Exercices de logique : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

24 septembre 2007

Exercice 1 :

- $(2+2=4) \wedge (1+1=3)$ est fausse, sa négation est $(2+2 \neq 4) \vee (1+1 \neq 3)$.
- $(2+2=4) \vee (1+1=3)$ est vraie, sa négation est $(2+2 \neq 4) \wedge (1+1 \neq 3)$.
- $(2+2=4) \Rightarrow (1+1=3)$ est fausse, sa négation est $(2+2=4) \wedge (1+1 \neq 3)$.
- $(1+1=3) \Rightarrow (2+2=4)$ est vraie, sa négation est $(1+1=3) \wedge (2+2 \neq 4)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$ est fausse, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$ est vraie, sa négation est $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ est vraie, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq x^2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ est fausse, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2$ est fausse, sa négation est $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \neq x^2$.

Exercice 2 :

- $\forall x \in I, f(x) = 0$.
- $\exists x \in I, f(x) = 0$.
- $\forall x \in I, f(x) > 0$.
- $\exists k \in I, \forall x \in I, f(x) = k$.
- $\forall x \in I, \forall y \in I, (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$.
- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \geqslant M$.

Exercice 3 :

Le non se définit sans difficulté : $\rceil A = \rceil(A \wedge A) = A \uparrow A$. Puis $A \wedge B = \rceil(A \uparrow B) = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$. Ensuite, tout peut se définir à partir de $\rceil$ et $\wedge$, donc de $\uparrow$. On a $A \vee B = \rceil(\rceil A \wedge \rceil B) = \rceil A \uparrow \rceil B = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$. Puis $A \Rightarrow B = \rceil A \vee B = (\rceil A \uparrow \rceil A) \uparrow (B \uparrow B) = ((A \uparrow A) \uparrow (A \uparrow A)) \uparrow (B \uparrow B)$, et enfin $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = ((A \Rightarrow B) \uparrow (B \Rightarrow A)) \uparrow ((A \Rightarrow B) \uparrow (B \Rightarrow A)) =$ une superbe horreur de deux lignes de long (il n'y a qu'à remplacer chaque implication par le résultat obtenu juste avant).

Exercice 4 :

Raisonnons, comme souvent quand on a une équivalence à prouver, par double implication. L'une d'entre elles est très facile : si $A = B$, alors $A \cap B = A \cup B = A$.

Dans l'autre sens, on peut raisonner par contraposée : si $A \neq B$, alors il existe un élément x de A n'appartenant pas à B (ou le contraire, mais le rôle joué par les deux ensembles est symétrique), et dans ce cas $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$, donc $A \cup B \neq A \cap B$.

On peut aussi montrer la réciproque « à la main ». Supposons $A \cup B = A \cap B$ et choisissons $x \in A$. On a donc $x \in A \cup B$, mais alors $x \in A \cap B$ puisque ces deux ensembles sont égaux par hypothèse. On en déduit que $x \in B$, et donc que $A \subset B$. De même, on a $B \subset A$ (encore une fois à cause de la symétrie de l'hypothèse), donc $A = B$, ce qui prouve la propriété.

Exercice 5 :

On a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right] = [a-1; b+1]$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right] = [a; b]$. Tous les intervalles sont inclus dans le premier mais incluent eux-même l'intervalle $[a; b]$. Leur union est donc égale au premier d'entre eux. Quand à l'intersection, il faut encore vérifier qu'aucun réel n'appartenant pas à $[a, b]$ ne peut y appartenir. Soit par exemple $x < a$ (si $x > b$ le raisonnement est très similaire), notons $\varepsilon = a - x > 0$. Il existe un entier n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ puisque la suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Mais alors pour cette valeur précise de n, x n'appartient pas à $\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]$ (puisqu'on a alors $a - \frac{1}{n} > x$), donc il ne peut appartenir à l'intersection demandée.

Exercice 6 :

On peut le faire en utilisant uniquement les propriétés des opérations sur les ensembles :
$A \backslash (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Exercice 7 :

Allons-y progressivement : $\mathcal{P}(\{0; 1\}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0; 1\}\}$.
Puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0; 1\})) = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\{0\}\}; \{\{1\}\}; \{\{0; 1\}\}; \{\emptyset; \{0\}\}; \{\emptyset; \{1\}\}; \{\emptyset; \{0, 1\}\}; \{\{0\}; \{1\}\};$
$\{\{0\}; \{0; 1\}\}; \{\{1\}; \{0; 1\}\}; \{\emptyset; \{0\}\{1\}\}; \{\emptyset; \{0\}; \{0; 1\}\}; \{\emptyset; \{1\}; \{0; 1\}\}; \{\{0\}; \{1\}; \{0; 1\}\}; \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0; 1\}\}\}$.

