Représentations unitaires de $SL_2(\mathbb{R})$

Guillaume Lafon

11 août 2004

Table des matières

Introduction

Ce texte est la rédaction de deux exposés donnés les vendredi 28 février et 7 mars 2003, à l'occasion du séminaire sur les reprsentations de groupes organisé à l'ENS par F.Paulin et F.Pierrot. La première partie est constituée de rappels dont le contenu avait été exposé par C.Wormser lors de l'exposé précédant (exposé concernant les représentations unitaires de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$). La deuxième partie applique ces résultats au cas de $SL_2(\mathbb{R})$ et permet d'obtenir une partie de la classification des représentation unitaires irréductibles de $SL_2(\mathbb{R})$. Dans la troisième partie, on introduit des outils différents qui permettent de retrouver ces résultats et d'obtenir l'intégralité de la classification. Enfin, la dernière partie donne des exemples plus concrets de telles représentations.

1 Rappels et notations

Definition 1. *Une représentation unitaire* (H, ρ) *d'un groupe topologique* G *est un couple formé d'un espace de Hilbert* H *et d'un morphisme de groupe continu* $\rho : G \to U(H)$, $U(H)$ *étant l'ensemble des endomorphismes unitaires de* H.

Remarque On abrégera souvent $\rho(g)v$ par $g.v$.

Definition 2. *Une représentation unitaire* (H, ρ) *est dite continue si* $\forall v \in H$, *l'application* $g \mapsto \rho(g)v$ *est continue.*

Remarque : il existe d'autres notions de continuité pour de telles représentations, mais celle-ci est la plus naturelle.

Notation 1. *A partir de maintenant, on pose* $G = SL_2(\mathbb{R})$ *et* $K = SO_2(\mathbb{R})$ *(qui est un sous-groupe compact maximal de* $SL_2(\mathbb{R})$ *) ;* (H, ρ) *ou plus simplement* ρ *désignera toujours une représentation unitaire de* G.

Remarque Tout ce qui est fait dans cette partie reste valable dans un cadre plus général, en particulier pour $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ en prenant alors $K = SL_2(\mathbb{Z}_p)$.

Definition 3. *On note* $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$ *l'algèbre des fonctions* f $\mathcal{C}^\infty$ *à support compact dans* G, K*-biinvariantes (c'est-à-dire* $\forall k \in K$, $\forall g \in G$, $f(kg) = f(gk) = f(g)$*). C'est une algèbre pour le produit de convolution.*

Proposition 1. *Si* ρ *est une représentation unitaire de* G, *elle induit une représentation* $\overline{\rho}$ *(sur le même espace de Hilbert* H*) de l'algèbre* $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$ *définie par* $\overline{\rho}(f)v = \int_G f(g)g.vdg$.

Remarque A chaque fois qu'une intégrale intervient, il est sous-entendu que la mesure utilisée est la mesure de Haar (tous les groupes sur lesquels on travaille sont localement compacts).

Definition 4. *On pose* $H^K = \{v \in H \mid \forall k \in K,\ k.v = v\}$ *(ensemble des vecteurs* K*-invariants).*

Proposition 2. *Si* (H, ρ) *est irréductible ,* $(H^K, \overline{\rho})$ *l'est également.*

Corollaire 1. *On a* $dim(H^K) = 0$ *ou* $dim(H^K) = 1$.

Definition 5. *Les représentation irréductibles pour lesquelles* $dim(H^K) = 1$ *(c'est-à-dire celles qui ont des vecteurs* K*-invariants) sont dites de classe 1.*

Les représentation de classe sont plus faciles à classifier en utilisant l'outil des fonctions sphériques que nous allons maintenant introduire (sans démonstrations) :

Definition 6. *Une fonction* $f : G \to \mathbb{C}$ *est dite* K*-sphérique si elle est continue biinvariante, vérifie* $f(e) = 1$ *et est vecteur propre à droite de* $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$ *(pour un certain* λ *complexe, on a* $\forall \phi \in \mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, $f * \phi = \lambda\phi$*).*

Definition 7. *Une fonction sphérique est dite de type positif si* $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $\forall g_1$,
$\ldots, g_n \in G$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_j} f(g_i g_j^{-1}) \geqslant 0$.

