

Géométrie et arithmétique des surfaces d'Enriques

Guillaume LAFON

Mémoire de DEA (DEA Méthodes Algébriques
de l'Université Paris 6) sous la direction de

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

18 juillet 2004

Table des matières

1	Géométrie des surfaces d'Enriques	3
1.1	Quelques rappels de théorie des surfaces	3
1.2	Propriétés élémentaires et exemples de surfaces d'Enriques	4
1.3	Le réseau d'Enriques	6
1.4	Fibrations elliptiques sur une surface d'Enriques	9
1.5	Systèmes linéaires et modèles projectifs des surfaces d'Enriques	14
1.6	Le théorème de représentation d'Enriques	18
1.7	Automorphismes des surfaces d'Enriques	23
2	Propriétés arithmétiques des surfaces d'Enriques	28
2.1	Equations explicites de surfaces d'Enriques	28
2.2	Un exemple de surface d'Enriques sans point rationnel sur $\mathbb{C}((t))$	30
2.3	Principe de Hasse et approximation faible	32
3	Annexe 1 : Quelques rappels sur les réseaux	34
4	Annexe 2 : Sur les points doubles rationnels	36
	Références	37

Introduction

Ce mémoire s'intéresse à deux aspects bien différents des surfaces d'Enriques complexes, une des classes de surfaces intervenant dans la classification d'Enriques. Dans une première partie, le but sera d'obtenir des résultats de nature géométrique sur ces surfaces. Hormis pour les surfaces de type général, on a des résultats précis sur la nature géométrique de tous les types de surfaces algébriques. Parmi celles-ci, les surfaces d'Enriques sont, avec les surfaces K3, peut-être les moins simples à représenter géométriquement, mais on a tout de même plusieurs résultats sur des plongements de surfaces d'Enriques dans des espaces projectifs, en particulier la représentation donnée par Enriques lui-même lors de sa définition des surfaces qui portent aujourd'hui son nom, à savoir une surface plongée dans \mathbb{P}^3 passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. La démonstration de ce résultat occupera une bonne place dans cette première partie et utilisera des techniques classiques de géométrie complexe (systèmes linéaires en particulier). L'autre résultat essentiel de cette première partie est l'existence de fibrations elliptiques sur une surface d'Enriques. Enfin, on dira quelques mots sur le groupe des automorphismes d'une surface d'Enriques, pour lequel quelques résultats plus récents ont été obtenus.

La deuxième partie sera de nature plus arithmétique et utilisera les surfaces d'Enriques comme source d'exemples ou de contre-exemples à certains principes fondamentaux en géométrie arithmétique, où nombre de problèmes se ramènent à chercher l'existence de points sur certaines variétés définies sur un corps global k ou encore au lien entre ces points et ceux définis sur les complétés k_v du corps k pour les diverses valuations discrètes v du corps k , notamment via le principe de Hasse et le principe d'approximation faible (l'exemple le plus fréquent dans le cadre des équations diophantiennes étant \mathbb{Q} et ses complétés les corps p -adiques \mathbb{Q}_p , mais ici on s'intéressera plutôt à $\mathbb{C}(t)$ pour lequel les complétés sont isomorphes à $\mathbb{C}((t))$). On pourra consulter à ce sujet l'article de Sir Peter Swinnerton-Dyer [18], qui donne un point de vue global sur ce type de problèmes. Le résultat principal exposé est un exemple original de surface d'Enriques définie sur $\mathbb{C}(t)$ et n'ayant pas de point rationnel sur $\mathbb{C}((t))$ (donc n'ayant pas non plus de point sur $\mathbb{C}(t)$). On citera également un exemple récent de défaut d'approximation faible sur une surface d'Enriques (dû à Colliot-Thélène et Gille) utilisant le même type d'équations que le précédent.

1 Géométrie des surfaces d'Enriques

1.1 Quelques rappels de théorie des surfaces

Dans cette section, le mot surface désignera toujours une variété algébrique complexe de dimension 2, projective et lisse. Le lecteur est supposé familier avec les notions élémentaires de géométrie algébrique telles qu'exposées par exemple dans [17]. Nous rappellerons toutefois les formules principales, énoncées dans le cadre de la théorie des surfaces, et la classification des surfaces algébriques, où apparaissent naturellement les surfaces d'Enriques que nous allons étudier par la suite.

Théorème 1. (*dualité de Serre*) Soit S une surface, L un fibré en droites sur S et ω_S le fibré canonique sur S . Alors l'espace $H^2(S, \omega_S)$ est de dimension 1 et on a, pour $i = 0, 1, 2$, une dualité donnée par le cup-produit : $H^i(S, L) \otimes H^{2-i}(S, \omega_S \otimes L^{-1}) \rightarrow H^2(S, \omega_S) \simeq \mathbb{C}$. En particulier, $\chi(L) = \chi(\omega_S \otimes L^{-1})$.

Démonstration. Cf [17], II.7. □

Théorème 2. (*Riemann-Roch*) Soit $L \in \text{Pic}(S)$, on a la formule $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L \cdot \omega_S)$.

Démonstration. Cf [17], V.1.6. □

Théorème 3. (*formule de Noether*) Soit K un diviseur canonique sur S . On a $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K^2 + \chi_{\text{top}}(S))$, où $\chi_{\text{top}}(S)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de S .

Démonstration. Cf [17], V.1.6.1. □

Théorème 4. (*formule d'adjonction*) Soit C une courbe irréductible intègre sur une surface S , et p_a son genre arithmétique. On a alors $C \cdot (C + K_S) = 2p_a - 2$.

Démonstration. Cf [17], V.1.5. □

Théorème 5. (*de l'indice de Hodge*) Soit H un diviseur ample sur une surface S et D un diviseur non trivial pour la relation d'équivalence numérique (ie $\exists D' \in \text{Pic}(S)$, $D \cdot D' \neq 0$). Si $D \cdot H = 0$, alors $D \cdot D < 0$.

Démonstration. Cf [17], V.1.9. □

Théorème 6. (*critère de Nakai-Moishezon*) Un diviseur D sur une surface S est ample si et seulement si $D^2 > 0$ et $D \cdot C > 0$ pour tout courbe irréductible C sur S .

Démonstration. Cf [17], V.1.10. □

Théorème 7. (*d'annulation de Ramanujam*) Soit D un diviseur effectif 1-connexe (c'est-à-dire que, si D peut s'écrire $D = D_1 + D_2$, avec D_1 et D_2 effectifs, on a $D_1 \cdot D_2 > 0$) sur une surface S tel que $\dim H^0(S, \mathcal{O}(nD)) \geq 2$ pour n assez grand, alors $H^1(S, \mathcal{O}(-D)) = 0$.

Démonstration. Cf [21], Théorème 8.1 p.131. □

On va maintenant introduire quelques concepts qui interviennent dans la classification des surfaces.

Définition 1. Le m -ième pluri-genre d'une variété complexe compacte X est $P_m(X) = \dim |mK|$ (où K est un diviseur canonique sur X).

Définition 2. La dimension de Kodaira d'une variété complexe compacte X , notée $\text{kod}(X)$, est le degré de transcendance sur \mathbb{C} de l'anneau $\mathbb{C} \oplus \sum_{m \geq 1} \Gamma(X, \omega_X^{\otimes m})$.

Proposition 1. On a $\text{kod}(X) = k$ (pour $k \geq 1$) si et seulement si $P_m(X)$ croît en m^k . De plus, la dimension de Kodaira est un invariant birationnel et vérifie $\text{kod}(X) \leq \dim(X)$.

Démonstration. On peut trouver une démonstration des propriétés élémentaires de la dimension de Kodaira, présentés sous forme analytique, dans [21], I.7. \square

Définition 3. Un *modèle minimal* d'une surface connexe X est une surface S birationnellement équivalente à X possédant la propriété suivante (propriété de minimalité) : toute application birationnelle $S \rightarrow Z$, où Z est une surface lisse, est un isomorphisme.

Proposition 2. Un tel modèle existe pour toute surface compacte X . De plus, une surface minimale est caractérisée par le fait qu'elle ne contient pas de courbe exceptionnelle de première espèce, c'est-à-dire de courbe rationnelle E d'auto-intersection -1 .

Définition 4. L'irrégularité d'une surface projective X est l'entier $q = \dim(H^1(Y, \mathcal{O}_Y))$.

Théorème 8. (Classification de Kodaira-Enriques des surfaces algébriques complexes) Toute surface connexe X a un modèle minimal dans une des classes suivantes :

classe de X	$\text{kod}(X)$	$q(X)$	ordre de ω_X
surfaces rationnelles	$-\infty$	0	
surfaces réglées de genre g	$-\infty$	g	
surfaces d'Enriques	0	0	2
surfaces K3	0	0	1
surfaces hyperelliptiques	0	1	2, 3, 4, 6
variétés abéliennes	0	2	1
surfaces proprement elliptiques	1		
surfaces de type général	2		

Les surfaces rationnelles sont celles qui sont birationnellement équivalentes à \mathbb{P}^2 ; les surfaces réglées de genre g peuvent s'écrire comme un produit $C \times \mathbb{P}^1$, où C est une courbe de genre g ; les surfaces hyperelliptiques admettent une fibration sur une courbe elliptique de fibre générale une courbe de genre 1, les variétés abéliennes sont les quotients de \mathbb{C}^2 par un réseau de rang 4 sur \mathbb{R} ; les autres types de surfaces sont simplement définies par leurs invariants (dimension de Kodaira pour les surfaces proprement elliptiques et de type général, annulation de l'irrégularité et ordre du fibré canonique dans le groupe de Picard pour les surfaces K3 et les surfaces d'Enriques).

De plus, le modèle minimal d'une surface compacte est unique, sauf dans le cas des surfaces réglées.

Démonstration. On se réfèrera à [3], qui donne une démonstration complète de la classification (en particulier, le théorème VIII.2 traite le cas $\text{kod}(X) = 0$ qui contient les surfaces d'Enriques) ainsi que diverses propriétés des différentes classes de surfaces, dont certaines que nous allons rappeler ici pour les surfaces d'Enriques. Pour une classification de toutes les surfaces analytiques (qui inclut la précédente via les théorèmes GAGA de Serre), cf [21], chapitre 6 (le théorème est donné au premier paragraphe, et la démonstration suit dans le reste du chapitre). \square

1.2 Propriétés élémentaires et exemples de surfaces d'Enriques

Commençons par rappeler la définition d'une surface d'Enriques :

Définition 5. Une *surface d'Enriques complexe* est une variété irréductible projective lisse complexe Y de dimension 2 qui vérifie les deux conditions suivantes : son fibré canonique ω_Y est d'ordre 2 dans le groupe de Picard (mais non trivial) et son irrégularité $q(Y)$ est nulle (ou, de manière équivalente, $b_1(Y) = 0$, où $b_1(Y)$ est le premier nombre de Betti de la variété Y , puisqu'on a la relation suivante qui découle de la théorie de Hodge : $q(S) = \frac{1}{2}b_1(S)$ pour une surface complexe S).

Remarque 1. Les surfaces d'Enriques ont été historiquement introduites par Enriques via une famille de surfaces S vérifiant $q(S) = p_g(S) = 0$ sans être rationnelles, ce qui montrait la non-validité d'une tentative d'affaiblissement pourtant naturelle du critère de Castelnuovo ([3], V.1).

Proposition 3. *Les principaux invariants algébriques d'une surface d'Enriques complexe Y sont les suivants : $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$, $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}^{10} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Ses invariants topologiques sont les suivants : $c_1^2(Y) = 0$, $c_2(Y) = 12$ (où $c_i(Y)$ désigne la i ème classe de Chern associée au fibré tangent sur Y), $b_1(Y) = 0$, $b_2(Y) = 10$. Plus précisément, pour les dimensions des groupes de cohomologie de Dolbeault $h^{p,q}(Y) = \dim(H^q(\Omega_Y^p))$, on a $h^{0,0}(Y) = h^{2,2}(Y) = 1$, $h^{1,0}(Y) = h^{0,1}(Y) = h^{2,0}(Y) = h^{0,2}(Y) = 0$ et $h^{1,1}(Y) = 10$.

Démonstration. Ces résultats utilisent de manière élémentaire les résultats classiques de la théorie des surfaces algébriques rappelés à la section précédente et la théorie de Hodge, on en trouve par exemple une démonstration dans [21], lemme 15.1 et proposition 15.2. \square

Nous allons préciser la proposition concernant le groupe fondamental par le résultat suivant :

Proposition 4. ([3], proposition VIII.17) *Le revêtement universel \tilde{Y} d'une surface d'Enriques Y est une surface K3 et ce revêtement est en fait un revêtement étale double. Réciproquement, le quotient d'une surface K3 par une involution sans point fixe est une surface d'Enriques.*

Démonstration. Rappelons que tout diviseur d'ordre 2 (mais non trivial) associé à un fibré inversible L dans le groupe de Picard d'une variété X définit un revêtement étale double $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ caractérisé par le fait que $\pi^*L \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Dans le cas d'une surface d'Enriques Y , notons $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ le revêtement étale double associé au fibré canonique ω_Y . On a $\omega_{\tilde{Y}} = \pi^*\omega_Y = 0$ par la caractérisation de π . De plus, les propriétés des revêtements étales permettent de calculer $\chi(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = 2\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = 2$ (cf [3], lemme VI.3; l'astuce consiste à utiliser la formule de Noether pour se ramener au cas de la caractéristique d'Euler, qui se traite topologiquement en utilisant des triangulations), dont on déduit $q(\tilde{Y}) = 0$, ce qui suffit à conclure que \tilde{Y} est une surface K3 en utilisant le théorème 8. Les surfaces K3 étant simplement connexes, \tilde{Y} est bien le revêtement universel de Y . Réciproquement, si on a une involution sans point fixe sur une surface K3 \tilde{Y} , on en déduit un revêtement étale double $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$, où Y est la variété quotient. Elle vérifie $\pi_*\pi^*\omega_{\tilde{Y}} = 2\omega_Y = 0$ et $\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$, ce qui suffit pour conclure que Y est une surface d'Enriques en utilisant à nouveau le théorème 8. \square

Cette proposition permet d'exhiber les exemples les plus simples de surfaces d'Enriques :

Proposition 5. *La variété X définie dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ muni des coordonnées homogènes (x_0, \dots, x_5) par les trois équations*

$$Q_i(x_0, x_1, x_2) + Q'_i(x_3, x_4, x_5) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

où les Q_i sont des formes quadratiques linéairement indépendantes et les Q'_i également, est une surface K3. L'involution σ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ définie par $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_0, x_1, x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$ préserve X et est sans point fixe. Dans ce cas, le quotient de Y par σ est une surface d'Enriques.

Démonstration. Le fait que X est une surface $K3$ découle du calcul de ses invariants en tant qu'intersection complète de quadriques (la proposition V.2.1 de [21] donne l'expression du fibré canonique et de la première classe de Chern d'une intersection complète) Ensuite, l'absence de point fixe pour l'involution est une conséquence de l'hypothèse d'indépendance linéaire des formes quadratiques : si le point $(x_0 : \dots : x_5)$ est fixe pour l'involution, on voit facilement que soit $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, soit $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, ce qui signifie, par exemple dans le premier cas, que $(x_3 : x_4 : x_5)$ est racine commune de Q'_1, Q'_2 et Q'_3 , ce qui est exclu par hypothèse, d'où la proposition. \square

Proposition 6. ([3], proposition VIII.19) Soit P un système linéaire de quadriques dans \mathbb{P}^3 de dimension 3 sans point base et vérifiant la condition (C) : si l est une droite singulière contenue dans une quadrique Q de P , Q est la seule quadrique de P contenant l .

Soit Y la variété des droites de \mathbb{P}^3 incluses dans un pinceau de quadriques de P , alors Y est une surface d'Enriques.

Démonstration. Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \mid x \text{ est le conjugué de } y \text{ par rapport à toute quadrique de } P\}$. L'involution $\sigma : (x, y) \mapsto (y, x)$ est sans point fixe sur X car P est sans point base : un point fixe serait de la forme (x, x) , où x serait un point qui serait son propre conjugué par rapport à toutes les quadriques de P , c'est-à-dire un point-base de P . De plus, l'application $X \rightarrow \{\text{droites de } \mathbb{P}^3\}$, qui à deux points associe la droite qui les contient, est bien à valeurs dans Y ; en effet, pour $(x, y) \in X$, la droite passant par x et y est contenue dans le pinceau des quadriques de P passant par x et y . Réciproquement, si l est une droite de \mathbb{P}^3 , on déduit de P un pinceau de quadriques de dimension 0 sur l , et il y a exactement un couple de points dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ conjugués par toutes les quadriques de ce pinceau. On a donc un isomorphisme entre Y et X/σ .

Or, X est intersection dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ de 4 diviseurs de bidegré $(1, 1)$ (il suffit de prendre les formes bilinéaires associées à un système de générateurs du système linéaire P). On vérifie facilement que cette intersection est complète en utilisant la condition (C). On a alors $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ donc $q(X) = 0$ (propriété générale des surfaces intersections complètes) et on calcule $\omega_X = 0$ en utilisant la proposition déjà citée [21], V.2.1). La surface X est donc une surface $K3$, et Y une surface d'Enriques. \square

1.3 Le réseau d'Enriques

Dans toute cette section et dans les trois suivantes, Y désignera une surface d'Enriques complexe. Le groupe de Néron-Severi de Y (groupe des classes de diviseurs sur Y modulo équivalence algébrique) est, comme on l'a vu au paragraphe précédent, isomorphe à $\mathbb{Z}^{10} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est de plus muni de la forme bilinéaire d'intersection. Le but de ce paragraphe va être d'étudier la structure de réseau (cf Annexe 1 pour les résultats élémentaires sur les réseaux qui seront utilisés dans cette section) définie par cette forme bilinéaire, non sur $NS(Y)$ lui-même (qui n'est pas un groupe abélien libre) mais sur le groupe $Num(Y)$ formé des classes de diviseurs modulo équivalence numérique ($D \sim D' \Leftrightarrow \forall C \in Pic(Y), C.D = C.D'$), pour lequel on a le résultat suivant :

Proposition 7. On a $Num(Y) = NS(Y)/Tors \simeq \mathbb{Z}^{10}$.

