Une introduction à la topologie différentielle et algébrique

Guillaume Lafon

11 août 2004

Table des matières

Introduction

Le but de ce texte est de présenter quelques aspects amusants (enfin, du moins, que je considère personnellement comme amusants) de la géométrie différentielle et de la topologie algébrique, en partant des connaissances qu'est censé avoir sur le sujet le taupin moyen (on rappellera donc beaucoup de choses, ledit taupin étant comme chacun sait en règle générale enclin à considérer que la géométrie différentielle est un sujet définitivement trop barbare pour faire l'objet d'un sujet de concours). Ayant moi-même eu beaucoup de réticence vis-à-vis de ce domaine quand j'étais en prépa, je voudrais par ce texte montrer qu'on peut faire des choses fort belles en géométrie différentielle et qui n'ont pas grand chose à voir avec les ignobles calculs de dérivées partielles qu'on fait habituellement en Spé. Le point de vue sera fortement algébrique et topologique, les purs analystes risquent d'être un peu déçus...

1 Qu'est-ce qu'une forme différentielle ?

1.1 Les formes différentielles "classiques"

Le principal objet différentiel intéressant qu'on a l'occasion d'étudier en Spé est la forme différentielle. Elle sera donc le point de départ de notre texte. Le premier problème qui se pose est de définir correctement ce qu'est une forme différentielle et surtout de *comprendre* ce que représente un tel objet. La définition que l'on voit habituellement en prépa ressemble à la suivante :

Définition 1. *Une forme différentielle ω sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une expression formelle $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, où les $a_i : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Cette définition est certes parfaitement correcte, mais présente à mon goût l'inconvénient de faire intervenir les expressions "de physicien" dx_i, qui sont dangereuses car la notation n'est pas vraiment adaptée à la nature de l'objet. Le problème vient du petit d qui intervient dans la notation et qui tend à faire croire que des dérivées sont cachées derrière ce formalisme alors que, provisoirement, il ne me semble pas opportun d'en faire intervenir.

Regardons les choses un peu différement : oublions cette notation dx_i pour retenir uniquement que les objets en question sont de simples formes linéaires et forment une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ (en l'occurence la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, mais cela n'a que peu d'importance). Notons les d'ailleurs l_i plutôt que dx_i. Si je fais cela, c'est tout simplement parce que le point important est que les l_i forment une base de l'espace des formes linéaires, le choix de cette base étant en fait arbitraire. Je vous laisse donc vous convaincre du point suivant :

Proposition 1. *La définition 1 reste valable en remplaçant dx_i par l_i, où $(l_1, \ldots, l_n)$ est une base quelconque de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*

Les plus vifs d'entre vous auront maintenant compris mon objectif : l'expression $\sum a_i l_i$ n'étant que l'expression dans la base l_i des coordonnées d'un point de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, en notant $\tilde{\omega}$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dont les fonctions coordonnées sont les a_i (naturellement, ces dernières dépendent du choix de la base l_i), la donnée de la forme différentielle ω est équivalente à celle de la fonction $\tilde{\omega}$. C'est ce qui me pousse à identifier ces deux objets et à introduire la nouvelle définition :

Définition 2. *Une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

On peut définir de même des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ en remplaçant les $\mathcal{C}^\infty$ par des $\mathcal{C}^k$ dans la définition, mais ce sont les formes $\mathcal{C}^\infty$ qui seront le plus intéressantes pour la suite.

Notons pour finir ce premier paragraphe que, si la nouvelle définition des formes différentielles est plus pratique d'un point de vue algébrique, il est évident que l'expression "physicienne" est indispensable pour les calculs, et nous nous en servirons plus loin pour certaines démonstrations.