Exercice 8 :

Encore une fois, on s'en sort rapidement et simplement via les propriétés des opérations sur les ensembles : $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ (on a juste utilisé les lois de de Morgan et le fait que $A \cup \overline{A} = E$).

Si $A \Delta B = A \cap B$, comme $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ est constitué d'éléments n'appartenant pas à $A \cap B$, il faut nécessairement que $A \cap B = \emptyset$. Mais alors $A \Delta B = A \cup B$ d'une part, et d'autre part $A \Delta B$ est lui aussi vide puisque par hypothèse égal à $A \cap B$. On a donc finalement $A \cup B = \emptyset$, ce qui implique bien sûr $A = B = \emptyset$.

Exercice 9 :

L'application f est injective (en effet, si $2n = 2n'$, on a $n = n'$, mais pas surjective, 3 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f (toutes les images des entiers par f sont des entiers pairs). Au contraire, g est surjective car tout entier n est antécédent par g de son double $2n$, mais n'est pas injective, car 2 et 3 par exemple ont la même image par g. Comme $g \circ f$ n'est autre que l'identité sur $\mathbb{N}$, elle est bien entendu bijective. Enfin, $f \circ g$ n'est ni injective (pour la même raison que g : 2 et 3 ont la même image) ni surjective (pour la même raison que f : toutes les images sont paires, donc 3 n'a pas d'antécédent).

Exercice 10 :

$f([2; 5]) = [4; 25]$; $f^{-1}([2; 5]) = [-\sqrt{5}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{5}]$; $f([-4; 1]) = [0; 16]$; $f^{-1}([-4; 1]) = [-1; 1]$ $f(f([3; 4])) = [81; 256]$ et $f^{-1}(f([3; 4])) = [-4; -3] \cup [3; 4]$.

Exercice 11 :

Commençons par remarquer qu'on a toujours, si $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$. En effet, si $x \in A$, x est un antécédent de $f(x)$, qui par définition appartient à $f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Supposons maintenant f injective et $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe un élément z dans A tel que $f(x) = f(z)$ (mais a priori z n'a aucune raison d'être égal à x). Comme f est injective, on a lors $z = x$, donc en fait $x \in A$ et $f^{-1}(f(A)) \subset A$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Pour la réciproque, supposons que $\forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$, et soit x un élément de E. En appliquant l'hypothèse à $A = \{x\}$, on a $f^{-1}(f(\{x\}) = \{x\}$. Or, $f(\{x\}) = \{f(x)\}$, donc $f^{-1}(f(\{x\}))$ est constitué de tous les antécédents de $f(x)$. La propriété nous indique donc que, quel que soit x, $f(x)$ n'a qu'un antécédent par f, c'est la définition d'une application injective.

Pour la caractérisation de la surjectivité, c'est un peu similaire : on a toujours $g(g^{-1}(B)) \subset B$ (les images d'antécédents d'éléments de B sont ces éléments de B). Si de plus g est surjective, tout élément y de B admet au moins un antécédent dans A, dont l'image sera y, donc $y \in g(g^{-1}(B))$, et $B = g(g^{-1}(B))$.

Réciproquement, si $\forall B \subset F, B = g(g^{-1}(B))$, on a en particulier, si $y \in F$, $\{y\} = g(g^{-1}(\{y\}))$, mais ceci implique que y ait au moins un antécédent par g, sinon l'ensemble $g^{-1}(\{y\})$ serait vide et son image par g aussi ! L'application g est donc surjective.

Exercice 12 :

Supposons l'existence de $f : E \to F$ injective, et construisons l'application g. Si $y \in f(E)$, il admet un unique antécédent par f (puisqu'elle est injective), c'est naturellement cet antécédent qui sera égal à $g(y)$. Si $y \notin f(E)$, on peut donner n'importe quelle valeur à $g(E)$. En effet, l'application g est déjà surjective, un élément $x \in E$ ayant pour antécédent par g $f(x)$.

Dans l'autre sens, s'il existe une application $g : F \to E$ surjective, tout élément de E a admet au moins un antécédent dans F par g. L'image de x par f sera alors l'un (quelconque) de ces antécédents. L'application ainsi définie est bien injective, puisque des antécédents de deux éléments différents ne peuvent pas être égaux.