Démonstration. Le calcul de $Num(Y)$ découle de celui d'une surface $K3$, effectué dans [6], chapitre 1, proposition 1.2.3. \square

La structure de réseau de $Num(Y)$ se calcule aisément :

Théorème 9. ([6], théorème 2.5.1) Le réseau $Num(Y)$ est isomorphe au réseau $Q_{2,3,7}$ (les propriétés de base des réseaux et les définitions des réseaux standard sont rappelés en Annexe 1) et au réseau $U_2 \oplus E_8$.

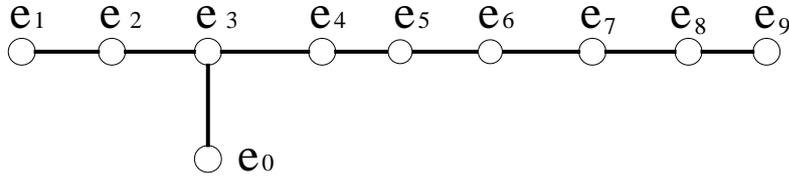
Démonstration. D'après le théorème 21 de l'Annexe 1, il suffit de vérifier que ces trois réseaux sont pairs, unimodulaires, non-dégénérés de signature $(1, 9)$. Le fait que les réseaux $Q_{2,3,7}$ et $U_2 \oplus E_8$ soient pairs découle du diagramme de Dynkin qui les définit, U_2 est unimodulaire de signature $(1, 1)$ par un calcul immédiat, E_8 est unimodulaire défini négatif car il est le diagramme de Dynkin d'un système de racines fini (cf l'annexe 1). Le discriminant de $Q_{2,3,7}$ vaut $|42 - 6 - 14 - 21| = 1$ donc il est bien unimodulaire. Il contient un sous-réseau de type A_9 , qui est de signature $(0, 9)$, donc sa signature ne peut être que $(0, 9)$, $(0, 10)$ ou $(1, 9)$. Or, si la forme bilinéaire définissant $Q_{2,3,7}$ était négative, il correspondrait au diagramme de Dynkin d'un système de racines de type affine ou fini, ce qui n'est pas le cas. Il est donc nécessairement de signature $(1, 9)$.

La théorie de l'intersection montre que $Num(Y)$ est un réseau unimodulaire de rang 10. De plus, on a $\forall C \in Pic(Y), C^2 = 2p_a(C) - 2$ par la formule d'adjonction donc $Num(Y)$ est pair. Enfin, le théorème de l'indice de Hodge montre que la forme d'intersection est définie négative sur l'orthogonal de la classe d'un diviseur ample. Cette classe étant d'autointersection positive, $Num(Y)$ est hyperbolique, ce qui termine la démonstration. \square

Définition 6. On notera E_n le réseau $Q_{2,3,n-3}$ et on appelle en particulier *réseau d'Enriques* le réseau E_{10} , encore noté plus simplement N .

Remarque 2. Comme on vient de le voir, le réseau d'Enriques est isomorphe à $U \oplus E_8$. On peut généraliser ce résultat et montrer que, $\forall n \geq 10, E_n \simeq U_2 \oplus E_8 \oplus A_{n-10}$ (cf [6], proposition 2.5.1). La démonstration consiste à exhiber (en utilisant le diagramme de Dynkin) des sous-réseaux orthogonaux isomorphes aux différentes composantes de la somme directe, ce que nous allons expliciter dans le cas de E .

Proposition 8. *Le réseau N contient un système de racines $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq 9}$ dont le diagramme de Dynkin est le suivant (un tel système sera désormais dit canonique) :*



De plus, en notant $f = 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8$, on a un plongement naturel du réseau E_8 dans N (d'image engendrée par $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq 7}$, image que nous noterons toujours E_8) tel que $E_8^\perp = \mathbb{Z}f \oplus \mathbb{Z}\alpha_9 \simeq U_2$.

Démonstration. La première assertion n'est qu'une reformulation du théorème précédent. Remarquons, ce qui sera utile pour la suite, qu'on obtient un tel système de racines à partir de la base canonique e_0, \dots, e_9 de \mathbb{Z}^{10} en posant $\alpha_0 = e_0 - e_1 - e_2 - e_3, \alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_9 = e_9 - e_{10}$. Le reste est un simple calcul, $\alpha_9 \in E_8^\perp$ est clair, et il faut ensuite calculer $b(\alpha_i, f)$, ce qui ne présente pas plus de difficulté que d'intérêt, par exemple $b(f, \alpha_3) = 3b(\alpha_0, \alpha_3) + 4b(\alpha_2, \alpha_3) + 6b(\alpha_3, \alpha_3) + 5b(\alpha_4, \alpha_3) = 3 + 4 - 12 + 5 = 0$. \square

Définition 7. Une *r-suite isotrope* dans un réseau M est un r -uplet (f_1, \dots, f_r) de vecteurs isotropes tels que $b(f_i, f_j) = 1$ dès que $i \neq j$. Ces suites correspondent en fait aux plongements du réseau U_r dans M .

Proposition 9. *Le réseau d'Enriques N contient des r -suites isotropes pour tout $r \leq 10$.*

Démonstration. Un simple calcul montre qu'à partir d'un système de racines canonique $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq 9}$, on obtient une r -suite isotrope en posant $f_1 = 3\alpha_0 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 + \alpha_9$ et $f_i = f_{i-1} - \alpha_{i-1}$ pour $i = 2, \dots, 10$. \square

Proposition 10. ([6], proposition 2.5.7) *La base duale (dans le réseau dual) du système de racines canonique est composé de vecteurs qui sont combinaison linéaire à coefficients entiers de vecteurs isotropes.*

Démonstration. Soit $\omega_0, \dots, \omega_9$ cette base duale. Un calcul élémentaire permet de se convaincre que $\omega_0 = (f_1 + \dots + f_{10})/3$, ce qui s'écrit encore comme $\omega_0 = e_0 - 3k$, où $k = -3e_0 + e_1 + \dots + e_9$; $\omega_1 = \omega_0 - f_1$, $\omega_2 = 2\omega_0 - f_1 - f_2$, $\omega_i = f_{i+1} + \dots + f_{10}$ pour $i \geq 3$ (où f_1, \dots, f_{10} est la suite isotrope introduite dans la démonstration de la proposition précédente. \square

Nous allons enfin énoncer quelques définitions et une proposition qui seront utiles plus loin pour le calcul du groupe d'automorphismes de certaines surfaces d'Enriques :

Définition 8. On notera L le réseau $U_2 \oplus U_2 \oplus U_2 \oplus E_8 \oplus E_8$, s l'involution de L donnée par $(u_1, u_2, u_3, e_1, e_2) \mapsto (-u_1, u_3, u_2, e_2, e_1)$, L^+ le sous-réseau des vecteurs invariants par s et L^- le sous-espace propre de s associé à la valeur propre -1 .

Remarque 3. Le réseau L^+ est isomorphe au réseau d'Enriques N . Le réseau L^- est isomorphe à $N \oplus U_2$.

Proposition 11. ([20], proposition 1.7) *Le sous-groupe de 2-congruence du groupe de Weyl $W(E_8)$ est réduit à $\{\pm id\}$. Le sous-groupe de 2-congruence du groupe d'isométries du réseau d'Enriques $O(N)$ est d'indice $2^{21} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 17 \times 31$.*

Démonstration. Nous aurons besoin de deux lemmes :

Lemme 1. Il y a dans E_8 exactement 135 classes d'équivalence modulo $2E_8$ de vecteurs de carré -4 .

Démonstration. Le réseau E_8 peut être décrit comme l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^8 à coordonnées entières ou à coordonnées demi-entières et à somme de coordonnées paire (le produit scalaire étant l'opposé du produit scalaire ordinaire). Ses 240 racines sont alors les vecteurs de la forme $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et $1/2(\pm 1, \dots, \pm 1)$ (cf [16], table p.268). Un vecteur de E_8 à coordonnées entières et de carré -4 est alors, à permutation des coordonnées près, de la forme $(\pm 2, 0, \dots, 0)$ ou $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 0, 0, 0, 0)$. Tous les vecteurs de la première forme sont équivalents modulo $2E_8$, pour ceux de la seconde forme, ils sont équivalents par groupes de 2^4 (ceux qui ont les zéros aux mêmes positions, ce qui laisse 70 classes différentes modulo $2E_8$. Les vecteurs à coordonnées demi-entières de carré -4 sont de la forme $\pm 1/2(3, -1, 1, \dots, 1)$, $\pm 1/2(3, 1, \dots, 1, -1)$, $\pm 1/2(3, 1, 1, -1, \dots, -1)$ ou $\pm 1/2(3, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1)$. Les deux premiers types de vecteurs sont équivalents modulo $2E_8$, dans la troisième catégorie, les vecteurs sont équivalents par groupes de 12 (on peut échanger le 3 avec n'importe quel -1), ce qui laisse 28 classes différentes, et de même, dans le dernier cas, on a 35 classes différentes, soit au total $1 + 70 + 1 + 28 + 35 = 135$ classes modulo $2E_8$. \square

Corollaire 1. Pour obtenir un système de représentants de E_8 modulo $2E_8$, il suffit de prendre 120 éléments parmi les paires de racines $\pm w$, 135 représentants des classes de vecteurs de carré -4 , et le vecteur nul.

Démonstration. Il suffit de vérifier que, si la différence $w_1 - w_2$ de deux racines est dans $2E_8$, on a $w_2 = \pm w_1$, ce qui découle de la description des racines. \square

Lemme 2. ([20], lemme 1.6) Le groupe de Weyl W_8 du système de racines E_8 agit transitivement sur les octuplets de racines (w_1, \dots, w_8) satisfaisant $w_i \cdot w_j = -1$ pour $i \neq j$.

Démonstration. On sait déjà que W_8 coïncide avec $O(E_8)$ (cf [16], p.270). De plus, il agit transitivement sur les racines (théorème 23). On peut donc supposer $w_1 = 1/2(1, \dots, 1)$. Si w_i est toujours à coordonnées entières pour $i \geq 2$, on peut le prendre à coordonnées positives puisque W_8 contient les changements simultanés de deux signes de coordonnées, donc on peut prendre w_2 égal à $(1, 1, 0, \dots, 0)$ quitte à permuter les coordonnées. Si w_2 n'est pas à coordonnées entières, on peut toujours le rendre tel en lui appliquant une symétrie par rapport à une racine à coordonnées semi-entières orthogonale à w_1 . De même, comme w_2 et w sont orthogonaux, on peut rendre w_3 à coordonnées entières puis égal à $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ après permutation, et prendre $w_4 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ ou $w_4 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Quitte à appliquer une symétrie par rapport au vecteur $1/2(1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1)$ puis par rapport à $1/2(1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1)$, le second cas se ramène au premier. On conclut ensuite facilement pour les quatre derniers vecteurs. \square

Pour calculer le sous-groupe de 2-congruence de $O(N)$, on va étudier le morphisme de restriction $O(N) \rightarrow \text{Aut}(N/2N)$. Le réseau N étant pair, on peut restreindre la forme d'intersection en une forme quadratique non dégénérée q sur $N/2N$. Or, sur un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel de dimension paire, il n'y a que 2 telles formes à conjugaison près, qui diffèrent par leur nombre de zéros. Ici, la restriction de q à $E_8/2E_8$ a $2^8 - 120 = 136$ zéros d'après le corollaire au premier lemme. Sur $U_2/2U_2$, la restriction de q a trois zéros. Les zéros de q sur $N/2N$ étant les couples (u, e) vérifiant $q(u) = q(e)$, on a au total $3 \times 136 + 120 = 528$ zéros pour q . Si on note $O^+(10, \mathbb{F}_2)$ le groupe d'isométries correspondant, c'est un résultat classique que $|O^+(2k, \mathbb{F}_2)| = 2^{k(k-1)+1} \times (2^k - 1) \times \sum_{j=1}^{k-1} (2^{2j} - 1)$ (cf [13], chapitre II, § 10) et que ce groupe est engendré par les transvections suivant les vecteurs non isotropes. De telles transvections étant réductions modulo 2 de réflexions engendrant le groupe de Weyl, on en déduit que les morphismes de réduction $W_8 \rightarrow O(E_8/2E_8, q)$ et $O(N) \rightarrow O(N/2N, q)$ sont surjectifs. Les cardinaux de ces deux groupes étant respectivement $2^{13} \times 3^5 \times 5^2 \times 7$ et $2^{21} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 17 \times 31$ d'après la formule que nous venons de rappeler, et celui de W_8 étant $2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7$, on en déduit le théorème. \square

1.4 Fibrations elliptiques sur une surface d'Enriques

Dans cette section, nous allons nous attacher à montrer des résultats sur la structure des surfaces d'Enriques (dans toute la section, la lettre Y désignera une surface d'Enriques, et K un diviseur canonique sur cette surface; notons que, comme $2K \sim 0$, le diviseur K est numériquement nul, c'est-à-dire que, $\forall D \in \text{Pic}(Y)$, $D.K = 0$) en utilisant des fibrations elliptiques, dont nous commençons par rappeler la définition :

Définition 9. Une *surface elliptique* est une surface S munie d'une fibration elliptique, c'est-à-dire d'un morphisme surjectif $p : S \rightarrow B$ vers une courbe lisse B , dont la fibre générique est une courbe de genre 1.

Remarque 4. En particulier, toutes les surfaces de dimension de Kodaira 1 (surfaces hyperelliptiques) sont elliptiques. Ce ne sont bien sûr pas les seules.

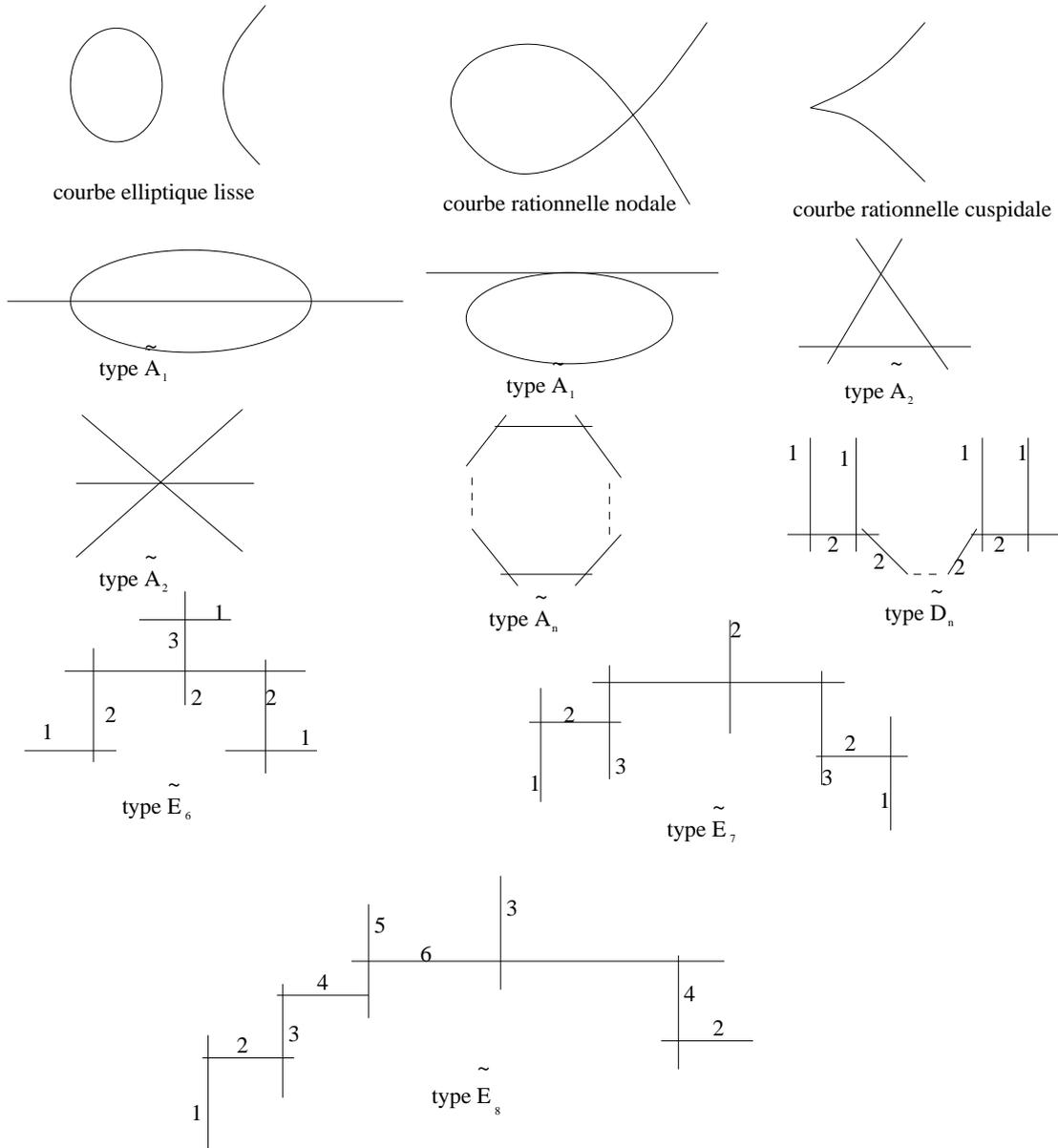
Le but principal de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 10. ([6], théorème 5.7.1) *Toute surface d'Enriques admet une fibration elliptique au-dessus de la droite projective \mathbb{P}^1 .*

Pour aboutir à ce résultat, et suivant la démonstration de [6], nous allons étudier les propriétés de certains diviseurs particuliers sur les surfaces d'Enriques.

Définition 10. Un diviseur effectif D sur une surface d'Enriques Y est dit de type canonique si $D = \sum_{i=1}^k m_i R_i$ (où les R_i sont les composantes irréductibles de D), avec $\forall 1 \leq i \leq k$, $R_i.D = 0$. Le diviseur D est de plus dit indécomposable s'il est connexe et que $\text{pgcd}(m_i) = 1$.

Proposition 12. ([6], proposition 3.1.1) *Un diviseur indécomposable de type canonique sur Y est de l'un des types suivants :*



Démonstration. Commençons par nous occuper du cas particulier où D est irréductible :

Lemme 3. Soit D un diviseur irréductible de type canonique sur une surface d'Enriques, alors D est une courbe elliptique lisse ou une courbe rationnelle cuspidale ou nodale.