1.2 Le lemme de Poincaré

On va introduire une notation avant de faire deux ou trois autres rappels :

Définition 3. *On note $\Omega^1(U)$ l'espace vectoriel des formes différentielles sur U (sans précisions, il s'agira des formes $\mathcal{C}^\infty$, mais on peut très bien prendre la même notation avec des formes $\mathcal{C}^k$) et $\Omega^0(U)$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (ou $\mathcal{C}^k$) sur U (à valeurs dans $\mathbb{R}$).*

La raison de cette seconde notation deviendra rapidement limpide, mais pour l'instant, notons que le fait de pouvoir définir une différentielle en tout point de U pour une fonction $\mathcal{C}^\infty$ f implique l'existence d'une application linéaire $d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$, $f \mapsto (x \mapsto df(x))$ (c'est un peu compliqué mais il faut garder à l'esprit que Ω^1 est constitué de fonctions, elle-mêmes à valeurs dans un espace de formes linéaires ; le fait que l'application soit linéaire est une conséquence de la linéarité de la différentielle). Dans la notation physicienne, cela s'écrit plus simplement $d : f \mapsto df = \sum \partial f/\partial x_i dx_i$. Le taupin moyen sait que le noyau de l'application d est constitué des fonctions constantes. Le point qui va nous intéresser pour la suite est la nature de l'image de d, c'est-à-dire la détermination des différentielles exactes, celles qui peuvent s'écrire sous la forme df pour une fonction $\mathcal{C}^\infty$ f (on notera par la suite l'ensemble des formes exactes $B^1(U)$. Le résultat le plus classique sur cette question est le théorème suivant, abordé en classe de Spé :

Théorème 1. *(lemme de Poincaré) Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, alors $B^1(U)$ coincide avec les formes différentielles fermées, c'est-à-dire les formes $\omega = \sum a_i dx_i$ qui vérifient $\forall i, j,\ \partial a_i/\partial x_j = \partial a_j/\partial x_i$*

Le but du paragraphe suivant va être de généraliser les définitions des formes différentielles pour exrpimer ce résultat plus joliment, puis de comprendre en quoi la géométrie de l'ouvert U est reliée aux espaces de formes différentielles.

1.3 Les formes différentielles supérieures

Le lemme de Poincaré peut s'exprimer de la façon suivante : $Im(d) = Ker(\tilde{d})$, où $\tilde{d}$ est l'application qui, à une forme différentielle $\omega = \sum a_i dx_i$, associe $\{\partial a_i/\partial x_j - \partial a_j/\partial x_i\}_{i<j}$. On peut formaliser cette observation en introduisant la notion de différentielle d'ordre supérieur. Commençons par le degré 2, les généralisations ensuite étant faciles :

Définition 4. *Une différentielle $\mathcal{C}^\infty$ d'ordre 2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction $\omega : U \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note $\Omega^2(U)$ l'ensemble des formes différentielles d'ordre 2.*

L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est celui des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$, qui est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Le problème est maintenant d'obtenir une description intuitive de ce qu'est une forme différentielle d'ordre 2 et de redéfinir l'application $\tilde{d}$ en utilisant cet espace $\Omega^2(U)$. On va le faire sous forme de successions d'exercices corrigés :

Exercice 1. *Soit $l_1, l_2, \ldots, l_n$ une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On note $l_i \wedge l_j$ (ça se lit l_i extérieur l_j), la forme bilinéaire qui, à un couple (x, y) de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, associe $l_i(x)l_j(y) - l_j(x)l_i(y)$.*

