s(t)$  est échantillonné avec  $N$  points que sa transformée de Fourier doit être également échantillonné avec  $N$  points. La transformée de Fourier d'un signal  $s$  échantillonné avec  $N$  est donnée par

$$\tilde{s}(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-2i\pi n \frac{\nu}{F_e}\right)$$

Nous avons là une précision infinie sur la TF. Si nous voulons maintenant calculer la transformée de Fourier avec une discrétisation bien meilleure, mettons  $N + P$ , nous pouvons définir une transformée de Fourier discrétisée (mais pas la TFD pour laquelle  $P = 0$ ) comme

$$\tilde{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-2i\pi \frac{nk}{N+P}\right) \quad \text{avec } k \in [0, N+P-1]$$

On retrouve là exactement l'expression de  $\tilde{y}_k$ . Il nous faut calculer la complexité : évaluer cette somme coûte  $N \times (N + P)$  opérations. Cependant, il a été vu en cours que des algorithmes comme la transformée de Fourier rapide permettent de diminuer ce coût et d'avoir une complexité en  $N \log N$ . Néanmoins, cet algorithme calcule autant d'échantillons spectraux que d'échantillons du signal (*i.e.*  $P = 0$ ). L'idée du ZeroPadding est donc d'utiliser le fait qu'en rajoutant des points nuls à la fin du signal, on ne modifie pas la forme de la transformée de Fourier mais que si on rajoute  $P$  points nuls, alors on peut calculer via `fft`  $P$  fréquences supplémentaires. Cela permet donc d'avoir une complexité en  $(N + P) \log(N + P)$ . Dans le cas où  $P = \lambda N$ , on doit ainsi comparer  $\lambda N^2$  à  $\lambda N \log(\lambda N)$  ce qui est très avantageux pour  $N$  grand.

**Pour résumer :** l'avantage du ZeroPadding est donc de calculer rapidement (via `fft`) une TFD plus précise ( $\delta\nu < 1/N$ ).

- Le spectre du code `ZeroPadding` a été produit avec  $P = 7N$ . Tout d'abord, on peut remarquer que l'amplitude du premier pic est bien deux fois celle du second comme nous l'attendions : le zeroPadding nous a permis de rajouter des fréquences pour lesquelles la transformée de Fourier a été calculée. Nous avons donc gagné en précision d'amplitude et également en résolution spectrale : les pics du second spectre sont plus fins et mieux résolus.

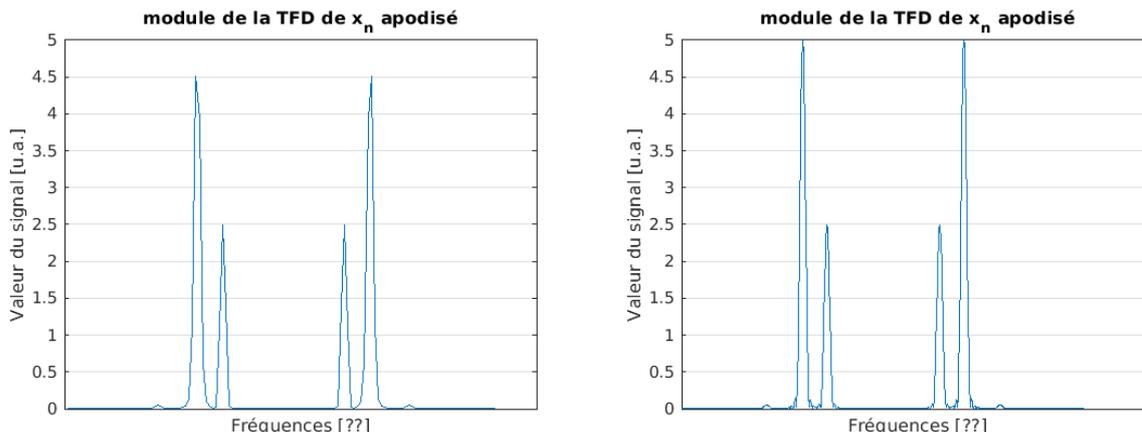


Figure 10: À gauche, la TFD générée par le code `ApodiserSignal` et à droite celle générée par le code `ZeroPadding`.

- On peut également apercevoir sur les côtés des pics les “vagues” dues à la fenêtre d'enregistrement. Dans le code `ZeroPadding`, la fenêtre d'apodisation est aussi une fenêtre de Hanning et si nous avons utilisé une porte comme utilis dans le code `ZeroPaddingNonApodise`, les vagues auraient été bien plus visibles comme le montre l'image ci-dessous.

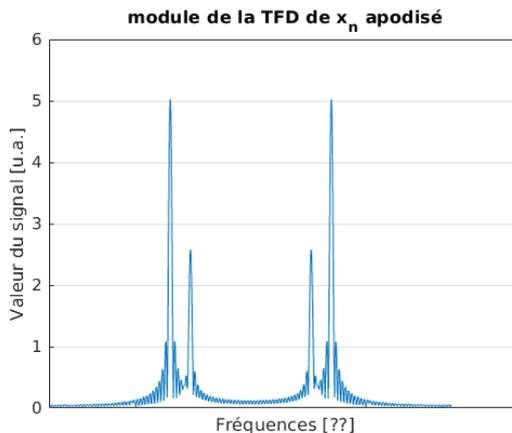


Figure 11: Spectre réalisée via le code `ZeroPaddingNonApodise`. Les rebonds de la distribution sont bien plus visibles et on ne distingue pas vraiment la composante à la fréquence  $\nu_1$  néanmoins il est clair que les deux pics sont plus fins, plus résolus en fréquence.