Démonstration. Par la formule d'adjonction, le genre arithmétique p_a de la courbe définie par le diviseur D vérifie $2p_a - 2 = D \cdot (D + K)$, dont on déduit $p_a = 1$ puisque, D n'ayant qu'une composante irréductible, $D^2 = 0$ par définition des diviseurs de type canonique. Le lemme s'en déduit immédiatement. \square

Dans le cas où D est réductible, on a par hypothèse $D \cdot R_1 = 0$ donc $R_1^2 = -\sum_{i=2}^k R_1 \cdot R_i$. Le diviseur D étant supposé connexe, on en déduit $R_1^2 < 0$. Or, par la formule d'adjonction, on a $2(p_a(R_1) - 1) = R_1^2$, donc la seule possibilité est d'avoir $R_1^2 = -2$ et $p_a(R_1) = 0$. Le

même raisonnement s'appliquant naturellement à R_i pour $i \neq 1$, toutes les courbes R_i sont rationnelles d'autointersection -2 . L'ensemble $(R_i)_{1 \leq i \leq k}$ est donc un système de racines dans $\text{Num}(Y)$ (quitte à renuméroter les R_i , leur matrice d'intersection ne contient que des -2 sur la diagonale et des 1 sur la sur-diagonale et la sous-diagonale), qui engendre un sous-réseau de $\text{Num}(Y)$ contenu dans l'orthogonal D^\perp de D . Si le produit d'intersection n'était pas négatif sur D^\perp , on pourrait trouver un diviseur C dans D^\perp vérifiant $C^2 > 0$. Comme on a par hypothèse $D^2 = 0$, il suffit de montrer un équivalent du théorème de l'indice de Hodge pour le diviseur C (qui n'est a priori pas ample) pour aboutir à une contradiction. Cet équivalent est facile à obtenir à partir du théorème de Hodge lui-même : celui-ci implique que la forme d'intersection est de signature $(1, 9)$ sur $\text{Num}(Y)$, donc est nécessairement définie négative sur l'orthogonal d'un élément de carré strictement positif (celui-ci ne pouvant alors être isotrope, son orthogonal est un supplémentaire de la droite qu'il engendre). La forme d'intersection est donc bien définie négative sur D^\perp , et le diviseur D étant supposé indécomposable, on en déduit que le système de racines $(R_i)_{1 \leq i \leq k}$ est irréductible affine. La proposition en découle en utilisant la classification des systèmes de racines de type affine (cf Annexe 1). \square

Proposition 13. ([6], lemme 3.1.1) *Un diviseur $D = \sum m_i R_i$ de type canonique sur Y vérifie les propriétés suivantes :*

1. $H^0(D, \mathcal{O}_D) = H^1(D, \mathcal{O}_D) = \mathbb{C}$.
2. $\omega_D \simeq \mathcal{O}_D$.
3. *Tout diviseur effectif D' vérifiant $D'.R_i = 0$ s'écrit $nD + D''$, avec D'' effectif et disjoint de D .*
4. *On a $D^2 = 0$ et $D.D'$ est positif pour tout diviseur effectif D' sur Y .*

Démonstration. Par la classification de la proposition précédente et celle des points doubles rationnels (cf Annexe 2), on constate qu'on peut écrire $D = R_1 + D'$, où D' est le diviseur fondamental d'un point double rationnel, quitte à renuméroter les composantes irréductibles R_i . On a donc $H^0(D', \mathcal{O}'_D) = \mathbb{C}$ et $H^1(D', \mathcal{O}'_D) = 0$. On a de plus sur D la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{R_1} \otimes \mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'} \rightarrow 0$$

On a donc, en utilisant le fait que $R_1 \simeq \mathbb{P}^1$, la suite exacte longue en cohomologie

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D) \rightarrow 0,$$

dont découle le premier point.

Pour le deuxième, on tensorise la suite exacte de faisceaux précédente par $\mathcal{O}(K + D)$, ce qui nous donne

$$0 \rightarrow \omega_{R_1} \rightarrow \omega_D \rightarrow L = \mathcal{O}_{D'} \otimes \mathcal{O}(K + D).$$

Soit s une section non nulle de ω_D , s se restreint donc en une section non nulle de L . Or, en utilisant la quatrième caractérisation des points doubles rationnels (proposition 28), on constate que L est isomorphe au faisceau structural sur D' (en effet, il vérifie $\text{deg}(L \otimes \mathcal{O}_{R_i}) = (D + D' + K).R_i = 0$). On en déduit que s engendre ω_D en tout point de D' . Comme s ne peut être partout nulle sur R_1 puisque R_1 intersecte D' , elle engendre également ω_D en tout point de R_1 (R_1 étant isomorphe à \mathbb{P}^1 , l'espace des sections de \mathcal{O}_{R_1} est isomorphe à \mathbb{C}). Finalement, toutes les sections de ω_D sont partout non nulles, donc on a le deuxième point.

Le troisième point s'obtient également en tensorisant la suite exacte introduite précédemment, cette fois-ci par $L = \mathcal{O}_Y(D')$. On obtient une nouvelle suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{R_1} \rightarrow \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathcal{O}_{D'} \otimes \mathcal{O}_Y(D')$$

et le même raisonnement montre que $L \otimes \mathcal{O}_D \simeq \mathcal{O}_D$. On en déduit que, si on enlève à D' les composantes incluses dans D , on obtient un diviseur trivial sur D , donc disjoint de D . On a donc $D' = E + D''$, où D'' est disjoint de D , et E est de la forme nD car $H^0(D, \mathcal{O}_D) = \mathbb{C}$. Le quatrième point est une conséquence immédiate du troisième. \square

Proposition 14. ([6], proposition 3.1.2) Soit D un diviseur indécomposable de type canonique sur Y , alors soit $|D|$ soit $|2D|$ est un système linéaire de dimension 1 sans point-base.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\dim|D| = 0$. Par la formule de Riemann-Roch, on a alors $H^1(Y, \mathcal{O}(D)) = 0$ (le seul terme non nul dépendant de D est $\dim H^0(Y, \mathcal{O}(D)) = 1$). En prenant la cohomologie de la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}(2D) \rightarrow \mathcal{O}_D(2D) \rightarrow 0,$$

on obtient alors

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}(2D)) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D(2D)) \rightarrow 0.$$

Or, comme $\omega_D \simeq \mathcal{O}_D$, on a $\mathcal{O}_D(D) \simeq \mathcal{O}(K)$, donc $\mathcal{O}_D(2D) \simeq \mathcal{O}_D$ (puisque $2K$ est équivalent au diviseur nul) et on en déduit que $H^0(Y, \mathcal{O}(2D)) \simeq \mathbb{C}^2$ ($H^0(D, \mathcal{O}_D) \simeq \mathbb{C}$ par le lemme précédent), autrement dit $\dim|2D| = 1$. Notons $|2D| = |M| + E$ la décomposition du système linéaire $|2D|$ en parties fixe et mobile. On a $D^2 = 0$ par hypothèse donc $M.D + E.D = 0$. Or $M.D \geq 0$ et $E.D \geq 0$ d'après le quatrième point du lemme précédent, donc on a en fait $M.D = 0$, dont on déduit $|M| = |2D|$ (d'après le troisième point du lemme précédent, M s'écrit alors $nD + D''$ avec D'' disjoint de D , donc $M = nD$, et $n = 2$ d'après la définition de M), c'est-à-dire que $|D|$ n'a pas de partie mobile, et comme $D^2 = 0$, il n'a donc pas non plus de point-base.

Dans le cas où $\dim|D| > 0$, on utilise la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}_D(D) \rightarrow 0,$$

qui nous donne en cohomologie

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}(D)) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}(D)) \rightarrow 0.$$

On a par ailleurs $\dim H^0(D, \mathcal{O}(D)) = \dim H^0(D, \mathcal{O}(K)) \leq \dim H^0(D, \mathcal{O}(2K)) = 1$ et par hypothèse $\dim H^0(Y, \mathcal{O}(D)) \geq 2$, on en déduit que ces deux dernières inégalités sont des égalités, en découle $\dim|D| = 1$, et la fin de la démonstration est identique à celle du premier cas. \square

Corollaire 2. Soit D un diviseur indécomposable de type canonique sur Y , alors $|D|$ ou $|2D|$ est de la forme $|kP|$ pour un entier $k \geq 1$, où $|P|$ est un pinceau elliptique.

Démonstration. Cet énoncé découle immédiatement du précédent, le fait que $|P|$ soit de genre 1 étant une simple conséquence de la formule d'adjonction. \square

Au vu des deux dernières propositions, et sachant qu'un pinceau de genre 1 nous donne une fibration elliptique sur la surface Y , il ne reste plus, pour démontrer le théorème, qu'à prouver qu'on peut obtenir soit un diviseur indécomposable de type canonique, soit directement un pinceau elliptique, à partir de la donnée de Y .

Définition 11. Une *courbe nodale* sur Y est une courbe rationnelle lisse R vérifiant $R^2 = -2$. On note $\mathcal{R}(Y)$ l'ensemble des classes de courbes nodales dans $\text{Num}(Y)$.

Théorème 11. ([6], théorème 3.2.1) Soit D un diviseur effectif sur Y tel que $D^2 \geq 0$ alors, on a $D = D' + \sum_{i=1}^r m_i R_i$ dans $\text{Pic}(Y)$, avec $\forall 1 \leq i \leq r, m_i \geq 0, R_i \in \mathcal{R}(Y)$ et l'un des cas suivants :

1. Le diviseur D' est de type canonique.
2. $D' = 2E + R$, où $|2E|$ est un pinceau de genre 1 et R une courbe nodale telle que $R.E = 1$.
3. D' est une courbe irréductible et $D^2 > 0$.

Démonstration. Le fait qu'on puisse écrire D sous la forme annoncée avec $D' \in \text{Num}^+(Y) = \{x \in \text{Num}(Y) \otimes \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\}$ est une conséquence du fait que $\mathcal{R}(Y)$ est un système de racines dans $\text{Num}(Y)$, que nous ne détaillerons pas (cf [6], paragraphe 2.2). Reste à vérifier que les éléments de $\text{Num}^+(Y)$ sont bien du type annoncé.

Si $D'^2 = 0$, en notant $D' = \sum n_i C_i$ sa décomposition en composantes irréductibles, on a toujours $C_i^2 \geq -2$ par la formule d'adjonction et, si $C_i^2 \geq 0$, on a $D'.C_i = n_i C_i^2 + \sum n_j C_j.C_i \geq 0$, et si $C_i^2 = -2$, ie $C_i \in \mathcal{R}(Y)$, on a aussi $D'.C_i \geq 0$. Comme $D'^2 = 0$, on en déduit que, $\forall i$, $D'.C_i = 0$, donc que D' est de type canonique.

Si $D'^2 > 0$, et en supposant que D' n'est pas irréductible (sinon on est dans le troisième cas), on a $|D'| \neq \emptyset$ puisque $\dim|D'| \geq \frac{1}{2}D'^2 > 0$ et on peut décomposer $|D'|$ en parties fixe et mobile en écrivant $|D'| = |M| + Z$. Si $|M|$ n'était pas irréductible, on aurait, en utilisant la proposition 15 (qui sera démontrée plus loin) et la proposition précédente, $|M| = |2kE|$, pour k un entier ≥ 2 et $|2E|$ un pinceau elliptique. Comme $D^2 \neq 0$ par hypothèse, et $M^2 = 4k^2 E^2 = 0$, on doit avoir $2E.Z \neq 0$ donc $k = \dim|D| \geq \frac{1}{2}(2kE + Z)^2 = 2kE.Z + \frac{1}{2}Z^2 \geq 2k - 1$, ce qui impliquerait $k = 1$ qui est absurde.

On a alors 2 possibilités : soit $M^2 > 0$ et on a, comme $|M|$ est sans point base, $\dim|M| = \frac{1}{2}M^2$, alors que $\dim|D| \geq \frac{1}{2}D^2$, donc $M^2 \geq D^2$. Or, $D^2 - M^2 = D.Z + M.Z \geq 0$, on en déduit que $D.Z = M.Z = 0$, puis que $Z^2 = 0$ puisqu'on a alors $M^2 = D^2 = (M + Z)^2 = M^2 + Z^2$. Mais on doit alors avoir $Z = 0$ sous peine de contredire le théorème de l'indice de Hodge. Dans le cas où $M^2 = 0$, c'est encore plus simple, puisque $|M|$ est alors un pinceau elliptique, et qu'on a $Z^2 \leq 2 - 4Z.E$ puisque $D^2 > 0$, ce qui implique $Z^2 = -2$ et $E.Z = 1$, donc on est dans le deuxième cas. \square

Ce théorème a un corollaire qui nous sera bien utile par la suite :

Corollaire 3. Tout diviseur effectif D sur une surface d'Enriques Y est linéairement équivalent à une somme de courbes irréductibles de genre 0 ou 1.

Démonstration. On peut toujours supposer $D^2 > 0$ et D irréductible par le théorème précédent. Par la proposition 10, on peut écrire D sous la forme $\sum n_i E_i$, avec $E_i^2 = 0$ et $E_i.E_j > 0$ pour $i \neq j$. On a $\forall i, D.E_i = \sum E_i.E_j > 0$, donc les diviseurs E_i sont effectifs. On peut leur appliquer le théorème précédent, et on constate alors que le corollaire est vrai pour E_i , donc pour D . \square

On peut maintenant finir la preuve du théorème 10 :

Démonstration. Si on part d'un diviseur effectif D vérifiant $D^2 = 0$ dans le théorème précédent, on est dans l'un des deux derniers cas. Dans le deuxième cas, on obtient un pinceau elliptique irréductible sur Y en utilisant la proposition 14 et le corollaire 2 ; le troisième cas nous donne immédiatement l'existence d'un pinceau elliptique. Il suffit donc de trouver un diviseur effectif isotrope. Or, $\text{Num}(Y)$ étant de signature $(1, 9)$, il contient des diviseurs isotropes par conséquence du principe de Hasse (toute forme quadratique réelle non définie à plus de 5 variables à un vecteur rationnel isotrope, cf [14], chapitre 6, Corollaire 1). Soit D un tel diviseur. On a par la formule de Riemann-Roch $\dim H^0(Y, \mathcal{O}(D)) + \dim H^0(Y, \mathcal{O}(K - D)) = 1 + \dim H^1(Y, \mathcal{O}(D)) \geq 1$ donc l'un des deux systèmes linéaires $|D|$ ou $|K - D|$ contient un diviseur effectif qui est isotrope, d'où le théorème. \square

1.5 Systèmes linéaires et modèles projectifs des surfaces d'Enriques

Le but de cette section est d'étudier en détail certains systèmes linéaires sur les surfaces d'Enriques (en particulier les systèmes de courbes elliptiques) pour donner des représentations géométriques sympathiques desdites surfaces via des modèles projectifs en petite dimension. Le chapitre 4 de [6] fait une étude exhaustive de tels modèles, ici, nous nous contenterons de retrouver le modèle original d'Enriques qui consiste en une sextique dans \mathbb{P}^3 passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Nous suivrons pour cela la démonstration de [2].

Commençons par rappeler quelques faits immédiats sur les diviseurs sur Y : Soit C un diviseur sur une surface d'Enriques Y . On a $C^2 = 2p_a(C) - 2$ par la formule d'adjonction, $\dim|C| \geq \frac{C^2}{2} = p_a(C) - 1$ par la formule de Riemann-Roch et $2C \sim 2(C + K)$, par la trivialité du diviseur $2K$.

Définition 12. Pour un système linéaire $|C|$ sur Y , on notera $|C'|$ et on appellera *système adjoint* le système linéaire $|C + K|$.

Proposition 15. Soit C une courbe elliptique irréductible sur Y , alors $|C'|$ est réduit à une courbe et si $C' \in |C'|$ est un diviseur effectif, on peut écrire $C' = D_1 + D_2$, avec D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs connexes disjoints tels que $D_1 = D_2 + K$ dans $\text{Pic}(Y)$. De plus, $2D_1$ et $2D_2$ appartiennent à $|C|$ et sont uniquement déterminés par ces conditions ; ils sont appelés *demi-fibres* de la fibration elliptique déterminée par $|C|$.

Démonstration. Par le théorème d'annulation de Ramanujam (qui s'applique bien ici puisque C est une courbe irréductible, donc est 1-connexe, et vérifie l'hypothèse supplémentaire par le théorème de Riemann-Roch), on a $H^1(Y, \mathcal{O}(C + K)) = 0$ donc, en appliquant le théorème de Riemann-Roch à C , $\dim|C| - \dim|C + K| = 1$, d'où le premier point.

Pour le second, commençons par remarquer que $C^2 = C.C' = 0$ par la formule d'adjonction car C est de genre 1. Or, si on prend un point quelconque sur C' , $|C|$ étant de dimension 1, il existe une courbe C_0 dans C passant par ce point, donc ayant une composante commune avec C' (puisque leur intersection est nulle), que nous noterons D_1 . On peut donc écrire $C_0 = D_1 + D$, $C' = D_1 + D'$, avec D et D' effectifs sans composante commune et $D' \sim D + K$ par définition de C' . Montrons maintenant que D et D' sont disjoints. On a, par irréductibilité de C , $C.D_1 \geq 0$ et $C.D \geq 0$ donc ces deux quantités sont nulles à cause de la nullité de $C^2 = C.C_0$. Or, on a $D.D' \geq 0$ car D et D' sont sans composantes communes, on en déduit $D_1.D = C_0.D - D^2 \leq 0$ et de même $D_1.C^2 \geq 0$. Mais l'intersection de D avec les composantes irréductibles de D_1 non incluses dans D est nulle, et son intersection avec les autres serait strictement positive s'il y en avait. La seule possibilité est donc d'avoir toutes les composantes de D_1 incluses dans D et $D_1.D = 0$, ce qui implique $D_1^2 = 0$. Symétriquement, on a $D_1.D' = 0$, et comme $C_0.C' = 0$, on en déduit $D.D' = 0$, donc D et D' n'ont pas de point commun.