1. *Montrer que l'ensemble $\{l_i \wedge l_j\}_{i<j}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*
2. *Montrer qu'une forme différentielle d'ordre 2 s'identifie naturellement à un objet de la forme $\sum_{(i<j)} a_{i,j} l_i l_j$.*
3. *En posant, pour $\omega = \sum_i a_i dl_i$ une forme différentielle, $d_1\omega = \sum_i da_i \wedge dl_i$ (c'est-à-dire, si on écrit $da_i = \sum b_{i,j} l_j$, ce qui est possible puisque les l_j forment une base de l'espace des formes linéaires, $d_1\omega = \sum_{i,j} b_{i,j} l_j \wedge l_i$), montrer que $d_1\omega$ ne dépend pas du choix de la base $l_1, \ldots, l_n$ et que d_1 s'identifie à la fonction $\tilde{d}$ définie précédemment. Constater que $d_1\omega$ est en fait une forme différentielle d'ordre 2.*
4. *Montrer que, pour une fonction f $\mathcal{C}^\infty$, on a $d_1(df) = 0$ (df étant une forme différentielle, on peut lui appliquer la fonction d).*

Pour résumer ce que nous venons de faire, on a en fait construit trois espaces qui snt reliés entre eux par les applications d et d_1, ce qu'on peut schématiser comme suit :

$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d_1} \Omega_2(U).$$

On peut continuer le processus via les définitions suivantes :

Définition 5. *Une forme différentielle d'ordre p sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction $\omega : U \to \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ étant celui des formes n-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$). On note $\Omega^p(U)$ l'ensemble des formes différentielles d'ordre p.*

Remarque 1. *Ceux d'entre vous qui ne dormaient pas au cours sur les déterminants pourront faire la remarque suivante : la dimension de l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vaut C_n^p et en particulier, l'espace en question est vide dès que $p > n$. Cela signifie qu'il n' y a pas de formes différentielles d'ordre supérieur à n.*

Définition 6. *Soit l une forme p-linéaire alternée et l' une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, définissons par analogie avec ce qui a été fait plus haut une forme $(p+1)$-linéaire alternée $l \wedge l'$ (ce qu'on appellera le produit extérieur de l et l'). A un $(p+1)$-uplet de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$, on associe le réel $\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i l(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_{p+1}) l'(x_i)$. On définit ensuite le produit extérieur d'une forme différentielle d'ordre p et d'une forme différentielle d'ordre 1 par linéarité à partir de cette formule. Ca peut paraitre assez compliqué, mais c'est en fait la seule généralisation naturelle du produit extérieur de deux formes différentielles d'ordre 1.*

Proposition 2. *Le produit extérieur est associatif, on peut donc définir sans ambiguïté l'objet $l_{i_1} \wedge \ldots \wedge l_{i_k}$ pour un sous-ensemble $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$ de $\{1, \ldots, n\}$. Nous noterons l_I la forme différentielle d'ordre k ainsi définie. L'ensemble des formes différentielles de type l_I pour I de cardinal k est en fait une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Autrement dit, une forme différentielle d'ordre p peut aussi s'écrire comme $\omega = \sum_{|I|=p} a_I l_I$, où a_I est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.*

Définition 7. *On peut désormais définir la différentielle d'une forme différentielle d'ordre p par analogie au cas de l'ordre 1 : on pose, si $\omega = \sum_{|I|=p} a_I l_I$, $d\omega = \sum da_I \wedge l_I$ (désormais, on utilisera toujours la lettre d pour désigner la différentielle d'une forme différentielle, quel que soit son ordre).*

Proposition 3. *La définition de la différentielle ne dépend pas du choix de la base. De plus, pour une forme différentielle quelconque ω, on a $d(d\omega) = 0$.*

Voilà, le formalisme est désormais au point, ça peut paraître abstrait au premier abord, mais le but de cette présentation n'est pas de faire des calculs avec des formes différentielles (qui se prêtent pourtant fort bien au calcul, en particulier, les formes différentielles sont des objets très pratiques pour les calculs d'intégrales les plus divers), mais d'étudier la topologie de l'ouvert U à partir des renseignements donnés par les espaces $\Omega^p(U)$. En particulier, la deuxième partie de la dernière proposition énoncée est fondamentale (je rappelle que le fait qu'une forme différentielle d'ordre 1 fermée soit exacte n'est qu'une reformulation d'un cas particulier de cette proposition). Avant d'aborder cet aspect plus topologique et algébrique, la section suivante donne quelques compléments de nature algébrique sur les espaces $\Omega^p(U)$, elle n'est pas indispensable pour la suite de l'exposé et peut donc être oubliée pour une première lecture.

