Devoir Maison n°2

PCSI 2 Lycée Pasteur

À rendre pour le lundi 15 octobre

Exercice 1 : étude de relations d'ordre

On considère sur $\mathbb{N}^2$ la relation R définie par $(p,q)R(p',q')$ si $p+q < p'+q'$ **ou** $(p+q = p'+q'$ et $q \leq q')$.

1. Montrer que R est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^2$.
2. Montrer que $\mathbb{N}^2$ admet un plus petit élément pour R.
3. On considère $E^* = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q > 0\}$. Montrer que E^* possède également un plus petit élément.
4. Soit $x \in \mathbb{N}^2$ et $E_x = \{y \in \mathbb{N}^2 \mid xRy\}$. Montrer que E_x possède un plus petit élément dont on expliquera la détermination.
5. On définit une chaine de tête x, de queue y et de longueur n dans $(\mathbb{N}^2, R)$ comme une suite $(x, x_2, \dots, x_{n-1}, y)$ d'éléments de $\mathbb{N}^{\nvDash}$ telle que chaque terme de la suite est relié au terme suivant par la relation R. Montrer que, pour x et y fixés, les longueurs des chaines admettant x comme tête et y comme queue sont majorées. Déterminer le nombre de telles chaines ayant une longueur maximale (en fonction de x et y).

Exercice 2 : un peu de fonctions

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Étude de la fonction φ

1. Étudier la parité de φ.
2. Étudier les variations de φ, en précisant ses branches infinies.
3. Donner l'allure de la courbe représentative de φ.
4. Justifier que φ est bijective vers un intervalle à préciser.
5. Montrer que $\varphi' = 1 - \varphi^2$.
6. Calculer la dérivée de φ^{-1} sur son intervalle de définition.

Étude d'une équation fonctionnelle

On cherche dans cette partie à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

1. Calculer $f(0)$ pour une telle fonction f.
2. Soit $x \neq 0$. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{f(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}}$ converge et déterminer sa limite.
3. En déterminant une relation de récurrence sur les termes de la suite, déterminer la forme de la fonction f.

Une deuxième équation fonctionnelle

On cherche maintenant les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)}$$

1. Montrer que φ est une solution de ce problème.
2. Soit f une solution. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
3. Montrer que $-f$ est aussi solution.
4. Montrer que les valeurs de f sont comprises entre -1 et 1.
5. On suppose dans cette question que $f(0) = 1$ et on pose $u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ (x étant un réel quelconque).
   (a) Montrer que u_n converge vers une limite à préciser.
   (b) Établir une relation entre u_n et u_{n+1}.
   (c) En déduire que u_n estde signe constant.
   (d) Étudier la monotonie de u_n et en déduire qu'elle est constante égale à 1.
   (e) Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?
   (f) Que se passe-t-il si on suppose $f(0) = -1$?
6. On suppose désormais $f(0) = 0$.
   (a) Montrer par l'absurde que f ne prend jamais les valeurs 1 et -1.
   (b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \varphi^{-1}(f(x))$ est dérivable en 0 et vérifie l'équation fonctionnelle de la deuxième partie.
   (c) En déduire une expression de f.