Montrons ensuite que $D = D_1$. On a $\dim|D_1 - D| + \dim|D' - D_1| \geq 1$ en appliquant à nouveau Riemann-Roch, et de même $\dim|D - D_1| + \dim|D_1 - D'| \geq 1$. Or, $\dim|D' - D_1| = \dim|D_1 - D'| = 0$ car $|C'| = |D' + D_1|$ est réduit à une courbe, comme on l'a prouvé plus haut, donc ne peut contenir à la fois D' et D_1 . C'est donc que $\dim|D - D'| > 0$ et que $D \sim D'$ puisque tous les diviseurs considérés sont effectifs. Et comme $\dim|D_1| = 0$ puisque $C = D_1 + D$ est irréductible, on a bien $D_1 = D$. L'existence de D_1 et D_2 découle immédiatement de cette constatation, reste à prouver l'unicité. Or, si E est un diviseur effectif dans $|2C|$, on peut lui appliquer Riemann-Roch pour obtenir $\dim|D_1 - E| + \dim|E - D_2| \geq 1$, dont on déduit par les mêmes arguments que ci-dessus que $E = D_1$ ou $E = D_2$ suivant que c'est le premier terme ou le second qui est non nul, ce qui termine la démonstration. \square

Proposition 16. Soit $p : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique. Il existe une courbe C sur Y vérifiant $C.F = 2$ pour toute fibre F de p (on dit que C est une 2-section de p) et $C^2 \leq 0$.

Démonstration. Commençons par un lemme :

Lemme 4. Soit D_1 l'une des deux demi-fibres d'une fibration elliptique de S . Alors $\exists D_2 \in \text{Pic}(Y)$, $D_1.D_2 = 1$ et $D_2^2 = 0$.

Démonstration. Montrons que D_1 (qu'on confondra avec sa classe d'équivalence numérique) est primitif en tant qu'élément du réseau $\text{Num}(Y)$. Si ce n'est pas le cas, on a $D_1 = mD'_1$, où D'_1 est un autre diviseur effectif sur Y et m un entier strictement positif. La démonstration de la proposition 14 montre qu'on est dans le cas où $|D_1|$ est réduit à une courbe, et $2D_1$ étant une fibre de multiplicité 2 pour la fibration considérée, on a $m = 1$.

De la primitivité de D_1 découle l'existence de $D \in \text{Num}(Y)$ tel que $D.D_1 = 1$; en effet, le produit d'intersection avec D_1 est un morphisme de $\text{Num}(Y)$ dans \mathbb{Z} qui est bijectif par unimodularité de $\text{Num}(Y)$. En posant $D_2 = D - \frac{D^2}{2}D_1$, on obtient le résultat : $D_2.D_1 = D.D_1 - \frac{D^2}{2}D_1^2 = 1$ et $D_2^2 = D^2 - 2\frac{D^2}{2}D.D_1 = 0$. \square

Il suffit maintenant de poser $G = D_2 - D$ pour obtenir une 2-section (puisque D n'a que des composantes incluses dans les fibres, donc est d'intersection nulle avec une fibre). Supposons $G^2 \geq 2$. On a alors $\dim|G| \geq 1$, alors que $\dim H^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}(G)) = 1$ ce qui implique par le même raisonnement que lors de la précédente démonstration l'existence d'un diviseur $G_0 \in |G|$ contenant D_1 . On peut écrire $G_0 = D_1 + R + G'$ avec R ayant ses composantes incluses dans les fibres, et G' étant donc toujours une 2-section. On a alors $(G')^2 = (G - D_1 - R)^2 = G^2 - 2G.D_1 - 2G.R + (D_1 + R)^2$. Or, $G.D_1 = 1$, $G.R \geq 0$ puisque G est une 2-section, et $(D_1 + R)^2 \leq 0$ puisque ce diviseur est à support dans les fibres. On a donc $(G')^2 < G^2$ d'où la proposition par induction. \square

Remarque 5. Par la formule d'adjonction, les seules possibilités pour G sont en fait d'appartenir à $\mathcal{R}(Y)$ ou de vérifier $G^2 = 0$. Dans ce dernier cas, la proposition 14 implique que $|2G|$ est lui-même un pinceau elliptique, ce qui nous pousse à introduire la définition suivante :

Définition 13. Une surface d'Enriques Y est dite *spéciale* si elle a une fibration elliptique avec une 2-section C vérifiant $C^2 = -2$ (en particulier, si $\mathcal{R}(Y) = \emptyset$, Y est non spéciale).

Remarque 6. On peut reformuler la définition de la façon suivante : Y est spéciale s'il existe une courbe rationnelle R et un pinceau elliptique irréductible $|C|$ sur Y tels que $R.C = 2$ (puisque, par la formule d'adjonction, les courbes rationnelles sur Y sont celles vérifiant $R^2 = -2$).

On peut alors reformuler le résultat précédent ainsi :

Proposition 17. Sur une surface d'Enriques non spéciale Y , on peut trouver deux diviseurs effectifs D_1 et D_2 qui sont demi-fibres de fibrations elliptiques sur Y et vérifient $D_1^2 = D_2^2 = 0$, $D_1.D_2 = 1$. On appellera désormais un tel couple de diviseurs couple elliptique primitif.

C'est à partir de ce dernier résultat que nous allons construire des modèles de surfaces d'Enriques. Dans un premier temps, on va s'intéresser au cas des surfaces non spéciales et utiliser le résultat précédent.

Lemme 5. Soit (D_1, D_2) un couple elliptique primitif, $D'_1 = D_1 + K$ le diviseur adjoint de D_1 , D'_2 celui de D_2 , alors les courbes D_1, D_2, D'_1 et D'_2 sont irréductibles, et les systèmes linéaires $|D_1 + D_2|$ et $|D_1 + D'_2|$ sont irréductibles de dimension 1, avec exactement deux points-bases, respectivement $D_1 \cap D'_2$ et $D'_1 \cap D_2, D_1 \cap D_2$ et $D'_1 \cap D'_2$.

Démonstration. Montrons par exemple l'irréductibilité de D_1 . Comme $D_1.D_2 = 1$, D_1 ne peut avoir de composante multiple. Or, si D_1 contient plusieurs composantes irréductibles R_i (qui sont alors rationnelles), on a pour chacune d'elles $R_i.D_2 \geq 0$ car, le système linéaire $|2D_2|$ étant irréductible (cf proposition 15), on a $2R_i.D_2 \geq 0$. Or, Y étant supposée non spéciale, on ne peut avoir $2R_i.D_2 = 2$ donc $\forall i, R_i.D_2 \neq 1$, ce qui contredit alors $D_1.D_2 = 1$.

De l'irréductibilité de D_1 et D_2 découle que $|D_1 + D_2|$ n'a pas de composante fixe. On a de plus $(D_1 + D_2)^2 = 2$ puisque $D_1^2 = D_2^2 = 0$ et par hypothèse $D_1.D_2 = 1$. Il découle alors du lemme suivant que $|D_1 + D_2|$ est irréductible de dimension 1. Les courbes $D_1 + D_2$ et $D'_1 + D'_2$ appartenant au système (puisque $2K = 0$), l'assertion sur les points-bases en découle immédiatement. \square

Lemme 6. Soit $|C|$ un système linéaire de partie mobile $|D|$ tel que $p_a(C) > 1$, alors $|D|$ est irréductible et on a aussi $p_a(D) > 1$. Si $|C|$ est de plus irréductible, on a $\dim|C| = \dim|C'| = p_a(C) - 1$ et $|C'|$ est également irréductible.

Démonstration. Commençons par supposer $|C|$ sans composante fixe. Si $|C|$ était réductible, par le théorème de Bertini, on pourrait écrire $|C| = |nH|$, avec $H^2 \geq 1$ et $n > 1$, ce qui implique $\dim|C| = n \geq \frac{C^2}{2} = \frac{n^2}{2}H^2$. Or, sur Y , on ne peut avoir $H^2 = 1$, d'où une contradiction.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. D'après la première partie de la démonstration, il suffit de prouver $p_a(D) > 1$ pour obtenir l'irréductibilité du système linéaire $|D|$, puisque celui-ci est sans composante fixe. Supposons donc $p_a(D) = 1$. On peut toujours écrire $|D| = |nH|$, avec $n \geq 1$ et H est ici un pinceau irréductible de courbes de genre 1. Comme on a $C^2 > 0$ et $D^2 = 0$, la partie fixe Z du système $|C|$ est non nulle et vérifie $Z^2 \leq 2\dim|Z| = 0$, donc on a $C^2 - Z^2 = 2D.Z > 0$ et il existe une composante irréductible Z_0 de Z telle que $D.Z_0 > 0$. On a alors, si Z_0 est de genre 1, c'est-à-dire si $Z_0^2 = 0$, $H.Z_0 \geq 2$ (l'intersection étant forcément paire du fait de l'existence de demi-fibres, cf la proposition 15), et si Z_0 est rationnelle, c'est-à-dire si $Z_0^2 = -2$, on a même $H.Z_0 \geq 4$ puisqu'on est sur une surface non spéciale. Dans tous les cas, on a $2\dim|D| = 2\dim|D + Z_0| \geq 2n(H.Z_0) + (Z_0)^2 \geq 4n$, ce qui n'est guère cohérent avec la définition de n . Ceci démontre la première partie du lemme.

Pour la seconde partie, commençons par remarquer que, par le théorème de Ramanujam, on a $H^1(Y, \mathcal{O}(C')) = 0$, donc, $\dim|C'| = p_a(C') - 1 = p_a(C) - 1$. On peut écrire la décomposition $|C'| = |D| + Z$ du système $|C'|$ en parties mobile et fixe. On a alors $p_a(D) > 1$, comme on vient de le démontrer, et comme on a par ailleurs $p_a(D) - 1 \leq \dim|D| = \dim|C'|$, on en déduit $p_a(D) \leq p_a(C)$. Commençons par supposer $p_a(C) = 2$, on a alors également $p_a(D) = 2$, donc $C^2 = D^2 (= 2)$, et $2D.Z + Z^2 = 0$. On veut montrer que $Z = 0$. Or, on a $Z^2 \leq 2\dim|Z| \leq 0$ et si on avait $Z^2 < 0$ alors $D.Z > 0$ donc $D.Z + Z^2 < 0$, mais $D.Z + Z^2 = C.Z$, c'est absurde donc $Z^2 = 0$. Si $Z \neq 0$, on a par Riemann-Roch $\dim|Z + K| \geq 1$ (on a à nouveau $H^1(Y, \mathcal{O}(Z + K)) = 0$), donc il existe un diviseur effectif $Z' \sim Z + K$. Comme on a $2Z \sim 2Z'$, on en déduit $\dim|2Z| \geq 1$. On a également $D.Z = 0$, et le système $|D|$ est irréductible, donc il existe un diviseur Z_0 dans le système linéaire $|2Z|$ de la forme $D_0 + H$, avec $D_0 \in |D|$ et $H > 0$. Mais alors, comme $Z^2 = 0$, on a $2D.H + H^2 = D^2 > 0$ donc $(D + H).H < 0$ car $D.H \geq 0$ par irréductibilité de $|D|$. On a alors $(D + H).D = (D + H)^2 - (D + H).H > Z_0^2 = 0$ donc $D.Z > 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. On en déduit que, dans le cas où $p_a(D) = 2$, le système $|D| = |C'|$ est irréductible et on a alors $p_a(C) = 2$ en raisonnant comme au début de ce paragraphe.

On obtient maintenant par récurrence sur $p_a(C)$ l'égalité $p_a(C) = p_a(D)$. En effet, si $p_a(D) < p_a(C)$, on a $\dim|D| = p_a(D) - 1 < p_a(C) - 1 = \dim|C'|$, d'où l'égalité par récurrence. Une fois qu'on a cette égalité, le raisonnement du paragraphe précédent s'applique pour montrer que $|C'|$ est irréductible, et on conclut de la même façon. \square

Théorème 12. Toute surface d'Enriques non spéciale admet pour modèle un plan double dont le lieu de ramification est un diviseur de degré 8 composé d'une courbe de degré 6 et deux droites.

Démonstration. Considérons le système linéaire $|C| = |D_1 + D_2 + D'_1|$, où (D_1, D_2) est un couple elliptique primitif. Ce système est sans composante fixe et vérifie $C^2 = (2D_1 + D_2)^2 = 4$

(puisque K est numériquement équivalent à 0), donc $\dim|C| = 2$ et $p_a(C) = 3$ d'après le lemme précédent. Les courbes $D_1 + D_2 + D'_1$, $2D_1 + D'_2$ et $2D'_1 + D'_2$ appartiennent à C et l'engendrent, puisque par exemple les courbes $2D_1 + D'_2$ et $2D'_1 + D'_2$ engendrent le pinceau $|2D_1| + D'_2$, auquel $D_1 + D'_1 + D'_2$ n'appartient pas. Ainsi, les points $D_1 \cap D'_2$ et $D'_1 \cap D'_2$ (ces deux intersections sont réduites à un point à cause de l'hypothèse $D_1.D_2 = 1$) sont points-bases du système puisqu'ils appartiennent à ces trois courbes, et il ne peut y en avoir d'autres, puisque tout point-base appartient en particulier à D'_2 et que $C.D'_2 = 2D_1.D - 2 = 2$. Le système C définit donc une application $Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ qui identifie birationnellement Y à un plan double d'équation $z^2 = P(x, y)$. Le polynôme P est de degré 8 car, en notant $1, x, y$ une base de l'espace $L(C_0)$ (où C_0 est une courbe irréductible appartenant à C), tous les diviseurs de type $\{ax + by + c = 0\}$ sont de genre 3 puisqu'ils appartiennent à C . De plus, les images des points $D_1 \cap D'_2$ et $D'_1 \cap D'_2$ étant des droites, la courbe de ramification se décompose en deux droites et une courbe de degré 6, d'où le théorème. \square

On peut énoncer et démontrer un énoncé similaire pour les surfaces d'Enriques spéciales, ce que nous allons d'ailleurs faire immédiatement :

Théorème 13. *Toute surface d'Enriques spéciale Y admet pour modèle un plan double avec pour lieu de ramification un diviseur de degré 8 composé d'une courbe de degré 6 et deux droites.*

Démonstration. Le principe de la preuve est de trouver un système linéaire jouant le même rôle que $|D_1 + D_2 + D'_1|$ dans le cas des surfaces non spéciales. Pour cela, considérons un pinceau elliptique irréductible L sur Y et une courbe rationnelle Z vérifiant $L.Z = 2$ (une telle courbe existe par définition sur une surface spéciale). On va tout d'abord s'intéresser au système linéaire $|D| = |L + Z + K|$. Par le théorème de Ramanujam, on a $H^1(Y, \mathcal{O}(D)) = 0$, dont on déduit (en utilisant Riemann-Roch comme d'habitude) que $\dim|D| = \frac{D^2}{2} = \frac{(L+Z)^2}{2} = 2 - 1 = 1$.

On va désormais montrer que le système linéaire $|D|$ est irréductible. Pour cela, décomposons-le en parties mobile et fixe : $|D| = |E| + F$. On a $L.D = 2$ et $L.F \geq 0$, $L.E \geq 0$ puisque L est irréductible. Si on avait $L.E = 0$, on aurait $L = |E|$ (les deux systèmes sont de dimension 1) donc $F \sim Z + K$. Ceci implique que Z et F ont une composante commune puisque $p_a(Z) = \frac{Z.Z'}{2} + 1 = 0$, mais alors, Z étant irréductible, $F - Z$ est un diviseur effectif équivalent à K , ce qui est absurde. On en déduit que $L.E > 0$ et $L.E$ étant pair par conséquence de l'existence de demi-fibres (proposition 15), la seule possibilité est d'avoir $L.E = 2$ et donc $L.F = 0$. De même, on a $D.Z = 0$ et $E.Z \geq 0$ (Z n'appartient certainement pas à F sinon on aurait $\dim|D| = \dim|L'| = 0$ d'après la proposition 15), $F.Z \geq 0$ dont on déduit $E.Z = F.Z = 0$. On a donc $E.D = E^2 + E.F = E.(L + Z) = 2$ et $F.D = F^2 + F.E = 0$. Comme on ne peut avoir $E^2 = 0$, sinon $|E|$ serait un pinceau elliptique et devrait avoir une intersection paire avec le diviseur effectif $L/2$ (demi-fibre du pinceau L), on a nécessairement $E^2 = 2$, $F^2 = E.F = 0$. Comme le diviseur $L/2 + L'/2 + Z$ est dans D et que F ne contient pas Z , F est contenue dans $L/2 + L'/2$. Or, ces deux diviseurs sont connexes non irréductibles, d'autointersection nulle, donc ne peuvent contenir de composantes d'autointersection nulle. Comme ils sont de plus sans point commun, on en déduit que $F = 0$, donc $|D|$ est bien irréductible. De plus, il a exactement deux points-bases : si D_0 est une courbe irréductible du système $|D|$, $D_0 \cap L/2$ et $D_0 \cap L'_2$ appartiennent également à la courbe $L/2 + L'/2 + Z$ et sont les seuls puisque $D.(L/2 + L'/2 + Z) = 2$.