1.4 Mélanges et algèbre extérieure

2 La cohomologie de De Rham

2.1 Un peu d'algèbre pour commencer

Pour mieux comprendre ce qui va suivre, il peut être utile de replacer les choses dans un contexte algébrique précis. Nous ne donnerons pas nécessairement les définitions les plus générales, qui seraient trop techniques au vu de l'objectif affiché par cet exposé, mais nous essaierons de donner des définitions précises des objets qui reviendront le plus souvent par la suite. Dans la première partie de ce texte, nous avons défini des applications d entre divers espaces de formes différentielles, qui avaient le bon goût de vérifier la propriété $d \circ d = 0$. De telles familles d'applications interviennent très fréquemment en algèbre, d'où l'utilité de donner des noms à ce genre de choses :

Définition 8. *On appelle complexe d'espaces vectoriels une suite d'espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$, munis de morphismes $d_i : E_i \to E_{i+1}$ (pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$) vérifiant $d_i \circ d_{i-1} = 0$. On appelle suite exacte d'espaces vectoriels une suite d'espaces vectoriels munie de morphismes d_i comme précédemment, qui vérifient cette fois $\ker(d_i) = Im(d_{i-1})$. On notera souvent les complexes et les suites exactes de la façon suivante :*

$$E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \to \dots \to E_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} E_n.$$

Remarque 2. *Une suite exacte est en fait un cas particulier de complexe puisque la condition $d_i \circ d_{i-1} = 0$ peut aussi s'écrire $Im(d_{i-1}) \subset \ker(d_i)$.*

Remarque 3. *On peut aussi bien définir plus généralement des suites exactes sur des groupes au lieu des espaces vectoriels.*

Remarque 4. *Si vous vous amusez à ouvrir un bouquin d'algèbre, vous tomberez sûrement sur des suites exactes de ce type :*

$$0 \to E_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} E_n \to 0.$$

Cela signifie simplement qu'on a ajouté l'espace vectoriel nul aux deux bouts de la suite exacte, la première application et la dernière étant alors forcément nulles. Si on revient à la définition d'une suite exacte, cela revient à dire d'une part que $\ker(d_1) = 0$, c'est-à-dire que d_1 est injective, d'autre part que $Im(d_{n-1}) = E_n$, c'est-à-dire que d_{n-1} est surjective.

Définition 9. *On appelle suite exacte courte une suite exacte du type*

$$0 \to E_1 \stackrel{d_1}{\to} E_2 \stackrel{d_2}{\to} E_3 \to 0.$$

Exercice 2. *Montrer que, si E et F sont deux espaces vectoriels, on a une suite exacte $0 \to E \to E \times F \to F \to 0$, l'application de E dans $E \times F$ étant l'inclusion et celle de $E \times F$ dans F la projection sur F.*

Montrer que, si on a une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie $0 \to E_1 \stackrel{d_1}{\to} \ldots \stackrel{d_{n-1}}{\to} E_n \to 0$, on a $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i dim E_i = 0$.

Tout le travail effectué dans la première partie revenait donc à construire le complexe suivant :

$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \stackrel{d}{\to} \Omega_1(U) \ldots \Omega_n(U) \stackrel{d}{\to} 0.$$

L'intérêt de ces complexes est qu'on peut leur associer facilement des objets algébriques, en l'occurence des espaces vectoriels, qui reflètent le "défaut d'exactitude" du complexe, c'est-à-dire à quel point on est éloigné du cas beaucoup plus simple de la suite exacte. Pour cela, il suffit de s'intéresser aux quotients successifs $\ker(d_i)/Im(d_{i-1})$. En effet, le complexe est une suite exacte si tous ces quotients sont nuls, et intuitivement, plus ces quotients seront gros, plus la situation sera compliquée. Il est plus simple de donner des noms à ces quotients :