Theoreme 1. *Si* ρ *est une représentation irréductible de classe 1, et* u *un vecteur unitaire de* H^K*, la fonction* $\phi_\rho : g \mapsto < g.u|u >$ *est sphérique de type positif. De plus, l'application* $\rho \mapsto \phi_\rho$ *est une bijection entre les clases d'isomorphisme de représentations irréductibles de classe 1 de* G *et les fonctions sphériques de type positif sur* G*.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème, ainsi que des propositions précédentes, peut être trouvée dans [?] (dans lequel on retrouvera d'ailleurs à peu près tout le contenu de ces exposés). Un exposé plus simple mais moins complet est celui de [?]. $\square$

Il suffit donc, pour déterminer les représentation de classe 1, de savoir identifier les fonctions sphériques, ce qu'on va s'efforcer de faire dans la section suivante.

2 Représentations de classe 1 de $SL_2(\mathbb{R})$

2.1 Intérprétations géométriques de $SL_2(\mathbb{R})$

Commençons par introduire des actions de groupe permettant une interprétation géométrique du groupe G (ou plutôt de $G\backslash K$), qui sera utilisée plusieurs fois par la suite.

Proposition 3. *Le groupe* $SL_2(\mathbb{R})$ *agit transitivement sur le demi-plan de Poincaré* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ *par homographies (*$g.z = \frac{az+b}{cz+d}$ *si* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*). On a pour cette action* $Stab(i) = K$*, on peut donc identifier* $G\backslash K$

à $\mathbb{H}$. De plus, le laplacien $\Delta = -y^2(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2})$ pour la métrique hyperbolique sur $\mathbb{H}$ commute à l'action de G.

Démonstration. Le fait qu'on ait une action de groupe par homographies est classique et le reste de la proposition n'est qu'un calcul assez pénible et inélégant pour ne pas mériter qu'on s'y attarde. □

Proposition 4. *Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ par l'action*

$g.z = \frac{[(a+d)+i(b-c)]z+[(a-d)-i(b+c)]}{[(a-d)+i(b+c)]z+[(a+d)+i(c-b)]}$ *si* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*. On a pour cette action $Stab(0) = K$ (par ailleurs, K agit par translations, les orbites sous K sont donc les cercles de centre 0), on peut donc identifier $G\backslash K$ à $\mathcal{D}$. De plus, le laplacien $\Delta = -(1 - x^2 - y^2)(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2})$ pour la métrique hyperbolique sur $\mathcal{D}$ commute à l'action de G.*

<u>Remarque</u> Cette deuxième action se déduit de la première par le transport de structure (métrique hyperbolique incluse) de $\mathbb{H}$ sur $\mathcal{D}$ donné par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. La proposition se déduit alors de la précédente, il suffit de vérifier que la composition du transport de structure avec l'action sur $\mathbb{H}$ donne bien l'action sur $\mathcal{D}$, et de même pour le Laplacien. Le fait que K agisse par rotations est évident sur la définition de l'action.

2.2 Fonctions sphériques sur $SL_2(\mathbb{R})$

On peut désormais identifier une fonction ϕ sur G à une fonction (que l'on notera toujours ϕ par commodité) sur le disque unité complexe $\mathcal{D}$. De plus, comme K agit par translations, le fait que ϕ soit K-biinvariante se réinterprète comme le fait qu'elle soit radiale sur le disque. On va donc en fait s'intéresser à des fonctions d'une seule variable. Qui plus est, les fonctions sphériques se comportent particulièrement bien vis-à-vis du Laplacien, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5. *Soit ϕ une fonction sphérique sur G, alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\Delta\phi = \lambda\phi$*

Démonstration. On va bien sûr utiliser la sphéricité de ϕ, le problème étant qu'il faut introduire des fonctions K-biiinvariantes à support compact pour cela. Qu'à cela ne tienne, on prend donc f_n une approximation de l'unité. On peut même se permettre de prendre f_n K-biinvariante quitte à la remplacer par $\int_K \int_k k f_n k' dk dk$. On a alors $\Delta(f_n \star \phi) = \lambda_n phi$ par sphéricité de ϕ, et comme $\phi \star f_n$ converge uniformément vers ϕ, le résultat s'en déduit. □

Il reste à voir pour quelles valeurs de λ on obtient effectivement une solution et surtout quand elle sera de type positif.

