TD n°1 : exercices divers

PCSI 2 Lycée Pasteur

5 septembre 2007

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. Soient K, L et M les points d'affixes respectives $1+i$, $1-i$ et $-i\sqrt{3}$. Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O.
3. On note N le symétrique de M par rapport à L ; A et C les images respectives de M et N par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$; et D et B les images respectives de M et N par la translation de vecteur d'affixe $2i$. Déterminer l'affixe de tous ces points et les placer sur la figure.
4. Montrer que K est le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$.
5. Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 3x^2 - 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction p polynome de degré 2 solution de (E).
2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $(E') : y' + 2y = 0$.
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E').
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Vérifier que la suite u_n est bien définie.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ (on notera désormais φ sa solution).
3. Étudier les variations de f et montrer que, pour tous réels a et b, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \leqslant \varphi$.
5. Montrer que, pour tout entier n, $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \varphi|$, en déduire la limite de la suite u_n.
6. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour obtenir une approximation de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près ?

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x+1-(2x+1)\ln x$ et $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+x}$.

1. Étudier le plus complètement possible la fonction f. On notera α l'unique réel vérifiant $f(x) = 0$. Donner une valeur approchée de α.
2. Déterminer les variations de g et calculer $g(\alpha)$ en fonction de α.
3. Déterminer les limites de g et tracer sa courbe représentative, ainsi que sa tangente au point de la courbe d'abscisse 1.
4. On note, pour tout réel $\lambda \geqslant 1$, $I(\lambda) = \displaystyle\int_1^\lambda g(x)\,dx$. Montrer que $I(\lambda) \leqslant \displaystyle\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
5. Calculer cette dernière intégrale et en déduire une majoration de $I(\lambda)$.