Définition 10. *On appelle i-ème groupe de cohomologie du complexe $E_1 \stackrel{d_1}{\to} E_2 \to \ldots \to E_{n-1} \stackrel{d_{n-1}}{\to} E_n$ et on note H^i l'espace vectoriel $\ker(d_i)/Im(d_{i-1})$ (on l'appelle groupe car, dans le cadre plus général des complexes de groupe, ce n'est bien sûr pas un espace vectoriel).*

On peut montrer, simplement en partant de ces quelques définitions abstraites, un certain nombre de propriétés de ces objets, mais il nous semble préférable dans un premier temps de vérifier ces propriétés sur le cas particulier de la cohomologie de De Rham, où on comprend beaucoup plus intuitivement ce qui se passe.

2.2 Définition et propriétés

La cohomologie de De Rham (du nom de son inventeur Georges de Rham) désigne tout simplement la cohomologie associée au complexe d'espaces vectoriels formé par les espaces de formes différentielles :

Définition 11. *Le i-ème groupe de cohomologie de De Rham d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, noté $H^i_{DR}(U)$, est le quotient $\ker(d : \Omega^i(U) \to \Omega^{i+1}(U))/Im(d : \Omega^{i-1}(U) \to \Omega^i(U))$.*

Un exemple de calcul de groupe de cohomologie, qui nous conforte dans l'idée que ces groupes ont tendance à être nul dans les cas simples, est le théorème de Poincaré, qui se reformule de la façon suivante :

Théorème 2. *(lemme de Poincaré) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé, alors $H^1_{DR}(U) = 0$.*

A partir de maintenant, on notera les groupes de cohomologie $H^i(U)$ sans préciser le DR. Un autre exemple particulièrement élémentaire est le calcul du groupe $H^0(U)$ (on note $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ pour plus de simplicité) :

Proposition 4. *Si U est un ouvert contenant exactement k composantes connexes, on a $H^0(U) \simeq \mathbb{R}^k$. En particulier, si U est connexe, $H^0(U) \simeq \mathbb{R}$.*

ajouter les definitions de f* et assimile
definir la cohomologie relative
les suites exactes importantes (Mayer Vietoris, excision, dualite de POoincare)

2.3 Quelques calculs explicites et conséquences spectaculaires

calcul de l'homologie des spheres
Brouwer, invariance du domaine

3 Un peu de topologie algébrique

Cette section est assez indépendante des deux premières et peut être lue en temps qu'exposé séparé introductif au passionnant domaine qu'est la topologie algébrique. Le but est plus ou moins de faire le même type de constructions que dans le cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$, à savoir introduire des groupes d'homologie reflétant la géométrie de l'espace considéré, mais dans le cadre beaucoup plus large des espaces topologiques. Comme je ne suis pas certain que la définition des espaces topologiques soit encore au programme de Spé de nos jours, je vais faire un rapide rappel pour bien préciser le contexte :

Définition 12. *Soit X un ensemble. Une topologie sur X est un ensemble de sous-ensembles de X, qu'on appellera les ouverts, qui vérifient les propriétés suivantes :*

1. *Le sous-ensemble vide et l'ensemble X tout entier sont des ouverts.*
2. *L'intersection de deux ouverts est encore un ouvert.*
3. *Une réunion quelconque d'ouverts reste un ouvert.*

Le complémentaire d'un ouvert dans X sera dit fermé. Un ensemble muni d'une telle topologie sera appelé espace topologique.