Le système qui va vraiment nous intéresser est en fait $|C| = |D + L/2|$. On a $C^2 = 4$ donc $\dim|C| \geq 2$, mais d'autre part, comme $(D+L)^2 = 6$ et $H^1(Y, \mathcal{O}(D+L)) = 0$ (par Ramanujam, car $|D+L| = |2L+Z+K|$), on a $\dim|D+L| = 3$. Or, on a clairement $\dim|C| < \dim|D+L|$, donc $\dim|C| = 2$. Le système C contient les deux sous-systèmes $|D| + L/2$ et $|L| + Z + L'/2$ de dimension 1, qui n'ont pas de composante commune et s'intersectent aux deux points $D_0 \cap L'/2$

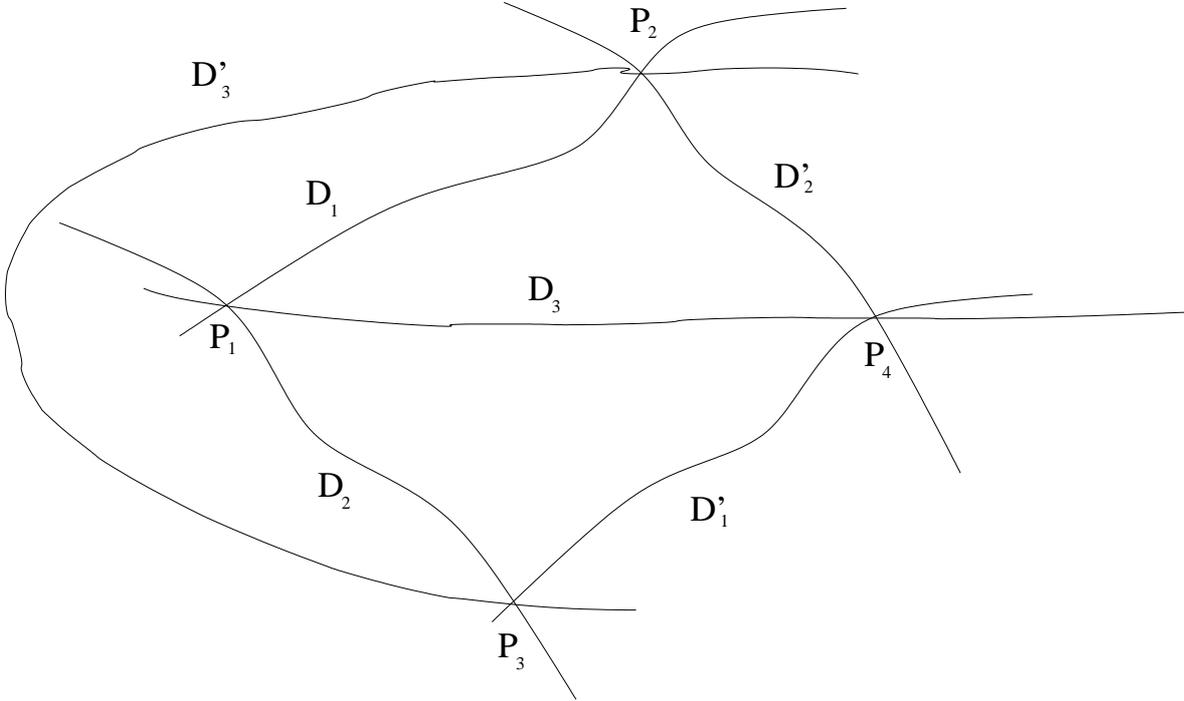
et $L/2 \cap Z$. Ce système a donc toutes les bonnes propriétés et on peut terminer la démonstration comme dans le cas des surfaces non spéciales. \square

Remarque 7. Une étude un peu plus poussée de la géométrie de la courbe de ramification obtenue dans les représentations précédentes permet de montrer que les surfaces d'Enriques spéciales occupent un espace de dimension au plus 9 dans l'espace des modules de surfaces d'Enriques, qui est de dimension 10 (cf [2], Appendice, paragraphe 2). Ceci permet de justifier la terminologie de surface spéciale, les surfaces non spéciales étant d'ailleurs également appelées *surfaces d'Enriques générales*.

1.6 Le théorème de représentation d'Enriques

Nous allons maintenant démontrer le théorème de représentation d'Enriques pour les surfaces générales. Pour ce faire, nous aurons besoin non plus d'un couple elliptique primitif, mais d'un triplet de courbes qui sont toutes demi-fibres de fibrations elliptiques sur Y (on dira simplement dans ce cas que la courbe est une demi-fibre sur Y) et qui ont de bonnes propriétés d'intersection. Nous allons donc effectuer une étude détaillée de tels systèmes de demi-fibres, suivant toujours [2], chapitre X.

Lemme 7. Soit (D_1, D_2) un couple elliptique primitif, alors les courbes D_1, D_2, D'_1 et D'_2 forment un quadrilatère (tous les produits d'intersection étant égaux à 1) dont on notera les sommets $P_1 = D_1 \cap D_2, P_2 = D_1 \cap D'_2, P_3 = D'_1 \cap D_2$ et $P_4 = D'_1 \cap D'_2$. Si D_3 est une autre demi-fibre passant par un de ces points et vérifiant $D_3 \cdot D_1 = D_3 \cdot D_2 = 1$, alors on a $D_3 + E \sim D_1 + D_2 + \epsilon K$, avec $\epsilon = 0$ ou 1 , et E effectif tel que $D_1 \cdot E = D_2 \cdot E = 0$. La courbe D_3 est alors une diagonale du quadrilatère considéré et D'_3 est son autre diagonale.



Démonstration. Supposons par exemple que D_3 passe par le point P_1 . Les diviseurs $D_3 \cdot D_2$ et $D_1 \cdot D_2$, considérés comme diviseurs sur D_2 , sont alors les mêmes. On a donc $H^0(D_2, \mathcal{O}(D_3 - D_1 |_{D_2})) = \mathbb{C}$. Or, on a sur Y la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D_3 - D_1 - D_2) \rightarrow \mathcal{O}(D_3 - D_1) \rightarrow \mathcal{O}(D_3 - D_1 |_{D_2}) \rightarrow 0,$$

dont on déduit en passant à la cohomologie et en utilisant ce qui précède que $\dim H^1(Y, \mathcal{O}(D_3 - D_1 - D_2)) \geq 1$. La formule de Riemann-Roch pour $D_3 - D_2 - D_1$ s'écrit alors $\dim H^0(Y, \mathcal{O}(D_1 + D_2 + K - D_3)) = \dim H^1(Y, \mathcal{O}(D_3 - D_1 - D_2)) + 1 + \frac{(D_3 - D_1 - D_2)^2}{2} \geq 1$ puisque $(D_3 - D_1 - D_2)^2 = 0 + 0 + 0 - 2 - 2 + 2 = -2$. L'existence de E est donc prouvée et on a alors $E.D_1 = D_1^2 + D_2.D_1 + K.D_1 - D_3.D_1 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$ d'après les diverses hypothèses.

Le point P_4 est un point-base du système linéaire $|D_1 + D_2 + K|$ puisque par définition, il appartient à $D_1' + D_2$ et à $D_1 + D_2'$ et que le système est de dimension 1 (cf proposition 5). Il est donc sur la courbe $D_3 + E$ d'après la définition de E mais certainement pas sur E qui n'intersecte pas D_1' et D_2' . Il est donc sur la courbe D_3 qui est bien une diagonale du quadrilatère. Le fait que D_3' est une diagonale opposée découle de même de la relation $D_3' + E \sim D_1 + D_2$. \square

Le but du dernier lemme (la démonstration est assez longue et technique, mais il y a plusieurs cas à éliminer pour montrer qu'on peut trouver un système linéaire ayant exactement les bonnes propriétés) sera de trouver trois demi-fibres D_1, D_2, D_3 vérifiant $D_i.D_j = 1 - \delta_{i,j}$ et telles que D_3 ne passe pas par un des sommets du quadrilatère défini par D_1, D_2, D_1' et D_2' , le but étant d'obtenir la dernière figure de la démonstration du lemme 8. Une fois ceci obtenu, il n'est pas bien difficile de vérifier le théorème, ce que nous allons faire avant de prouver le lemme technique.

Théorème 14. *Toute surface d'Enriques non spéciale est birationnellement équivalente à une surface de degré 6 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ ayant des points doubles sur les arêtes d'un tétraèdre.*

Démonstration. Considérons donc le système linéaire $|C| = |D_1 + D_2 + D_3|$, où D_1, D_2, D_3 est un triplet de courbes elliptiques qui nous sera donné par le lemme suivant. On a $C^2 = 3 * 2 = 6$ d'après les hypothèses, et comme $|C|$ contient par exemple le système $|D_1 + D_2|$ qui n'a pas de composante fixe et la courbe irréductible D_3 , il est certainement sans composante fixe, donc irréductible par le lemme 6, et vérifie donc $\dim |C| = 3$. De plus, $|C|$ n'a pas de point-base. En effet, supposons par exemple qu'il ait un point-base P sur D_3 (comme $D_1 + D_2 + D_3 \in |C|$ et que les trois courbes elliptiques jouent un rôle symétrique, on peut faire cette supposition). Alors, comme $D_1 + D_2' + D_3' \in |C|$, on a $P \in D_2' \cup D_1$. Mais si $P \in D_2'$, $P \in D_1'$ car $D_1' + D_2 + D_3' \in |C|$; dans le second cas, on a de même $P \in D_2$. Or, les intersections $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ et $D_1' \cap D_2' \cap D_3$ sont vides par hypothèse, c'est donc que le système $|C|$ n'a pas de point-base.

Comme $C^2 = 6$ et que $|C|$ n'a pas de point-base, le degré de l'application ϕ qu'il définit de Y vers \mathbb{P}^3 divise 6. Or, si on considère les deux sous-systèmes $|D_1 + D_2| + D_3$ et $D_1 + |D_2 + D_3|$, on constate qu'ils sont de dimension 1, avec deux points-bases explicites (cf le lemme 5) et sans point commun. Soient Z_1 et Z_3 deux courbes dans ces sous-systèmes linéaires, on a $(Z_1 + D_3).(Z_3 + D_1) = 6$, et sur ces six points, trois sont sur Z_1 et Z_3 , les trois autres sur D_1 et D_3 . Or, on peut toujours choisir Z_3 de façon que les points sur Z_1 ne soient pas envoyés par ϕ sur les mêmes points que ceux de $D_1 \cup D_3$. On en déduit alors que le degré de ϕ ne peut être que 1 ou 3. De même, les sous-systèmes $|C|$ et $|D_1 + D_2| + D_3$ n'ont pas de point commun et sont d'intersection 4, on en déduit que le degré de ϕ divise également 4, donc est en fait 1, c'est-à-dire que ϕ est une application birationnelle.

Le tétraèdre annoncé est naturellement formé par les images des courbes D_i et D_i' : en effet, les courbes $D_1 + D_2 + D_3$ et $D_i + D_j' + D_k'$ appartenant au système, leur image par ϕ est un plan, et les intersections de ces plans sont bien de dimension 1, car aucune des courbes n'est contractée par ϕ puisque $C.D_i > 0$. L'image de Y passe bien deux fois par chacune des 6 droites : en effet, la restriction de ϕ à D_1 , par exemple, est de degré au plus 2 puisque $C.D_1 = 2$, mais n'est certainement pas de degré 1 puisqu'elle envoie une courbe elliptique sur une droite. De plus, les six droites forment bien un tétraèdre : en effet, imaginons par exemple que $P \in D_1$ et $Q \in D_2$ aient la même image par ϕ , alors la courbe $D_1' + D_2 + D_3'$, qui appartient à $|C|$

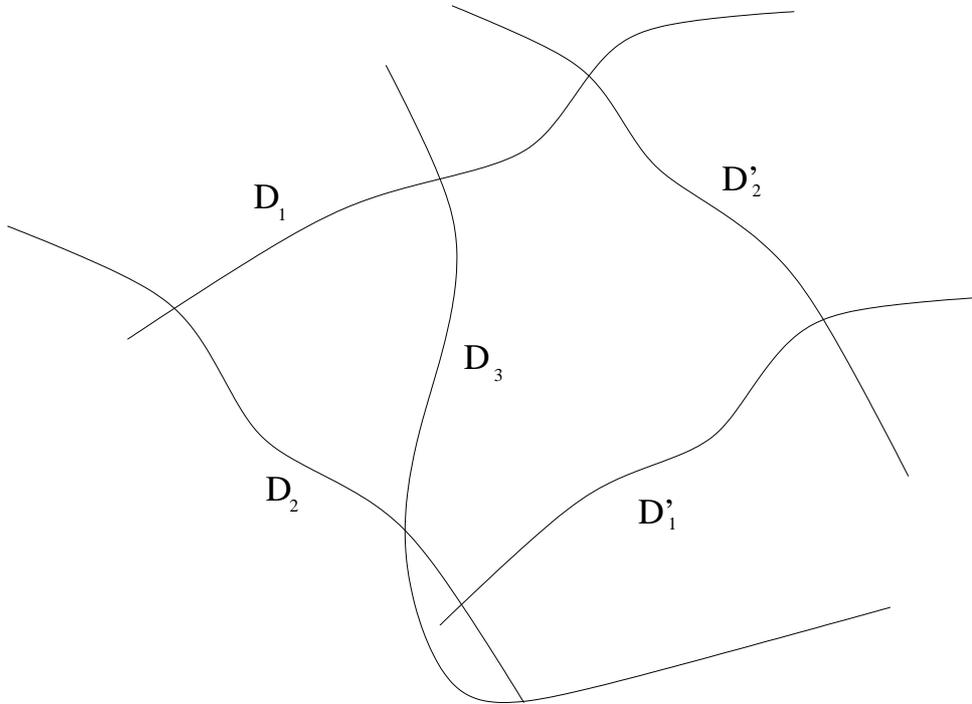
et passe par Q , devrait passer par P , mais ses seules intersections avec D_1 sont $D_1 \cap D'_3$ et $D_1 \cap D_2$. Ceci suffit à conclure la démonstration du théorème. \square

Remarque 8. Le nombre de telles représentations pour une surface d'Enriques donnée peut se calculer explicitement en utilisant le groupe d'automorphismes de la surface, ce que nous verrons plus en détail dans la section suivante.

Lemme 8. Il existe sur Y un triplet de demi-fibres D_1, D_2, D_3 telles que $D_i \cdot D_j = \delta_{i,j}$ et D_3 ne passe par un des sommets du quadrilatère formé par D_1, D_2, D'_1 et D'_2 .

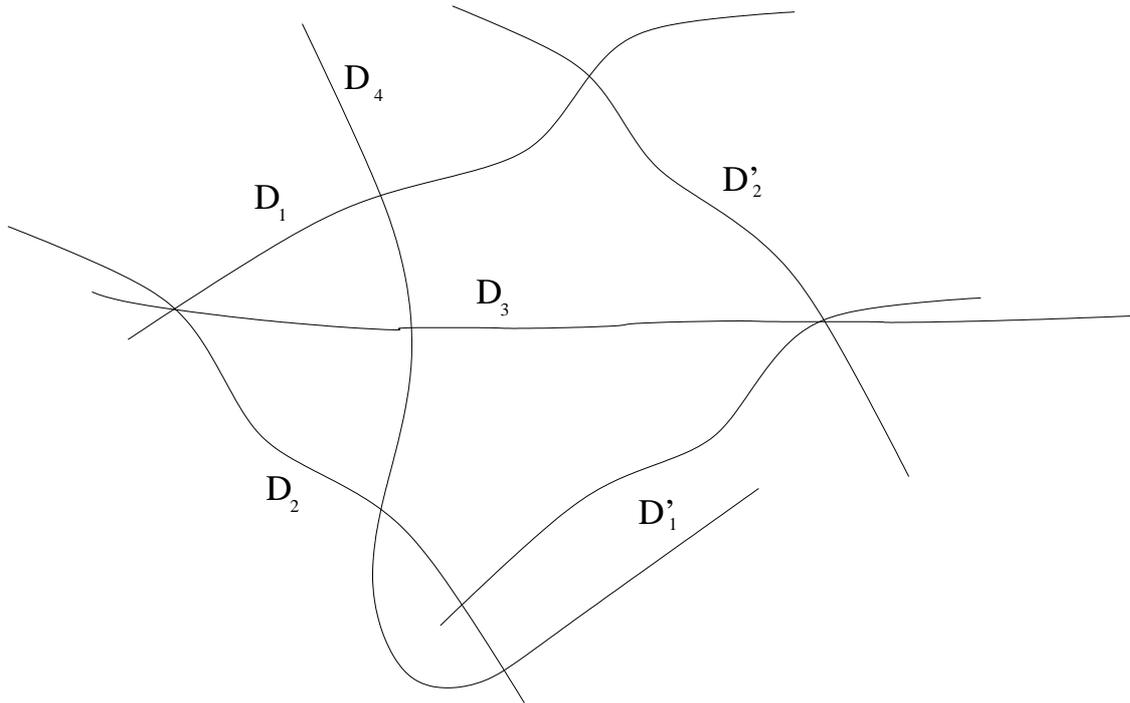
Démonstration. La preuve est assez longue et se découpe en plusieurs étapes bien distinctes. Des figures sont insérées à la fin de chaque étape pour préciser ce qui a été démontré à l'étape précédente.

Commençons par prouver l'existence d'une demi-fibre distincte de D_1, D_2, D'_1 et D'_2 . En fait, on va montrer que, si une telle courbe n'existait pas, tout diviseur sur Y serait linéairement équivalent à un diviseur de la forme $mD_1 + nD_2$, ce qui est clairement absurde puisqu'on sait que $Pic(Y)$ contient \mathbb{Z}^{10} . Pour cela, en utilisant le corollaire 3 (on utilise en fait la formulation suivante de ce corollaire : tout diviseur effectif est équivalent à une somme de deux demi-fibres et d'un diviseur effectif, forme montrée dans [2] c'est sous cette forme qu'on l'utilisera dans cette démonstration), il suffit de montrer que, sous cette hypothèse, il n'y a pas de courbe rationnelle irréductible sur Y . Soit donc E une telle courbe. Si $D_1 \cdot E = 0$, la courbe E est une composante d'un diviseur du système linéaire $|2D_1|$, lequel diviseur a donc toutes ses composantes rationnelles, et l'une d'entre elles a alors une intersection positive avec D_1 ou D_2 . On peut donc supposer $D_1 \cdot E > 0$ (donc $D_1 \cdot E \geq 2$), donc $p_a(D_1 + E) > \frac{(D_1 + E)^2}{2} \geq 1$. Le système linéaire $|D_1 + E|$ est irréductible, et en lui appliquant le corollaire 3, on voit que $D_1 + E \sim H_1 + H_2 + G$, où G est un diviseur effectif et H_1, H_2 des demi-fibres différentes de D_1, D'_1, D_2 et D'_2 , d'où la première étape.



