Exercices sur la géométrie plane

PCSI 2 Lycée Pasteur

23 octobre 2007

Exercice 1

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère le point $\Omega(1;-1)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $(1;2)$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(-2;3)$.

1. Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ?
2. Soient $A(5,6)$ et $\vec{z}$ le vecteur de coordonnées $(-3;-3)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Calculer leurs coordonnées dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Déterminer une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 2

On se place dans un repère orthonormal. Donner l'aire des triangles ABC et ABD, avec $A(1;1)$, $B(-2;-2)$, $C(0;2)$ et $D(-1;2)$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux de M sur les trois côtés du triangle sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit du triangle.

Exercice 4

Soit ABC un triangle, $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On note de plus p le demi-périmètre de ABC. Calculer le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{A}$ en fonction de a, b et c, en déduire la formule de Héron : l'aire S de ABC est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Exercice 5

Donner une équation de la droite Δ passant par $A(1;2)$ et parallèle à la droite D d'équation $4x - y + 1 = 0$. Déterminer l'intersection de (OA) et de D.

Exercice 6

On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel a, on définit la droit D_a d'équation $(1-a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$. Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille. Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

Exercice 7

On se place dans un repère orthonormé direct et on considère les points $A(1;1)$, $B(3;2)$ et $C(-1;2)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB) puis celles de son symétrique par rapport à (AB).

Exercice 8

Dans un repère orthonormal direct, on considère les droites D et D' d'équations respectives $5x - 12y + 7 = 0$ et $3x + 4y + 7 = 0$. Calculer les équations de leurs bissectrices.

Exercice 9

Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite D par l'équation $x + y + 1 = 0$ et, pour tout réel λ, le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0$. Décrire le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ en fonction du paramètre λ puis étudier l'intersection de D et de $\mathcal{C}_\lambda$.

Exercice 10

On considère dans un repère orthonormal direct les points $A(3;4)$, $B(-3;2)$ et $C(-5;-2)$.

1. Déterminer une équation du cercle ciconscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC. Préciser son centre Ω et son rayon r.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
5. Vérifier que H, G et Ω sont alignés.

Exercice 11

Soit ABC un triangle équilatéral. Déterminer $\{M \mid MA^2 + MB^2 = MC^2\}$.

Exercice 12

Soit ABC un triangle tel que $AB = a$, $BC = 2a$ et $AC = a\sqrt{2}$.

1. Que peut-on dire du triangle ABC ?
2. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$.
3. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$.