Theoreme 2. *Pour tout λ réel positif ou nul, il existe une unique fonction sphérique ϕ_λ de type positif vérifiant $\Delta\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$.*

Démonstration. Montrons la nécessarité de la condition : si ϕ^λ est une fonction sphérique vérifiant $\Delta(\phi^\lambda) = \lambda\phi^\lambda$, comme on a $\phi(0) = 1$ (par définition des fonctions sphériques), $\phi'(0) = 0$ car ϕ est radiale, et $\phi(0)$ ne peut être qu'une valeur maximale de ϕ pour une fonction sphérique, donc $\Delta\phi^\lambda(0) \geqslant 0$, et $\lambda \geqslant 0$.

Pour l'existence, elle découle d'une utilisation soigneuse du théorème de Cauchy-Lipschitz (comme on n'a aucune raison a priori que les solutions du problème de Cauchy soient $\mathcal{C}^2$, il faut d'abord travailler avec des distributions). □

2.3 Application à la classification des représentation

Commençons par un rappel sur la façon dont on construit explicitement les fonctions sphériques à partir de caractères.

Proposition 6. *En notant $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subset SL_2(\mathbb{R})$, on a $G = PK$ et si χ est un caractère sur P trivial sur $P \cup K$, en posant $\chi(kp) = \chi(p)$, on obtient une fonction sur G qui est valeur propre à droite dans $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$ et $f : g \mapsto \int_K \chi(kg)dk$ est une fonction sphérique.*

Appliquons ce résultat au cas de G. Les carac-tères sur P sont de la forme $\chi_t \left((\begin{matrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{matrix} \right)) = a^{2t}$ $(t \in \mathbb{C})$. Or, pour l'identification de $G\backslash K$ avec $\mathbb{H}$, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} .i = ab + a^2 i$, donc on peut identifier χ_t à la fonction sur $\mathbb{H}$ définie par $\chi_t(z) = \Im(z)^t$, d'où l'expression suivante pour la fonction sphérique ϕ_t associée : $\phi_t(z) = \int_K \Im(k.z)^t dk$. Un calcul simple nous montre alors, en utilisant le théorème 2, que ϕ_t est de type positif dans deux cas qui nous donnent la classification suivante :

Theoreme 3. *Les représentations irréductibles unitaires de classe* 1 *de $SL_2(\mathbb{R})$ sont en bijection avec les fonctions sphériques ϕ_t obtenues pour les valeurs suivantes de t : $t \in \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$ (la valeur propre λ de ϕ_t pour le Laplacien vérifie alors $\lambda \geqslant \frac{1}{4}$), les représentations correspondantes étant alors appelées séries principales, ou $t \in [0, 1]$ (la valeur propre λ de ϕ_t pour le Laplacien vérifie alors $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{4}$), les représentations correspondantes étant alors appelées séries complémentaires).*

Cette classification est fort satisfaisante, mais reste néanmoins incomplète, puisqu'on a laissé tomber en cours de route les représentations n'ayant pas de vecteur K-invariant. On va donc dans la section suivante développer de nouveaux outils (un peu plus techniques) permettant cette fois-ci d'obtenir une classification complète.

3 Représentation dérivée, classification des représentations de $SL_2(\mathbb{R})$

3.1 Définition de la représentation dérivée

On va commencer par introduire un nouvel objet, qui n'est en fait autre que l'algèbre de Lie associée au groupe G, mais comme on n'aura guère besoin d'utiliser des propriétés subtiles de cette algèbre, on peut se contenter pour cet exposé de l'introduire explicitement. Encore une fois, toute la construction de la représentation dérivée reste valable dans un cadre beaucoup plus général.

Definition 8. *On pose $\mathcal{G} = \{M \in G \mid Tr(M) = 0\}$ (muni de sa structure d'algèbre de Lie par $[M, N] = MN - NM$). On utilisera aussi l'algèbre complexifiée $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}$ pour les calculs.*

Definition 9. *Introduisons tout de suite une base de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ qui sera utile par la suite : on note $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E^+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ et $E^- = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.*

La particularité des matrices à trace nulle est qu'on peut considérer leur exponentielle sans difficulté, ce qui va nous servir immédiatement pour définir la dérivée de Lie d'une fonction.