On va maintenant montrer que, en supposant que la D_3 précédemment exhibée a les bonnes propriétés d'intersection avec les autres demi-fibres (ie $D_i \cdot D_j = 1 - \delta_{i,j}$), mais passe par un des sommets du quadrilatère, on peut trouver une quatrième demi-fibre D_4 distincte des

trois précédentes. D'après le lemme 7, il existe dans ce cas des diviseurs effectifs E_i tels que $D_i + E_i \sim D_j + D_k$ (pour i, j, k distincts valant 1, 2 et 3) et $D_i.E_j = 0$ si $i \neq j$. On a donc $E_i.D_i = D_i.(D_j + D_k) = 2$ et $E_i^2 = -E_i.D_i = -2$, donc les diviseurs E_i contiennent une composante rationnelle; mais comme E_i est une composante d'un élément du pinceau $|2D_j|$ pour $i \neq j$ (car $E_i.D_j = 0$), toutes ses composantes sont en fait rationnelles. Soit F_i sa composante vérifiant $F_i.D_i > 0$. Par le corollaire 3 il existe un couple de demi-fibres H_1, H_2 et un diviseur effectif G tels que $F_i + D_i \sim H_1 + H_2 + G$. Maintenant, soit H_1 est une nouvelle demi-fibre, soit on peut réécrire ce qui est ci-dessus comme $F_i \sim E_i + G + \epsilon K$, avec en fait $\epsilon = 0$ car $\epsilon = 1$ est exclu par un argument vu dans la démonstration du théorème 13. Ceci n'est possible que si $E_i = F_i$, c'est-à-dire si E_i est une courbe irréductible. (Remarquons que, s'il existe sur Y une courbe rationnelle irréductible E différente des E_i telle que $E.D_i > 0$, on peut conclure de la même façon.) Dans ce cas, on peut certainement trouver, à cause de la dimension de $Num(Y)$, soit une nouvelle-demi-fibre, soit une autre courbe rationnelle E qu'on peut alors supposer d'intersection nulle avec les D_i d'après la remarque précédente. On a alors par exemple $(D_1 + D_2 - E)^2 = 0$, donc $dim|D_1 + D_2 - E| > 0$ et on peut trouver, par le corollaire 3, un diviseur D_4 qui a pour composantes des courbes rationnelles irréductibles et des demi-fibres, et tel que $D_4 \sim D_1 + D_2 - E$. Or, D_1, D'_1, D_2, D'_2 et E_3 ne peuvent être composantes de D_4 sinon on aurait un diviseur effectif équivalent à un diviseur de la forme $D_i - E$ (ou $D'_i - E$), ce qui n'est pas possible car les systèmes linéaires correspondants sont vides. Comme $D_4.D_3 = 2$, soit D_4 contient une demi-fibre convenable, soit une courbe rationnelle F telle que $F.D_3 > 0$ et on peut conclure comme précédemment.



On va maintenant montrer qu'à partir d'une troisième demi-fibre D qui vérifierait $D.D_1 = a$, $D.D_2 = b$, avec $a \geq b$ et $a > 1$, on peut trouver quatre demi-fibres H_1, H_2, H_3, H_4 telles que $H_i.H_j = 1 - \delta_{i,j}$ (sauf pour $H_3.H_4$ qui n'a pas d'importance). On va procéder par récurrence descendante sur a et b . Par le corollaire 3, on peut trouver un diviseur effectif E et deux demi-fibres L_1 et L_2 non incluses dans D ou D_1 telles que $D + D_1 \sim L_1 + L_2 + E$. On a $L_1.D_1 + L_2.D_1 = a - E.D_1$ et $L_1.D_2 + L_2.D_2 = b + 1 - E.D_2$. Or, $L_1.D_1, L_2.D_1, L_1.E$ et $L_2.E$ sont tous strictement positifs, car si par exemple $L_1.D_1 = 0$, on a nécessairement $L_1 = D_1$ ou

$L_1 = D'_1$ en utilisant la fin de la démonstration de la proposition 15, donc $D = L_2 + E$ (ou $D = L'_2 + E$), ce qui n'est possible que si $E = 0$, et cela contredirait notre choix de L_1 et L_2 . Ceci implique que $L_1.D_1 < a$, $L_2.D_1 < a$, $L_1.D_2 \leq b$ et $L_2.D_2 \leq b$. Si les courbes L_1 et L_2 sont toutes deux distinctes de D_2 et D'_2 , on a $L_1.D_2 \leq b$ et $L_2.D_2 \leq b$ et on peut continuer la récurrence. Pour la suite de la démonstration, on supposera donc $L_2 = D_2$, ce qui implique $L_1.D_1 \leq a - 1$.

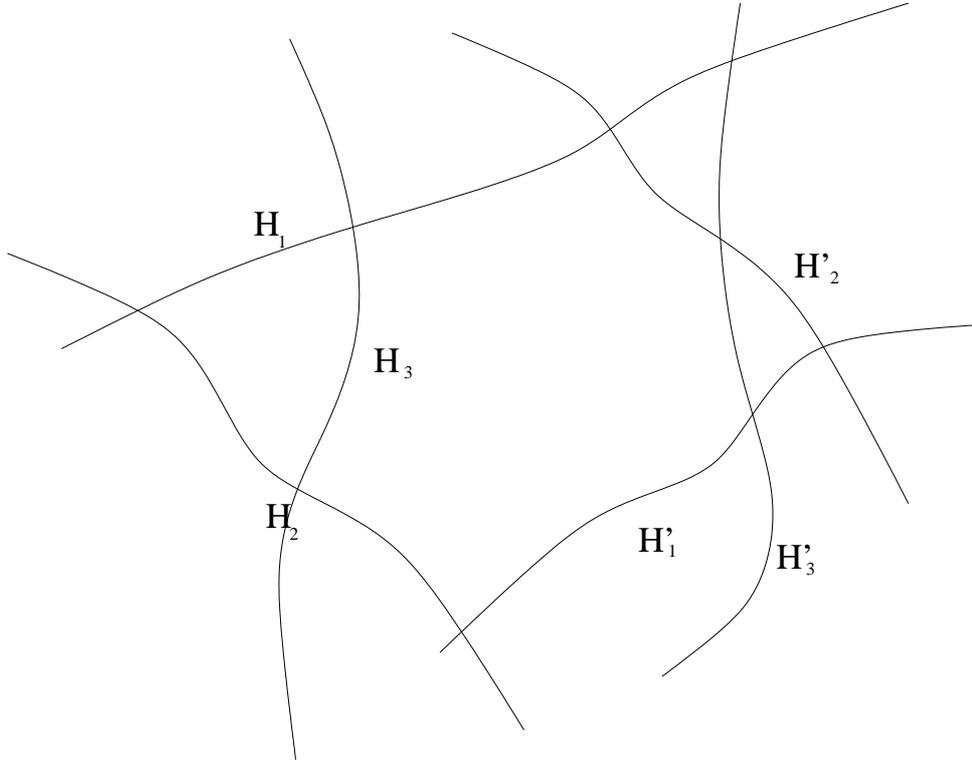
Si par malheur $L_1.D_1 = L_1.D_2 = 1$, on peut écrire $D + D_1 \sim rL_1 + sD_2 + E_1 + \epsilon K$ de façon que E_1 soit effectif mais $E_1 - L_1$, $E_1 - L'_1$, $E_1 - D_2$ et $E_1 - D'_2$ ne soient pas équivalents à un diviseur effectif (il suffit de prendre r et s juste assez gros). Si on a par exemple $L_1.E_1 > 0$, soit F une composante de E_1 vérifiant $F.L_1 > 0$, en appliquant le corollaire 3 au diviseur $L_1 + F$, on obtient $L_1 + F \sim M_1 + M_2 + G$. Par le choix de E_1 et donc de F , M_1 et M_2 ne peuvent être tous deux inclus parmi D_1, D_2 et M_1 et on alors ce qu'on veut en posant $H_1 = D_1$, $H_2 = D_2$, $H_3 = L_1$ et $H_4 = M_1$.

On peut donc supposer $E_1.D_2 = E_1.L_1 = 0$, on a alors $E_1^2 = D.E_1 + D_1.E_1 \geq 0$ par la définition de E_1 . Or, pour que les systèmes linéaires $|E_1 - D_2|$ et $|E_1 - L_1|$ soient vides, il faut avoir par exemple $(E_1 - D_2)^2 \leq 0$, donc $E_1^2 \leq 0$. On en déduit que $D_1.E_1 = D.E_1 = 0$, mais alors on a $D.D_1 = r + s$ en intersectant avec D_1 l'équivalence définissant E_1 , et $D.D_1 = rs$ en élevant au carré cette même équivalence, donc $r = s = 2$ et $D.L_1 = D.D_2 = 0$. On peut alors choisir $H_1 = D_2$, $H_2 = L_1$, $H_3 = D_1$ et $H_4 = D$.

On peut donc supposer désormais que $L_1.D_1$ ou $L_1.D_2$ est strictement supérieur à 1. Posons $a_1 = L_1.D_1$, $b_1 = L_1.D_2$; on peut toujours décider par ailleurs que $L_1.D_1 + L_1.D_2 \geq L_2.D_1 + L_2.D_2$. Si $a > b + 1$, $a > \max(a_1, b_1)$ et $a_1 + b_1 \leq a + b$. On reprend alors le processus en remplaçant D par L_1 et en inversant éventuellement D_1 et D_2 pour rester dans les conditions imposées en début de démonstration. Le maximum des indices d'intersection est alors strictement inférieur au précédent, sauf dans un dernier cas : $a = b$ ou $a = b + 1$ et $E.D_1 = E.D_2 = 0$. Dans ce cas, $E^2 = (D + D_1 - L_1 - D_2)^2 = 2(a - D.L_1 - b - (a - 1) + (b + 1) - 1) = 2 - 2D.L_1$. D'autre part, $D.D_1 = a = D.L_1 + b + E.D$ par définition de E , avec $E.D \geq 0$ et $D.L_1 > 0$ par construction de L_1 . On en déduit que $a = b + 1$, et $D.L_1 = 1$, puis $E^2 = 0$. Mais si E est non nul, puisque $E.D_1 = 0$, il doit être constitué de composantes de diviseurs du pinceau elliptique $|2D_1|$, et comme on a $D_1.D_2 = 1$ mais $E.D_2 = 0$, toutes ces composantes sont propres. Ceci n'est pas compatible avec $E^2 = 0$, donc $E = 0$ et $D + D_1 \sim L_1 + D_2$. On peut alors trouver une courbe dans le système linéaire $|2D + 2D_1| = |2L_1 + 2D_2|$ qui se décomposera en deux nouvelles demi-fibres par le corollaire 3 et on peut continuer le processus avec ces autres demi-fibres (on n'aura plus la condition $L_2 = D_2$ donc cette fois, on fera une véritable étape dans la récurrence).

Enfin, reste à démontrer qu'à partir de nos quatre demi-fibres précédentes, on peut en trouver trois autres qui vérifient les hypothèses du lemme. On peut toujours supposer que H_3 et H_4 passent par les mêmes sommets du quadrilatère (quitte à prendre les adjoints). Il existe des diviseurs effectifs E_3, E_4 tels que $H_3 + E_3 \sim H_1 + H_2 \sim H_4 + E_4$, et on a donc $H_3.H_4 = 2$ ($H_3.H_4 \geq 2$ puisque les deux diviseurs ont pour points communs deux sommets du quadrilatère) et $H_3.E_4 = E_3.H_4 = 0$. Par le corollaire 3 appliqué à une courbe dans le système $|2H_3 + 2H_4|$ et distincte de $H_3 + H'_3 + H_4 + H'_4$, on peut trouver deux nouvelles demi-fibres H_5, H_6 et un diviseur effectif E tels que $H_3 + H_4 \sim H_5 + H_6 + E$ et H_5 et H_6 sont différents de H_3, H'_3, H_4 et H'_4 . On a alors $H_3.E \geq 0$ et $H_3.H_5 \geq 1$, $H_3.H_6 \geq 1$, donc ces trois inégalités sont des égalités, et on a la même chose avec H_4 . De plus, les diviseurs H_5 et H_6 ne peuvent pas être tous deux contenus dans un diviseur parmi H_1, H_2, H'_1 ou H'_2 sinon on aurait $H_3 + H_4 \sim H_1 + H_2 + \epsilon K + E$, avec $\epsilon = 0$ ou 1 et E effectif, donc $H_3 \sim E + E_3 + \epsilon K$, ce qui n'est pas possible pour la demi-fibre H_3 . On peut donc supposer que H_5 est distinct des diviseurs cités, puis que $H_5.H_1 = 1$ puisque $H_5.(H_1 + H_2) = H_5.H_3 + H_5.E_3 \geq 1$. Dans ce cas, les trois demi-fibres H_1, H_3 et H_5 vérifient les conditions voulues (en effet, H_5 ne peut pas être

une diagonale du quadrilatère défini par H_1, H'_1, H_3 et H'_3 , qui est le même que le précédent, puisque $H_5.H_3 = 1$).



□

1.7 Automorphismes des surfaces d'Enriques

Le but de cette section est d'étudier le groupe des automorphismes de surfaces d'Enriques, et plus particulièrement de calculer le nombre de réalisations géométriques non isomorphes d'une surface d'Enriques donnée sous les formes étudiées dans les sections précédentes. La principale référence pour toute section est l'article [20]. Nous allons commencer par quelques définitions en rapport avec la théorie des périodes sur les surfaces d'Enriques que nous ne détaillerons pas ici.

Définition 14. Soit S une surface (complexe et projective). L'ensemble $\{x \in H^{1,1}(S, \mathbb{R}) = H^2(S, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(S) \mid x^2 > 0\}$ est composé de deux cônes disjoints (en effet, la forme d'intersection est hyperbolique sur cet espace). L'un de ces deux cônes contient des classes de diviseurs amples, nous le noterons désormais \mathcal{C}_S .

Définition 15. On notera $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ l'image de $H^2(S, \mathbb{Z})$ dans $H^2(S, \mathbb{R})$, c'est-à-dire $H^2(S, \mathbb{Z})$ quotienté par sa torsion; on notera également $A_S = H^{1,1}(S, \mathbb{R}) \cap H^2(S, \mathbb{Z})_f$ et $T_S = A_S^\perp \subset H^2(S, \mathbb{Z})_f$. Enfin, on notera $\mathcal{C}_S^+ = \{x \in \mathcal{C}_S \mid \forall d \in \mathcal{R}(S), x.d > 0\}$ (où $\mathcal{R}(S)$ désigne comme précédemment les classes de courbes nodales sur S).

Le but du lemme suivant est de définir des éléments dans $O(H^2(S, \mathbb{Z}))$ ayant des propriétés permettant de les identifier avec des automorphismes de la surface S .

Lemme 9. Soit g une isométrie du réseau $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ et \tilde{g} son prolongement naturel à $H^2(S, \mathbb{R})$. On notera $\Delta = \{d \in H^2(S, \mathbb{Z}) \mid d^2 = -2\}$. On a alors équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $\tilde{g}(\mathcal{C}_S^+) \subset \mathcal{C}_S^+$
2. g envoie les classes de diviseurs amples sur les classes de diviseurs amples.

3. g envoie une classe de diviseur ample sur une classe de diviseur ample.

4. $\tilde{g}(\mathcal{C}_S) = \mathcal{C}_S$ et $\tilde{g}(\Delta) = \Delta$

Démonstration. La première proposition implique la deuxième pour la simple raison que $\mathcal{C}_S^+ \cap H^2(S, \mathbb{Z})_f$ est exactement constitué des classes de diviseurs amples sur S . En effet, par le critère de Nakai-Moishezon, un diviseur D vérifiant $D^2 > 0$ est ample si et seulement si il vérifie $D.E > 0$ pour toutes les courbes irréductibles E . Or, pour de telles courbes, on a par la formule d'adjonction, soit $E^2 = -2$ et E est une courbe nodale, soit $E^2 \geq 0$ et dans ce cas, E appartient à l'adhérence de \mathcal{C}_S et on a $x.E > 0$ pour tout élément x de \mathcal{C}_S . Les classes de diviseurs amples sont donc bien celles qui vérifient $x.E > 0$ pour toutes les courbes nodales E .

Le deuxième point implique trivialement le troisième. Si le troisième point est vérifié, on a clairement $\tilde{g}(\mathcal{C}_S) = \mathcal{C}_S$ (\tilde{g} étant une isométrie, elle ne peut envoyer \mathcal{C}_S que sur \mathcal{C}_S ou $-\mathcal{C}_S$). Soit $d \in \Delta$, on a certainement $g(d)^2 = -2$ et, par le théorème de Riemann-Roch, soit $g(d)$, soit $-g(d)$ est effectif. Or, si on choisit a une classe ample envoyée par g sur une classe ample, on doit avoir $g(d).g(a) = d.a > 0$, ce qui n'est possible que si c'est $g(d)$ qui est effectif et non son opposé. Le troisième point implique donc le quatrième.

Pour la dernière implication, il suffit de constater une nouvelle égalité, entre \mathcal{C}_S^+ et $\{x \in \mathcal{C}_S \mid \forall d \in \Delta, x.d > 0\}$. En effet, le membre de droite est inclus dans \mathcal{C}_S^+ puisque $\mathcal{R}(S) \subset \Delta$. Réciproquement, si $d \in \Delta$ vérifie $x.d \leq 0$ pour un $x \in \mathcal{C}_S^+$, certainement on pourra trouver un x' dans $\mathcal{C}_S^+ \cap H^2(S, \mathbb{Z})_f$ tel que $x'.d \leq 0$, ce qui contredit l'égalité prouvée au début de cette démonstration. □

Définition 16. On notera $O^\uparrow(S) \subset O(H^2(S, \mathbb{Z}))$ le sous-groupe des isométries vérifiant les propriétés équivalentes précédentes.

Les résultats suivants ne seront pas démontrés ici, ils découlent de la théorie des périodes, mais ils sont indispensables pour la démonstration du théorème 17, qui est le point central de cette section.

Théorème 15. Soit Y une surface d'Enriques, $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ son revêtement universel et σ l'involution correspondante sur \tilde{Y} . On a un isomorphisme $H^2(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) \simeq L$ tel que σ^* agit sur $H^2(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ comme s (les notations L et s sont celles introduites à la fin de la troisième section). De plus, π^* induit alors un isomorphisme $H^2(Y, \mathbb{Z}_f) \simeq L^+ \simeq N \subset L$.

Démonstration. Cf [5]. □

Théorème 16. (théorème de Torelli pour les surfaces K3) Soit X une surface K3 et ω une 2-forme différentielle holomorphe non nulle sur X , alors une isométrie $g \in H^2(X, \mathbb{Z})$ est induite par un automorphisme de la surface X si et seulement si $g \in O^\uparrow(X)$ et $\tilde{g}(\omega) = \lambda\omega$, où \tilde{g} désigne ici le prolongement de g à $H^2(X, \mathbb{C})$, l'inclusion $\mathbb{C}\omega = H^{0,2}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ découlant de la théorie de Hodge.