Pour un ensemble X donné, on peut bien sûr trouver énormément de topologies sur X, par exemple celle où les seuls ouverts sont le sous-ensemble vide X (qui n'a pas grand intérêt...). Les espaces topologiques les plus simples et (souvent) les plus intéressants sont les espaces métriques (dans un premier temps, on pourra oublier qu'on travaille sur un espace topologique général et se focaliser sur les espaces métriques) :

Définition 13. *Un espace métrique est un ensemble X muni d'une distance d. Cette distance permet de définir une topologie sur X en prenant pour les ouverts les sous-ensembles U de X vérifiant la propriété usuelle suivante : $\forall x \in U, \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset U$.*

Dans un premier temps, et avant de reparler d'homologie, on va s'intéresser à un invariant particulièrement intuitif et intéressant des espaces topologiques : le groupe fondamental. On verra plus loin qu'il est en fait étroitement relié à des histoires d'homologie.

3.1 Le groupe fondamental et ses propriétés

Commençons par quelques définitions :

Définition 14. *Soit X un espace topologique. Un lacet sur X est une fonction continue ϕ de $[0,1]$ dans X qui vérifie $\phi(0) = \phi(1)$.*

Une façon intuitive de voir un lacet est la suivante : on part d'un point x sur X, on fait un tour et on revient en x.

Définition 15. *On note $L(X;x)$ l'ensemble des lacets sur X ayant pour point de départ et d'arrivée x.*

Définition 16. *Deux lacets ϕ et ϕ' sont dits homotopes s'il existe une fonction $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continue telle que $H(0,t) = \phi(t)$, $H(1,t) = \phi'(t)$, $H(u,0) = x$, $H(u,1) = x$.*

Que signifie cette définition ? En fait, il faut voir la fonction H comme dépendant du temps : au temps $t = 0$, on part du lacet ϕ, puis entre $t = 0$ et $t = 1$, le lacet se déforme (en gardant ses extrémités égales à x, pour finalement donner le lacet ϕ' pour $t = 1$. Autrement dit, ϕ' est une déformation continue de ϕ

Proposition 5. *L'homotopie est une relation d'équivalence sur les lacets. On note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $L(X,x)$.*

Proposition 6. *On peut définir une loi de groupe sur $\pi_1(X;x)$ de la façon suivante : le produit de deux lacets ϕ et ϕ' est le lacet obtenu "en suivant le lacet ϕ puis le lacet ϕ'", ce qui est représenté par la fonction qui à $t \in [0, \frac{1}{2}]$ associe $\phi(2t)$ et à $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ associe $\phi'(2t-1)$. L'inverse d'un lacet ϕ est ce même lacet "pris en sens inverse", ce qui correspond à la fonction qui à t associe $\phi(1-t)$. L'élément neutre est le lacet constant égal à x.*

Démonstration. Attention, la définition donnée pour la loi de groupe est mauvaise dans le sens où elle est donnée pour les lacets eux-mêmes et pas pour des classes d'équivalencce de lacets, il faut dnc vérifier la compatibilité de ces définiitons avec la relation d'homotopie. □

Définition 17. *On appelle groupe fondamental de X le groupe $\pi_1(X, x)$. Dans le cas d'un espace X connexe par arcs, ce groupe ne dépend pas du choix du point x, on le notera plus simplement $\pi_1(X)$ (désormais, on travaillera presque exclusivement avec des espaces connexes par arcs, ce qu'on ne précisera pas à chaque fois).*

Définition 18. *Un espace X pour lequel $\pi_1(X) = 0$ sera dit simplement connexe.*

Cette notion est essentielle, on peut en avoir une vision assez intuitive : un espace est simplement connexe si tout lacet tracé sur cet espace est homotope à un lacet constant. Si vous y refléchissez un peu, vous constaterez que cela revient à dire qu'il n'y a pas de "trous" dans l'espace X. Par exemple, l'espace $\mathbb{R}^2\ \{0, 0\}$ n'est pas simplement connexe : un lacet faisant le tour de l'origine ne peut pas être déformé en lacet constant sans passser par l'origine. On dispose de beaucoup d'outils pour calculer le groupe fondamental, en voici quelques-uns :