Definition 10. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(G, H)$ (où H est un espace de Banach, qui dans notre cas sera toujours l'espace de la représentation). On appelle dérivée de Lie par rapport à $X \in \mathcal{G}$ et on note $\mathcal{L}_X f$ la fonction de $\mathcal{C}^\infty(G, H)$ $g \mapsto \frac{d}{dt} f(ge^{tX}) \mid_{t=0}$.*

La dérivée de Lie a les propriétés auxquelles on s'attend, ce qui se démontre par un simple calcul :

Proposition 7. *La dérivée de Lie est linéaire par rapport aux éléments de $\mathcal{G}$ ($\mathcal{L}_{X+aY} f = \mathcal{L}_X f + a\mathcal{L}_Y f$) et commute au crochet de Lie ($\mathcal{L}_{[X,Y]} f = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] f$).*

On voudrait maintenant définir une représentation de $\mathcal{G}$ à partir de celle de G en utilisant la dérivée de Lie, mais pour cela, on aura besoin de se restreindre à un sous-espace de H car la dérivée de Lie n'est définie que pour des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Definition 11. *On pose* $H_\rho^\infty = \{v \in H \mid g \mapsto \rho(g)v \text{ est une fonction } \mathcal{C}^\infty\}$.

Proposition 8. *Le sous-espace* H_ρ^∞ *est dense dans* H.

Démonstration. On va avoir besoin du petit lemme suivant :

Lemme 1. *Si* $\phi \in (C)_c^\infty(G)$ *et* $v \in H$, $\rho^1(\phi) = \int_G \phi(g)\rho(g)dv \in H_\rho^\infty$.

La démonstration du lemme est immédiate, il suffit de constater qu'on peut dériver autant qu'on veut sous le signe intégral. Ensuite, la proposition en découle en prenant une suite de Dirac f_n pour laquelle $\rho^1(f_n)v \to v$. □

Definition 12. *La représentation dérivée de* ρ *est la représentation de* $\mathcal{G}$ *à valeurs dans* H_ρ^∞ *définie par* $d\rho(X)v = \frac{d}{dt}\rho(e^{tX}).v \mid_{t=0} = \mathcal{L}_X(g \mapsto \rho(g).v)(e)$.

Remarque Ceci définit bien une représentation au sens usuel du groupe $\mathcal{G}$.

L'intérêt de cette représentation dérivée est qu'on obtient très facilement les sous-espaces irréductibles de la représentation initiale à partir de ceux de la représentation dérivée.

Theoreme 4. *Si* $V \subset H$ *est un sous-espace analytique (ie* $\forall v \in V$, $g \mapsto \rho(g)v$ *est une fonction analytique) constitué de vecteurs invariants par* $d\rho$*, alors* $\bar{V}$ *est invariant par* G.

Remarque La condition technique d'analycité ne pose pas de problème en pratique, on montre en effet que l'ensemble des vecteurs analytiques est dense dans H (cf [La]). On ne va pas démontrer ce théorème, mais l'idée est la suivante : si v est un vecteur analytique, on peut développer $u \mapsto \rho(exp(X)).u$ en série entière faisant intervenir les $d\rho^n$ sur un voisinage de v, et en déduire la stabilité.

3.2 Classification

Notation 2. *On notera désormais* P_θ *la matrice de rotation d'angle* θ.

Definition 13. *On pose* $H_n = \{v \in H \mid \forall\theta \in \mathbb{R},\ \rho(P_\theta).v = e^{in\theta}v\}$.

Remarque L'exponentielle de la matrice W valant ce qu'elle vaut, on voit facilement que H_n est exactement le sous-espace propre de valeur propre in pour l'action de W via la représentation dérivée.

Theoreme 5. *Soit ρ une représentation irréductible . On a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $H_n \subset H_\rho^\infty$ et $dim(H_n) \leqslant 1$. De plus, $\sum_{n\ pair} H_n$ et $\sum_{n\ impair} H_n$ sont stables par $d\rho$; on a même plus précisément $d\rho(E^+) : H_n \to H_{n+2}$ et $d\rho(E^-) : H_n \to H_{n-2}$.*

Démonstration. Tout ceci découle de calculs élémentaires dans les algèbres de Lie. Effectuons-en un pour l'exemple : si $v \in H_n$, $d\rho(W)d\rho(E^+)v = d\rho([W, E^+])v + d\rho(E^+)d\rho(W)v = 2id\rho(E^+)v + ind\rho(E^+)v$ (car $[W, E^+] = 2iE^+$), donc $d\rho(E^+)v \in H_{n+2}$. □

Corollaire 2. *L'espace H est l'adhérence de l'un des quatre espaces suivants (le symbole $\oplus$ désignant pour la suite une somme directe orthogonale) : $\oplus_{n\ pair} H_n$, $\oplus_{n\ impair} H_n$, $\oplus_{n \geqslant m, n \equiv m\ [2]} H_n$ (on dit alors que m est le plus bas poids de la représentation) ou $\oplus_{n \leqslant m, n \equiv m\ [2]} H_n$ (on dit alors que m est le plus haut poids de la représentation).*