Démonstration. Cf [4]. □

Lemme 10. Le morphisme $\pi^* : H^{1,1}(\tilde{Y}, \mathbb{R}) \rightarrow H^{1,1}(Y, \mathbb{R})$ identifie \mathcal{C}_Y^+ et $\mathcal{C}_Y^+ \cap (H^{1,1}(\tilde{Y}, \mathbb{R}))^\sigma$ (espace des vecteurs invariants par σ).

Démonstration. Soit $c \in \mathcal{C}_Y^+$, il suffit de prouver que $\pi^*(c) \in \mathcal{C}_Y^+$ d'après la démonstration du lemme 9. Il suffit donc de vérifier $c.d > 0$ pour les courbes nodales d . Or, si $\sigma^*(c) = c$, $c.d = 1/2(c.(d + \sigma^*(d)))$ et si $d.(\sigma^*(d)) > 0$, on a $(d + \sigma^*(d))^2 = -4 + 2(d, \sigma^*(d)) \geq 0$ (un carré étant toujours divisible par 4 par parité de la forme d'intersection), donc $d + \sigma^*(d) \in \mathcal{C}_Y$ et $c.d > 0$. Si $d.(\sigma^*(d)) = 0$ cela signifie que $\pi(D) = \pi(\sigma(D))$ est une (-2) -courbe sur Y . On en déduit le résultat. □

Corollaire 4. Le groupe des automorphismes de \tilde{Y} s'identifie à un sous-groupe de $O^\dagger(X)$.

Le théorème principal de cette section est le suivant :

Théorème 17. *Soit Y une surface d'Enriques, $Aut(Y)$ contient le sous-groupe de 2-congruence de $O^\dagger(Y)$ comme sous-groupe d'indice fini. Si Y est une surface d'Enriques non spéciale, on a un isomorphisme entre ces deux groupes.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin d'introduire de nouvelles notations :

Définition 17. On notera $N_1 \subset N$ le sous-réseau primitif de $H^2(Y, \mathbb{Z})$ engendré par les classes de courbes nodales, $L_1 = \pi^*(N_1) \subset L^+$, $L_2 \subset L^-$ le sous-réseau engendré par les classes de la forme $d - s(d)$, pour d tel que $d + s(D) \in L_1$, $L_3 = L_2^\perp \cap A_{\tilde{Y}} \cap L^-$, $L_4 = T_{\tilde{Y}}$ et R le plus petit sous-réseau primitif contenant L_3 et L_4 .

Remarque 9. La donnée de R détermine celle de L_1 et L_2 . Dans le cas d'une surface d'Enriques non spéciale, on a $L_1 = L_2 = 0$.

Proposition 18. *En notant $Aut(\tilde{Y}, \sigma) = \{g \in Aut(\tilde{Y}) \mid g\sigma = \sigma g\}$, on a $Aut(Y) \simeq Aut(\tilde{Y}, \sigma)/\{id, \sigma\}$.*

Démonstration. C'est évident, un automorphisme de Y se relève en deux automorphismes de \tilde{Y} commutant avec l'involution σ . \square

Définition 18. Comme une isométrie de L commutant avec s laisse invariant les sous-réseaux L_1, L_2, L_3 et L_4 précédemment définis, on a des morphismes $r_i : Aut(\tilde{Y}, \sigma) \rightarrow O(L_i)$, on notera également $r_+ = r_1$ et $r_- = (r_2, r_3, r_4)$.

Proposition 19. *Le noyau de r_- est identifié par r_+ au sous-groupe de 2-congruence de $O^\dagger(Y)$.*

Démonstration. Ce noyau s'identifie naturellement au sous-groupe de 2-congruence de $O(L^+)$; en effet, un élément de $O(L^\pm)$ induit l'identité sur $(L^\pm)^\wedge/L^\pm$ si et seulement s'il appartient au sous-groupe de 2-congruence. Il suffit de montrer que tout g dans $O(L)$ commutant avec s , laissant invariant \mathcal{C}_Y^+ et contenu dans le noyau de r_- provient d'un automorphisme de \tilde{Y} (la réciproque étant évidente). Soit a la classe d'un diviseur ample, $r^+(g)(a)$ est également ample et on a $g(\pi^*(c)) = \pi^*(r^+(g)(c))$. L'isométrie g envoie donc un diviseur ample sur un diviseur ample, ce qui implique $g \in O^\dagger(L)$ le troisième point du lemme 9. De plus, comme $r^-(g) = id$, le prolongement de g au complexifié de L laisse le sous-espace $\mathbb{C}\omega \subset L^-$ invariant, d'où la proposition par le théorème de Torelli. \square

Proposition 20. *L'image du morphisme $r^- : Aut(\tilde{Y}, \sigma) \rightarrow O(L^-)$ est un groupe fini.*

Démonstration. Si on décompose la forme différentielle ω en parties réelle et imaginaire u et v , un élément g de l'image de r^- laisse $\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$ fixe. Il laisse également $(\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v)^\perp$ stable. Or, la forme d'intersection est de signature $(2, 10)$ sur L . On en déduit que l'élément est dans le groupe compact $O(\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v) \times O(\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v)^\perp$ et la proposition. \square

Les théorèmes annoncés précédemment découlent de la proposition précédente et du lemme suivant dans le cas des surfaces non spéciales.

Lemme 11. Si Y est une surface d'Enriques non spéciale et $g \in Aut(\tilde{Y})$ commute avec σ alors la restriction de g^* à R vaut $\pm id$.

Démonstration. On constate facilement que $g(\omega) = \lambda\omega$, il faut ensuite réussir à montrer qu'on a $\lambda = \pm 1$. Ceci utilise des considérations générales que nous n'aborderons pas ici (cf [20], lemme 2.9 et les références qui y sont données). \square

Nous allons maintenant les appliquer à l'étude du nombre de représentations géométriques des surfaces d'Enriques. Pour cela, nous aurons encore besoin de quelques notations.

Définition 19. Un élément $m \in N$ sera dit primitif s'il engendre un sous-réseau primitif, numériquement nul si $m^2 = 0$, direct si m est dans l'adhérence de \mathcal{C}_Y^+ et dp s'il est à la fois primitif et direct.

Lemme 12. Soit e_1, \dots, e_n ($n \geq 2$) des éléments de N vérifiant $e_i \cdot e_j = 1 - \delta_{i,j}$ alors tous les e_i sont primitifs, si l'un des e_i est dp, les autres le sont également, et si $e_1 + \dots + e_n = e'_1 + \dots + e'_n$, où e'_1, \dots, e'_n sont d'autres éléments dp satisfaisant la même condition sur les intersections, à permutation près, $e_i = e'_i$.

Démonstration. Le premier point découle de l'existence d'un élément x vérifiant $e_i \cdot x = 1$, le second est également clair. Pour le troisième, remarquons que $(e_1 + \dots + e_n) \cdot e'_1 = \sum_{i=1}^n e_i \cdot e'_1$, avec $e_i \cdot e'_1 \geq 0$ et $e_i \cdot e'_1 \geq 1$ sauf si $e_i = e'_1$ du fait que tous ces vecteurs sont dp. Or, cet entier vaut également $(e'_1 + \dots + e'_n) \cdot e'_1 = n - 1$, on en déduit que l'un des e_i est égal à e'_1 et le lemme par récurrence sur n . \square

Lemme 13. Pour $n = 1, 2, 3$ ou 10 , $O^\uparrow(N)$ agit transitivement sur les n -uplets ordonnés de vecteurs numériquement nuls dp vérifiant la condition d'intersection du lemme précédent.

Démonstration. Pour $n = 1$, choisissons e un élément dp de carré nul. Il existe un $m \in N$ tel que $e \cdot m = 1$. En posant $e' = m - m^2 e / 2$, e et e' engendrent un sous-réseau de N isomorphe à U_2 , et sont dp. Le résultat découlera donc de la démonstration dans le cas $n = 2$.

Pour $n = 2$, il faut montrer que $O^\uparrow(N)$ agit transitivement sur les sous-réseaux de N isomorphes à U_2 . Mais si on a un plongement de U_2 dans N , l'orthogonal de l'image est isomorphe à E_8 d'après le théorème 9 et on peut envoyer cette décomposition $N = U_2 \oplus E_8$ sur la décomposition standard de N via une isométrie de N .

Pour $n = 3$, on peut toujours choisir pour e_1 et e_2 un couple de générateurs du U_2 intervenant dans la décomposition standard de N . On peut alors écrire $e_3 = e_1 + e_2 + w$, où w est en fait une racine du système E_8 orthogonal à U_2 . Or, le groupe de Weyl agit transitivement sur les racines, d'où le résultat.

Pour $n = 10$, on peut de même écrire $e_i = e_1 + e_2 + w_i$ pour $i \geq 3$, et les w_i forment un octuplet de racine vérifiant $w_i \cdot w_j = -1 + \delta_{i,j}$, d'où le résultat par le lemme 2. \square

On déduit de ce dernier lemme que le stabilisateur dans $O^\uparrow(M)$ d'un élément $m = e_1 + \dots + e_n$ est $O^\uparrow(M)_c = S_n \times O(e_1^\perp \cap \dots \cap e_n^\perp)$. On voudrait calculer le nombre $p(n)$ de G -orbites de ce même élément m (G étant le sous-groupe de 2-congruence de $O^\uparrow(M)$). Ce nombre vaut clairement $|O^+(10, \mathbb{F}_2)| / [O^\uparrow(M)_c : G_c]$, qui se calcule selon les cas en utilisant la proposition suivante :

Proposition 21. Les groupes et cardinaux intervenant dans le calcul de $p(n)$ sont les suivants :

n	$O^\uparrow(M)_c$	G_c	$[O^\uparrow(M)_c : G_c]$	$p(n)$
1	$E_8 \times W_8$	$2E_8 \times \{\pm 1\}$	$2^{21} \times 3^5 \times 5^2 \times 7$	17×31
2	$S_2 \times W_8$	$\{\pm 1\}$	$2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7$	$2^7 \times 17 \times 31$
3	$S_3 \times W_7$	1	$2^{11} \times 3^5 \times 5 \times 7$	$2^{10} \times 5 \times 17 \times 31$
10	S_{10}	1	10!	$2^{13} \times 3 \times 17 \times 31$

Démonstration. Le cardinal de $O^+(10, \mathbb{F}_2)$ vaut $2^{21} \times 3^5 \times 5^2 \times 17 \times 31$. Pour calculer les stabilisateurs, on décompose $N = U_2 \oplus E_8$ et on écrit la matrice de $g \in O^\uparrow(N)$ par blocs : $g = \begin{pmatrix} g_{UU} & g_{EU} \\ g_{UE} & g_{EE} \end{pmatrix}$. Dans le cas $n = 1$, quitte à supposer $g(e_1) = e_1$, la matrice de g peut se

réécrire par blocs $g = \begin{pmatrix} 1 & t & f \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & g_{EE} \end{pmatrix}$, avec $t \in \mathbb{Z}$, $y \in E_8$, et pour que G soit une isométrie,

$t = -y^2/2$ et f est l'opposée de la matrice du produit d'intersection avec $g_{EE}(y)$. La matrice étant déterminée par y et g_{EE} , $O^\dagger(M)_{e_1}$ est bien isomorphe à $E_8 \times W_8$. Le calcul du sous-groupe de 2-congruence ayant déjà été effectué, on en déduit le résultat pour $n = 1$.

Pour $n = 2$, c'est plus simple, le calcul de $O^\dagger(M)_{e_1+e_2}$ est évident, et un élément de G ne peut pas permuter non trivialement e_1 et e_2 d'où le calcul de G_c .

Pour $n = 3$, on écrit $e_3 = e_1 + e_2 + w$ et il est clair que l'orthogonal de w dans E_8 est isomorphe à E_7 , le résultat en découle facilement. Enfin le cas $n = 10$ est évident. \square

Le nombre de représentations non isomorphes des surfaces d'Enriques comme plan double ou surface sextique découlent des calculs précédents :

Théorème 18. *Une surface d'Enriques non spéciale admet exactement $17 \times 31 = 527$ fibrations elliptiques au-dessus de \mathbb{P}^1 non isomorphes, $2^7 \times 17 \times 31 = 67456$ représentations comme plan double (cf théorème 12) non isomorphes et $2^{11} \times 5 \times 17 \times 31 = 5396480$ représentations d'Enriques non isomorphes.*

Démonstration. Une fibration elliptique de Y au-dessus de \mathbb{P}^1 est déterminée par un système linéaire $|2E|$, où E a une classe dans M qui est numériquement nulle et dp, d'après la proposition 3. De plus, deux fibrations sont isomorphes elles diffèrent d'un automorphisme de \tilde{Y} . Le nombre de telles fibrations est donc égal à celui de G -orbites d'éléments numériquement nuls dp, qui a été calculé à la proposition précédente.

De même, les représentations comme plan double sont déterminées par un couple de vecteurs numériquement nuls dp et d'intersection 1, et les représentation d'Enriques correspondant aux triplets de tels vecteurs vérifiant exactement les conditions d'intersection des lemmes précédents. Le théorème en découle. \square

2 Propriétés arithmétiques des surfaces d’Enriques

Dans cette seconde partie, nous allons abandonner notre étude géométrique des surfaces d’Enriques pour nous intéresser à des problèmes de type arithmétique. En effet, les surfaces d’Enriques, du fait de la simplicité du calcul de leurs invariants et de la relative complexité de leur géométrie (en particulier, le fait qu’on ait $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour une surface d’Enriques Y , mais que Y ne soit pas rationnelle, ni même rationnellement connexe, est très intéressant), sont de bons candidats pour “tester” la validité de certains principes arithmétiques tels ceux dont nous parlerons dans la seconde section de cette partie. La première propriété arithmétique à la quelle on va s’intéresser est peut-être la plus élémentaire, il s’agit tout simplement de l’existence de points rationnels pour une surface d’Enriques sur certains corps intéressants du point de vue de l’arithmétique.

2.1 Equations explicites de surfaces d’Enriques

Les questions d’existence de points rationnels sur certains types de variétés remontent à plusieurs dizaines d’années, mais plusieurs nouveaux résultats sont venus enrichir récemment ce sujet. Pour le cas que nous étudions ici, on peut citer une lettre de Serre à Grothendieck ([1], p.52), où il suggère qu’une variété projective, lisse, géométriquement connexe X définie sur le corps $K = \mathbb{C}(C)$ des fonctions d’une courbe algébrique complexe C et vérifiant $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$ a toujours un point rationnel. Il ajoute immédiatement que cette hypothèse lui semble “bien optimiste”. On sait aujourd’hui que cette hypothèse est fautive : dans leur récent article [19], Graber, Harris, Mazur et Starr ont établi l’existence d’une surface d’Enriques X sur un tel corps $K = \mathbb{C}(C)$ sans K -point rationnel. Leur exemple est indirect, ni la courbe C ni la surface X ne sont explicites.

Nous allons ici donner un exemple explicite de surface d’Enriques définie sur le corps des fonctions $\mathbb{C}(t)$ de la droite projective complexe $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (et même en fait sur $\mathbb{Q}(t)$) n’ayant pas de point sur le complété $\mathbb{C}((t))$, et a fortiori pas de point sur $\mathbb{C}(t)$. Ceci répond à une question de B. Mazur. Les équations utilisées ici ont été introduites dans un article de Colliot-Thélène, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer ([8], Remarque 4.1.2).

Proposition 22. *Soit F un corps de caractéristique zéro. Soit $r \in F^*$ et soient c, d et f des trinômes de $F[u]$ de degré 2 tels que $cdf(d - c) \in F[u]$ soit séparable. Soit Y un F -modèle projectif et lisse, relativement minimal de la variété affine Y_0 définie dans \mathbb{A}_F^4 avec coordonnées x, y, z, u par le système d’équations :*

$$\begin{cases} x^2 - c(u) &= & f(u)y^2 \\ x^2 - d(u) &= & r f(u)z^2 \end{cases}$$

Alors Y est une surface d’Enriques.

Démonstration. Le diviseur de $f(u)$ sur Y est un double (c’est, à l’introduction du facteur r près, la proposition 4.1 de [8], dont la démonstration vaut sans changement dans le cas présent). Par conséquent, la surface affine Z_0 définie dans \mathbb{A}_F^5 avec coordonnées (u, t, x, y, z) par le système d’équations

$$\begin{cases} x^2 - c(u) &= & f(u)y^2 &\neq & 0 \\ x^2 - d(u) &= & r f(u)z^2 &\neq & 0 \\ f(u) &= & t^2 &\neq & 0 \end{cases}$$

est F -birationnelle à un revêtement double non ramifié Z de Y (cela découle de la Proposition 1.1 de [8]). On notera que la variété affine définie ci-dessus est F -isomorphe à la variété affine

définie par le système

$$\begin{cases} x^2 - c(u) & = & y^2 & \neq 0 \\ x^2 - d(u) & = & r z^2 & \neq 0 \\ f(u) & = & t^2 & \neq 0 \end{cases}$$

Lemme 14. Il existe un modèle projectif et lisse de Z qui est une surface $K3$.

Démonstration. Pour éviter d'alourdir les notations, on omettra désormais de préciser qu'on se place toujours sur le corps F . Considérons le modèle Y_0 défini dans $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^3$ avec coordonnées $(u; x, y, z, w)$ par le système

$$\begin{cases} x^2 - c(u)w^2 & = & y^2 \\ x^2 - d(u)w^2 & = & r z^2 \end{cases}$$

La projection sur le facteur \mathbb{A}^1 induit un morphisme de Y_0 vers $\mathbb{A}_u^1 = \text{Spec}(F[u])$. De plus, si l'on fait le changement de variable $v = \frac{1}{u}$, après multiplication des équations définissant le système par v^2 et changement de variable en posant $x' = vx$, $y' = vy$ et $z' = vz$, on obtient une surface Y_1 définie dans $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^3$ avec coordonnées $(v; x', y', z', w)$ par le système d'équations

$$\begin{cases} x'^2 - \tilde{c}(v)w^2 & = & y'^2 \\ x'^2 - \tilde{d}(v)w^2 & = & r z'^2 \end{cases}$$

où, pour un trinôme g , on a défini $\tilde{g}(v) = v^2g(v^{-1})$, avec \tilde{g} un trinôme en la variable v . La surface Y_1 est également munie d'une projection $Y_1 \rightarrow \mathbb{A}_v^1 = \text{Spec}(F[v])$.