Proposition 7. *Si on a une application continue f entre deux espaces topologiques X et Y (rappelons que, dans ce cadre général, une application continue est simplement une fonction pour laquelle l'image réciproque d'un ouvert est ouvert). Alors f définit un morphisme de groupe de $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ en envoyant un lacet ϕ sur X sur le lacet $f \circ \phi$. Si f est un homéomorphisme, ce morphisme de groupes est un isomorphisme.*

On a en fait un résultat plus fort en utilisant la notion suivante :

Définition 19. *Deux espaces topologiques X et Y sont dits homotopiquement équivalents s'il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité de Y et de X respectivement (ici, être homotope à l'identité signifie qu'il existe $H : X \times [0, 1] \to X$ continue telle que $H(x, 0 = x)$ et $H(x, 1) = g \circ f(x)$).*

Proposition 8. *Deux espaces homotopiquement équivalents ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Corollaire 1. *Un ouvert étoilé dans $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe.*

Proposition 9. *Si X et Y sont deux espaces topologiques et $X \times Y$ leur produit (c'est-à-dire $\{(x, y), x \in X, y \in Y\}$), on a $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

Remarque 5. *Si vous êtes un peu attentif, vous remarquerez que je vous arnaque un peu car, dans le cadre général des espaces topologiques, il n'est pas évident qu'à partir d'une topologie sur* X *et d'une autre sur* Y*, on puisse construire une topologie sur* $X \times Y$ *(l'idée simple consistant à prendre pour ouverts les produits des ouverts de* X *par ceux de* Y *ne marche pas, comme vous pourrez vous en convaincre en regardant attentivement ce qui se passe pour* $X = Y = \mathbb{R}$*). Comme c'est plus compliqué que ça n'en a l'air, je vais éviter de rentrer dans les détails techniques, mais croyez-moi, on peut le faire !*

Définition 20. *Un sous-espace* Y *d'un espace topologique* X *est dit rétracte par déformation de* X *s'il existe une application continue* $r : X \to Y$ *telle que* $\forall y \in Y, r(y) = y$ *homotope à l'identité sur* X *relativement à* Y *(ce qui signifie que,* $\forall t \in [0,1]$*,* $\forall y \in Y\ H(y,t) = y$*).*

Théorème 3. *Si* Y *est un rétracte par déformation de* X*,* X *et* Y *ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Exemple 1. *L'ouvert* $\mathbb{R}^2\ \{(0,0)\}$ *et le cercle* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *ont le même groupe fondamental.*

Finissons en citant un théorème beaucoup plus difficile, que nous ne démontrerons pas ici et pour lequel nous aurons besoin d'une définition annexe :

Définition 21. *Le produit libre de deux groupes* G *et* G' *est l'ensemble des mots rofmés sur les éléments de* G *et* G'*, c'està-dire les éléments de la forme* $g_1 g_1' g_2 \dots g_n$*, avec* $g_1 \in G$*,* $g_1' \in G'$ *etc... La loi de composition est la concaténation et on note ce groupe* $G * G'$*. En particulier, on note* $\mathbb{Z}^{*n}$ *le produit libre libre de* n *fois le groupe* $\mathbb{Z}$ *(ce groupe est aussi appelé groupe libre à* n *générateurs).*

Théorème 4. *(Van Kampen) Soit* X *un espace topoliques,* X_1 *et* X_2 *deux sous-espaces de* X *connexes par arcs tels que* $X_1 \cap X_2$ *soit simplement connexe, alors* $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$

On va maintenant donner quelques exemples :

Proposition 10. *Le groupe fondamental du cercle est égal à* $\mathbb{Z}$*. Les sphères de dimension supérieure ou égale à* 2 *sont simplement connexes.*

Exercice 3. *Calculer les groupes fondamentaux de* $\mathbb{R}^2$ *privé de* n *points, de la sphère en dimension* 3 *privée de* n *points, du tore de dimension* 2 *(c'est-à-dire lrproduit de deux cercles ; vous pouvez aussi regarder celui du tore de dimension* n*, qui est produit de* n *cercles, si vous le souhaitez), de* $\mathbb{R}^3$ *privé d'une droite, puis de deux (attention, il faut distinguer deux cas !).*

Pour obtenir des exemples encore plus intéressants, il va être nécessaire de faire appel à la théorie des espaces cellulaires, qui nous resservira dans le dernier paragraphe.