Theoreme 6. *Les représentations irréductibles de G sont paramétrées par l'ensemble A inclus dans $\mathbb{C}$ qui est l'union du segment $[-1, 1]$ (ce qui correspond aux séries principales déjà introduites), de la droite $i\mathbb{R}$ (on retrouve ici les séries complémentaires) et des entiers naturels (séries discrètes et semi-discrètes, ces dernières intervenant pour l'entier 0 qui contribue donc à plusieurs types de représentations à la fois).*

Démonstration. Il faut distinguer tous les cas qui peuvent se présenter : supposons d'abord qu'il ny a ni plus haut ni plus bas poids. On peut prendre un vecteur v_0 base de H_0, et poser $v_{n+2} = E^+(v_n)$, ce qui détermine une base de H_n pour n pair. On a alors $E^-(v_n) = c_n v_{n-2}$, et en posant $a_n = \| v_n \|$, des calculs élémentaires montrent que $[E^+, E^-]v_n = 4nv_n$, d'où $c_n - c_{n+2} = 4n$, et $\bar{E}^+ = -E-$ d'où $a_{n+2}^2 = -\bar{c}_{n+2} a_n^2$. Tout est donc déterminé par le nombre c_0, qui, par le dernier calcul, doit être réel négatif. Réciproquement, un tel c_0 détermine bien une représentation. Les autres cas se démontrent de manière analogue sans grande difficulté. □

4 Réalisation effective des représentations

4.1 Une réalisation peu concrète

Definition 14. *On définit $H(s) = \{\tilde{f} \mid f \in L^2(K)\}$, où $\tilde{f}$ est le prolongement de f à G (et même à $GL_2^+(\mathbb{R})$) défini par $f(g) = y^{\frac{s+1}{2}} f(P_\theta)$ si $g = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_\theta$.*

Definition 15. *On note ϕ_n la fonction sur K définie par $\phi_n(P_\theta) = e^{in\theta}$ et H_n le sous-espace vectoriel de $H(s)$ engendré par $\tilde{\phi_n}$.*

Proposition 9. *Les dérivées de ϕ_n par rapport aux vecteurs de la base de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ introduite plus haut sont les suivantes :* $\mathcal{L}_W(\phi_n) = in\phi_n$*,* $\mathcal{L}_{E^+}(\phi_n) = (s+1+n)\phi_{n+2}$ *et* $\mathcal{L}_{E^-}(\phi_n) = (s+1-n)\phi_{n-2}$*.*

Démonstration. Il n'y a hélas pas de miracle, il faut calculer et dériver des tas de fonctions pour obtenir le résultat. Mais comme le calcul n'est pas beaucoup plus difficile qu'intéressant, il est laissé en exercice au lecteur. □

Corollaire 3. *On retrouve exactement la classification du théorème 6.*

4.2 Du concret pour les séries discrètes

Dans cette section, on va donner une interprétation en termes plus concrets des séries discrètes, en utilisant le demi-plan de Poincaré comme à la section 2.

Definition 16. *On définit un ensemble de meures* μ_m*, indexées par* $\mathbb{N}$ *sur* $\mathbb{H}$ *par* $d\mu_m(x,y) = y^m dx\frac{dy}{y^2}$*. On pose* $H^m = L^2_{hol}(\mathbb{H}, \mu_m)$*.*

Proposition 10. *L'espace de fonctions* H^m *est un espace de Hilbert.*

Definition 17. *On définit une action de* $SL_2(\mathbb{R})$ *sur* H^m *par* $\rho_m(\sigma)(f)(z) = f(\sigma^{-1}z)(cz+d)^{-m}$*, pour* $f \in H^m$*,* $z \in \mathbb{H}$ *et* $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$ *tel que* $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*.*

Theoreme 7. *La représentation* ρ_m *est unitaire et irréductible. Si on note* $\psi_n \in H_m$ *la fonction définie (pour* $n \geqslant 0$*) par* $\psi_n(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n (z+i)^{-m}$ *et* H^m_{m+2n} *la droite engendrée dans* H^m *par* ψ_n*, c'est un sous-espace propre pour* K *de valeur propre* $m+2n$*. De plus* $H^m = \oplus_{n\geqslant 0} H^m_{m+2n}$*.*

Corollaire 4. *La représentation* ρ_m *est une série discrète de plus bas poids* m*.*