Exercice 13 :

Inutile de vérifier injectivité et surjectivité (même si c'est facile), il suffit de remarquer qu'en posant $g = f \circ f$, on a $f \circ g = g \circ f = id$, donc f est bijective, de réciproque g.

Exercice 14 :

Pour que l'application soit injective, il faut que, si $X \subset E$ et $Y \subset E$, on ait $X = Y$ dès que $X \cap A = Y \cap B$ et $Y \cap A = Y \cap B$. C'est le cas si $A \cup B = E$, En effet, on a alors $X = X \cap E = (X \cap A) \cup (X \cap B)$, et de même pour Y, donc si les intersections de X et Y avec A et B sont identiques, on aura bien $X = Y$. Vérifions par contraposée que cette condition suffisante est également nécessaire. Supposons donc $A \cup B \neq E$. Il existe alors un élément x dans E n'appartenant ni à A ni à B. Posons $X = \{x\}$ et $Y = \emptyset$, ces deux ensembles distincts ont pour image par f $(\emptyset, \emptyset)$, donc f n'est pas injective.

La surjectivité est vérifiée si, pour tout sous-ensemble C de A, et pour tout sous-ensemble D de B, on peut trouver $X \subset E$ tel que $X \cap A = C$ et $X \cap B = D$. En prenant par exemple $C = A$ et $D = \emptyset$, on doit pouvoir trouver X tel que $X \cap A = A$, c'est-à-dire $A \subset X$, et $X \cap B = \emptyset$. On doit donc a fortiori avoir $A \cap B = \emptyset$. Cette condition est suffisante. En effet, dans ce cas, l'ensemble $X = C \cup D$ vérifiera bien $X \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A) = C$ (puisque $C \subset A$ et $D \subset B$, donc

$D \cap A = \emptyset$), et de même $X \cap B = D$. Remarquez que l'application considérée est bijective dans le cas où A et B forment une partition de E (union égale à E pour l'injectivité, et intersection vide pour la surjectivité).

Exercice 15 :

Pour que h soit bien définie, il est nécessaire (et suffisant d'ailleurs) que les éléments qui n'appartiennent pas à A aient un antécédent par g, puisque c'est celui-ci qui est censé leur servir d'image par h. Mais si $x \notin A$, on a en particulier $x \notin E_1$, donc $x \in g(F)$ par définition de E_1. L'application h est donc bien définie.

Prouvons que h est injective, et pour cela prenons deux éléments x et x' dans E ayant même image par h. Si x et x' appartiennent tous deux à A, pas de problème, h y coïncide avec f qui est injective, ils sont donc égaux. S'ils appartiennent tous deux à $E \backslash A$, aucun souci non plus, leurs images par h sont leurs antécédents par g, qui ne peuvent pas être égaux s'ils sont différents. Enfin, supposons $x \in A$ et $x' \in E \backslash A$, et donc $f(x) = g^{-1}(x')$. On a alors $g \circ f(x) = x'$. Or, si $x \in A$, c'est que $x \in E_i$ pour un certain entier i, et on a donc $f(x) \in F_i$, puis $g \circ f(x) \in g(F_i)$. L'ensemble E_{i+1} étant défini comme $g(F_i)$, privé de l'union des E_i précédents, $g \circ f(x)$ appartient soit à l'un de ces E_i, soit à E_{i+1}. Dans tous les cas, x' devrait appartenir à A, ce qui est contraire à notre hypothèse. L'application h est donc bien injective.

Reste à prouver qu'elle est surjective. Soit $y \in F$, si $y \in f(A)$, aucun problème, il est image par h de son antécédent par f. Supposons donc $y \notin F(A)$. On a donc, $\forall i \geqslant 1$, $y \notin f(E_i)$, donc $g(y) \notin E_{i+1}$. Comme $g(y) \notin E_1$ par définition de E_1, le pauvre $g(y)$ en est réduit à ne pas appartenir à A. Mais alors $g(y)$ a pour image par h son antécédent par g, c'est-à-dire y lui-même ! On a donc trouvé un antécédent à y par h, et l'application h est bien surjective, donc finalement bijective.

Ce théorème a des conséquences très intéressantes, mais que nous n'avons pas vraiment le temps d'étudier cette année. Un exemple : il est facile de créer une injection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}_+$ (il suffit de prendre l'identité), mais aussi dans l'autre sens : $\dfrac{p}{q} \mapsto 2^p 3^q$ est injective. D'après le théorème précédent, il existe donc une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$., ce qui signifie en gros qu'il y a « autant » d'entiers que de rationnels.