Définition 22. *Un complexe cellulaire K est un espace topologique obtenu de la façon suivante : on part d'un ensemble de points (que l'on appelle 0-squelette et qu'on note K_0, on trace ensuite des segments entre certains de ces points, la réunion de ces segmants est le 1-squelette noté K_1, on trace ensuite des carrés à partir de ces segments, ce qui donne le 2-squelette K_2, puis des cubes etc...*

Remarque 6. *Quand nous disons arête, carré, etc..., il faut comprendre que lque chose de beaucoup plus souple, en fait quelque chose d'homéomorphe à un segment, à un carré etc.. ; en particulier, on pourrait prendre des disques au lieu des carrés.*

Exemple 2. *Donnons tout de suite des exemples pour clarifier la définition. Un complexe cellulaire de dimension 1 (c'est-à-dire égal à son 1-squelette) est juste un ensemble de points reliés par des arêtes, autrement dit un graphe. En dimension 2, on a déja des choses plus intéressantes : partons de deux points, traçons une boucle autour de chaque et un segment entre eux, on peut coller un carré en partant du segment, en faisant le tour des boucles (si vous ne voyez pas bien, partez de quatre points reliés en carré par des segments, et rapprochez deux paires de points de façon à ce que deux des segments deviennent des boucles, le carré est toujours là) ; on obtient ainsi un cylindre. En partant d'un seul point et d'une boucle, on peut ainsi créer un tore (c'est un peu plus dur à voir, on peut partir du cylindre et rapprocher les deux boucles jusqu'à n'en former qu'une). De même, en partant d'un carré et en faisant se rapprocher tous les points du bord, on remarque qu'on peut voir la sphère comme un complexe cellulaire ne contenant qu'un point et un carré (et pas d'arêtes).*

Théorème 5. *Soit K un complexe cellulaire, alors son groupe fondamental ne dépend que de son 2-squelette (on peut ajouter ce qu'on veut comme cubes et hypercubes ensuite, le π_1 ne changera plus).*

Remarque 7. *En fait, le théorème est plus précis que cela et permet de calculer le groupe fondamental du complexe à partir de son 2-squelette mais cela fait intervenir la notion de présentation de groupe que nous voudrions éviter d'introduire ici (de plus, le résultat obtenu n'est pas forcément très parlant).*

Corollaire 2. *En notant $\mathbb{PC}_n$ l'espace projectif complexe de dimension n (il s'agit de l'ensemble des droites vectorielles de l'espace $\mathbb{C}^{n+1}$), on a $\pi_1(\mathbb{PC}_n) = 0$. En notant de même $\mathbb{PR}_n$ l'espace projectif réel (défini analoguement), $\pi_1(\mathbb{PR}_1) = \mathbb{Z}$, et $\pi_1(\mathbb{PR}_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n > 1$.*

Corollaire 3. *On a les résultats suivants : $\pi_1(SO_2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ et $\pi_1(SO_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n > 2$. Le groupe spécial unitaire $SU_n(\mathbb{C}))$ est toujours simplement connexe et $\pi_1(U_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.*

3.2 Encore de l'homologie !

Cette dernière partie, destinée à présenter rapidement l'homologie simpliciale et à énoncer le théorème de Hurewicz pour faire le lien entre groupe fondamental et théories homologiques, est en cours d'écriture.