Les deux surfaces Y_0 et Y_1 se recollent, ainsi que leurs projections vers les droites affines, pour donner une surface Y munie d'un morphisme $q : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$, dont la fibre générique est intersection complète lisse de deux quadriques dans \mathbb{P}^3 , donc est une courbe de genre un. Les fibres géométriques singulières de q sont au nombre de 6, une au-dessus de chacun des points de \mathbb{A}_u^1 vérifiant $c(u).d(u).(c-d)(u) = 0$. Chacune de ces fibres est union de deux courbes lisses de genre zéro se coupant transversalement en deux points.

Soit $C_0 \subset \mathbb{A}_k^2$, avec coordonnées affines (u, t) , la conique lisse d'équation $f(u) = t^2$, et soit $C \subset \mathbb{P}^2$ la conique projective lisse qu'elle définit. La projection $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^1$ donnée par $(u, t) \mapsto u$ induit un morphisme $C_0 \rightarrow \mathbb{A}_u^1$ qui s'étend en un morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ ramifié exactement en les deux points de \mathbb{A}_u^1 donnés par $f(u) = 0$.

Soit X le produit fibré $Y \times_{\mathbb{P}^1} C$. Comme les polynômes f et $c.d.(c-d)$ sont sans racine commune, la surface projective X est lisse. La projection $X \rightarrow C$ a pour fibre générique une courbe lisse de genre un. Elle a exactement douze fibres géométriques singulières, chacune du type décrit ci-dessus. Il est par ailleurs clair que X contient un ouvert isomorphe à la surface affine Z_0 définie plus haut, donc X est F -birationnelle à Z .

Pour établir le lemme, ainsi que la proposition 22, on peut supposer le corps F de type fini sur \mathbb{Q} , puis le plonger dans \mathbb{C} et se contenter de vérifier le résultat sur \mathbb{C} . En effet, les propriétés d'être une surface $K3$ ou d'être une surface d'Enriques sont stables par extension de corps puisque d'après la classification de [21], p.188, pour une surface projective lisse X , être une surface $K3$ est équivalent à avoir un fibré canonique trivial et vérifier $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, et être une surface d'Enriques est équivalent à avoir un fibré canonique d'ordre exactement deux dans le groupe de Picard et vérifier $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

En appliquant le Lemme VI.4 de [3], on obtient alors : $\chi_{top}(X) = \sum_{i=1}^{12} \chi_{top}(S_i)$, où les S_i sont les fibres singulières, qui ont toutes une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 2, donc $\chi_{top}(X) = 24$. De plus, grâce au Corollaire 12.3 de [21], on sait qu'un diviseur canonique sur X peut s'écrire sous la forme $K = f^*(D)$, où D est un diviseur sur \mathbb{P}^1 , et on a donc $K.K = 0$. Le même Corollaire affirme également que D est de degré $d = \chi(X, \mathcal{O}_X) - 2\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - 2$. En utilisant la formule de Noether et le calcul

de $\chi_{top}(X)$, on obtient alors $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 2$. Le diviseur D est donc de degré 0 et le diviseur canonique est linéairement équivalent à 0, c'est-à-dire que le fibré canonique est trivial. De plus, X est minimale car une courbe exceptionnelle de première espèce E sur X vérifierait $E.K = -1$, ce qui n'est pas possible avec un diviseur canonique trivial. Par la classification de [21], p. 188, la seule possibilité pour une surface X minimale d'avoir un fibré canonique trivial et de vérifier $\chi_{top}(X) = 24$ est d'être une surface $K3$. \square

Comme X est une surface $K3$, on a $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Si l'on avait $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$, la variété d'Albanese de Y serait non triviale, il existerait donc une application rationnelle non constante de X vers une variété abélienne. Une telle application se prolonge automatiquement en un morphisme défini sur X tout entier ([15], Lemme 9.11), la variété d'Albanese de X serait non triviale, on aurait $H^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, ce qui est absurde. Ainsi $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. De plus, comme X domine Y , on a pour les dimensions de Kodaira de Y et X l'inégalité $\kappa(Y) \leq \kappa(X)$ ([15], Théorème 6.10), ce qui implique $\kappa(Y) \leq 0$. En utilisant à nouveau la classification de [21], p.188, les seules possibilités pour Y sont alors d'être une surface rationnelle, une surface $K3$ ou une surface d'Enriques. Or Y a un revêtement double non ramifié non trivial, donc n'est pas simplement connexe et ne peut pas être une surface rationnelle ou une surface $K3$. C'est donc une surface d'Enriques, ce qui démontre la proposition. \square

C'est sur ces équations précises que nous allons maintenant travailler, en cherchant si cette variété affine peut avoir des points sur $\mathbb{C}((t))$.

2.2 Un exemple de surface d'Enriques sans point rationnel sur $\mathbb{C}((t))$

On utilisera dans cette section des propriétés élémentaires de la valuation canonique sur $\mathbb{C}((t))$ (pour $x = \sum_{n \geq n_0} x_n t^n$, $v(x) = n_0$), notamment les deux propriétés suivantes, qui seront implicitement utilisées plusieurs fois par la suite :

Proposition 23. *Si x et y ont des valuations de parité différente, alors $x + y \neq 0$. Si y a une valuation de parité différente de celles de x et z , et si $v(x) > v(y)$, alors $x + y + z \neq 0$.*

On utilisera également le fait que les équations polynômiales se résolvent facilement sur $\mathbb{C}((t))$, à savoir plus précisément que :

Proposition 24. *L'élément x est une puissance n -ième dans $\mathbb{C}((t)) \Leftrightarrow n \mid v(x)$.*

Rappelons à ce sujet que la clôture algébrique de $\mathbb{C}((t))$ est donnée par $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}((t^{\frac{1}{n}}))$ (théorème de Puiseux).

On peut commencer, dans un premier temps, à regarder ce qui se passe si nos polynômes c , d et f sont à racines dans \mathbb{C} . On se ramène alors, quitte à multiplier nos variables par des puissances de t adéquates, au système :

$$\begin{cases} x^2 - t^\epsilon c(u) = t^\eta f(u) y^2 \\ x^2 - t^p d(u) = r t^\eta f(u) z^2 \end{cases}$$

où $\epsilon, \eta \in \{0, 1\}$, $p \in \mathbb{Z}$ et c, d, f sont maintenant des trinômes à coefficients complexes. Examinons par exemple le cas où ϵ et η sont nuls, r un carré dans $\mathbb{C}((t))$ (on peut alors l'inclure dans le z^2), et p négatif impair. Dans le cas où $v(t) \neq 0$ (ce qui implique que $c(t)$, $d(u)$ et $f(u)$ sont toujours de valuation paire), on doit avoir, à cause de la seconde équation, $v(x^2) = v(f(u)z^2) < \min(p, p + v(u))$. Mais si $v(x)$ vérifie cette condition, on obtient facilement une solution au système : les deux membres de gauche sont de valuation paire, il suffit d'extraire deux racines carrées. Dans le cas où $v(u) = 0$, il y a une variante si $v(f(u))$ devient

impaire. En effet, dans ce cas, on va avoir une condition beaucoup plus forte sur x : il doit être de valuation nulle et tel que $v(x^2 - c(u))$ soit impaire à cause de la première équation. Si c'est le cas, on a à nouveau une résolution élémentaire.

Dans le cas général (en supposant toujours pour l'instant que r est un carré), il se produit le même phénomène : on peut éventuellement avoir des solutions quand $v(f(u))$ est impaire, mais le point déterminant pour l'existence de solutions va être de trouver un u pour lequel $v(f(u))$ va être paire.

Proposition 25. *Quel que soit le trinôme séparable f à coefficients dans $\mathbb{C}((t))$, on peut trouver un u tel que $v(f(u))$ soit de valuation paire.*

On a en fait le résultat plus fort suivant :

Proposition 26. *Soit P un polynôme séparable de degré 2 sur $K = \mathbb{C}((t))$ (ou sur une extension finie de $\mathbb{C}((t))$), alors $\forall u \in K, \exists x \in K, \exists v \in K^*$ tels que $P(x) = uv^2$.*

Démonstration. On peut toujours supposer P unitaire. Soit $P(x) = x^2 + ax + b$. Soit $L = K[x]/P(x) = \{r\theta + s\}$, où θ est la classe de x dans L . La norme sur L se calcule aisément : $N(r\theta + s) = br^2 + ars + s^2 = r^2P(\frac{s}{r})$. Le corps K étant de dimension cohomologique 1, cette norme est surjective (cf [10]). On en déduit l'existence, pour tout u dans K de r et s tels que $P(\frac{s}{r}) = \frac{u}{r^2}$ et la proposition. \square

Corollaire 5. *Toute surface d'Enriques du type étudié avec r carré dans $\mathbb{C}((t))$ a un point rationnel sur $\mathbb{C}((t))$.*

Démonstration. La surface affine a un point sur $\mathbb{C}((t))$. En effet, en fixant un u vérifiant la condition de la proposition 25, pour x de valuation suffisamment négative, la valuation des deux membres de gauche sera paire, il n'y a qu'à extraire deux racines carrées pour obtenir y et z . Ensuite, on en déduit que les modèles projectifs n'ont pas de point non plus en utilisant le lemme suivant (qui découle du théorème d'inversion locale pour les variétés analytiques, énoncé dans [12], 3.9, Théorème 2). \square

Lemme 15. *Soit X une variété lisse géométriquement connexe définie sur $k = \mathbb{C}((t))$ et U un ouvert de Zariski non vide de X . Alors $X(k) = \emptyset \Leftrightarrow U(k) = \emptyset$.*

Remarquons que l'existence d'un tel u est vraiment le point crucial : si on avait un trinôme f qui soit toujours de valuation impaire, on trouverait facilement une surface sans point rationnel. Il suffirait de prendre (outre f de valuation impaire), c et d de valuation constamment paire, et il faudrait que x soit tel que $v(x^2 - c(u))$ et $v(x^2 - d(u))$ soient tous les deux impaires, ce qui ne sera pas possible.

On va maintenant s'occuper du cas où r n'est pas un carré, qui va nous fournir le contre-exemple :

Proposition 27. *La variété affine définie dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}((t))}^4$ muni des coordonnées (x, y, z, u) par les équations :*

$$\begin{cases} x^2 - tu^2 + t & = & (t^2u^2 - t)y^2 \\ x^2 - 2tu^2 + \frac{1}{t} & = & r(t^2u^2 - t)z^2 \end{cases}$$

n'a pas de point si r n'est pas un carré dans $\mathbb{C}((t))$.

Démonstration. Vérifions pour commencer que $cdf(d-c)$ est bien séparable, donc que l'on est dans les hypothèses de la proposition 22. Dans $\mathbb{C}((\sqrt{t}))$, les racines de f sont $\frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{t}}$, celles de c sont 1 et -1 , celles de d sont $\frac{1}{\sqrt{2t}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2t}}$ et celles de $d-c$ sont $\frac{1}{t} - 1$ et $\frac{1}{t} + 1$.

D'après le lemme 15, on peut se restreindre à vérifier l'absence de point rationnel sur l'ouvert formé des points (x, y, z, u) pour lesquels aucun des trois trinômes $c(u)$, $d(u)$ et $f(u)$ ne s'annule.

On remarque ensuite que $f(u) = t^2u^2 - t$ est de valuation paire (égale à $2v(u)$) quand $v(u) < 0$ et de valuation impaire (égale à 1) quand $v(u) \geq 0$.

Fixons u_0 tel que $v(u_0) < 0$. On a alors une solution au système si et seulement si on peut trouver un x_0 tel que $v(x_0^2 - tu_0^2 + t)$ soit paire et $v(x_0^2 - 2tu_0^2 + \frac{1}{t})$ soit impaire. En effet, on pourra alors trouver y_0 et z_0 tels que (x_0, y_0, z_0, u_0) soit solution du système en extrayant deux racines carrées alors que dans le cas contraire, les valuations des deux membres de l'une des équations définissant le système sont toujours différentes. Or, comme $v(u_0) < 0$, on a $v(tu_0^2 - t) = v(tu_0^2) = 2v(u_0) + 1$ qui est impaire, donc on doit avoir $v(x_0^2) < v(tu_0^2 - t)$. Or on a aussi $v(2tu_0^2 - \frac{1}{t}) \geq v(2tu_0^2) = 2v(u_0) + 1 = v(tu_0^2 - t) > v(x_0^2)$ (on peut ne pas avoir égalité dans la première inégalité pour $v(u_0) = -1$). On en déduit que $v(x_0^2 - 2tu_0^2 + \frac{1}{t}) = v(x_0^2)$ ne peut être impaire, donc qu'il n'y a pas de solution vérifiant $v(u_0) < 0$.

Choisissons maintenant u_1 tel que $v(u_1) \geq 0$. On aura désormais une solution si et seulement s'il existe un x_1 tel que $v(x_1^2 - tu_1^2 + t)$ soit impaire et $v(x_1^2 - 2tu_1^2 + \frac{1}{t})$ soit paire. Or, comme $v(u_1) \geq 0$, on a $v(2tu_1^2 - \frac{1}{t}) = -1$ donc on doit avoir $v(x_1) < 0$, et comme $v(tu_1^2 - t) \geq 1$, on a nécessairement $v(x_1^2 - tu_1^2 + t)$ impaire, ce qui empêche à nouveau l'existence d'une solution. On en déduit l'absence de point rationnel sur la variété considérée. \square

Théorème 19. *Un modèle projectif lisse minimal de la variété introduite à la proposition 27 est une surface d'Enriques sans point sur $\mathbb{C}((t))$.*

Démonstration. Puisqu'on vient de voir que le modèle en question n'a pas de point sur un ouvert, il suffit d'utiliser le lemme 15 pour conclure. \square

2.3 Principe de Hasse et approximation faible

Rappelons tout d'abord ces deux principes, qui relient les points rationnels d'une variété dans un corps à ceux de cette même variété dans les complétés de ce corps.

Définition 20. On dit qu'une famille de variétés définies sur un corps k vérifie le *principe de Hasse* si toute variété de la famille ayant des points rationnels sur tout complété de k a également un point rationnel sur k . On dit qu'elle vérifie le *principe d'approximation faible* si, pour toute variété V de la famille ayant un point sur k , $V(k)$ est dense dans tous les produits $V(k_v)$ pris sur un nombre fini de places v du corps k (k_v étant un complété de k pour la valuation v).

On a un certain nombre de résultats concernant la vérification ou non de ces deux principes dans quelques cas particuliers, qui sont exposés dans l'article de Swinnerton-Dyer déjà cité ([18]). En ce qui concerne les surfaces d'Enriques, et comme signalé dans ce même article, les propriétés arithmétiques ont été très peu étudiées, mais les équations de l'article [8] apportent un support pour la recherche d'exemples concrets. C'est ainsi que Colliot-Thélène et Gille ont récemment exhibé dans [9] un exemple de surface d'Enriques mettant en défaut le principe d'approximation faible :

Théorème 20. *La surface X définie dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}(t)}^4$ muni des coordonnées x, y, z, u par le système d'équations*

$$\begin{cases} x^2 - t(u-a)(u-b) & = u(u-1)y^2 \neq 0 \\ x^2 - te(u-c)(u-d) & = u(u-1)z^2 \neq 0 \end{cases}$$

où a, b, c, d, e sont des nombres complexes choisis de façon que les hypothèses de la proposition 22 soient vérifiées, a pour modèle une surface d'Enriques Y ne vérifiant pas le principe d'approximation faible.

Démonstration. Le fait qu'un modèle soit une surface d'Enriques découle de la proposition 22. Pour tout point M de la droite projective $\mathbb{P}_{\mathbb{C}(t)}^1$, on peut définir une application $\phi_M : Y(\mathbb{C}((t))) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (où le $\mathbb{C}((t))$ est ici à comprendre comme étant le complété en M de $\mathbb{C}(t)$) donnée pour un point $x \in Y(\mathbb{C}((t)))$ par la parité de la valuation de $f(x)$ en base M (qu'on notera plus simplement v_M). On peut alors définir l'application somme $\phi : Y \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui est clairement nulle sur $Y(\mathbb{C}(t))$ puisque le diviseur de f est un double sur cette surface ([8], proposition 4.1). Regardons ce qu'il en est sur les complétés aux diverses places de $\mathbb{C}(t)$, et commençons par le cas où $M \neq 0, \infty$. Soit $(x, y, z, u) \in X$. Si $v_M(u) < 0$, $v_M(u(u-1)) = 2v_M(u)$ est paire. Supposons $v_M(u(u-1)) > 0$ et impaire. Comme $v_M(t) = 0$, on doit avoir $v_M(x^2) = v_M(u-a)(u-b) = 0$ dans la première équation définissant X (le deuxième membre est de valuation impaire, les deux termes du premier de valuation paire), et $v_M(x^2 - t(u-a)(u-b)) > 0$. De même, $v_M(x^2 - te(u-c)(u-d)) > 0$ en utilisant la seconde équation, ce qui implique finalement que $v_M((u-a)(u-b) - te(u-c)(u-d)) > 0$, ce qui est absurde. L'application ϕ_M est donc nulle pour $M \neq 0, \infty$ (puisque'elle est continue et qu'on a prouvé sa nullité sur l'ouvert dense X de Y). Pour $M = 0$, on peut trouver un point de X de la forme $(1/t, y, z, 1/t)$, avec $v_M(y) = v_M(z) = 0$ (ici, la valuation est la valuation habituelle sur $\mathbb{C}((t))$ et on voit immédiatement qu'en posant $x = u = 1/t$, les membres de gauche des deux équations divisés par $u(u-1)$ sont de valuation nulle, il suffit donc d'extraire leurs racines carrées pour obtenir les points voulus, qui vérifient donc $v_M(u(u-1)) = -2$). De même, on a des solutions de la forme $(0, x, y, t)$, avec $v_M(y) = v_M(z) = 0$ (cette fois-ci, les deux membres sont de valuation 1), pour lesquelles $v_M(u(u-1)) = 1$, ce qui prouve que ϕ_0 est surjective. Pour $M = \infty$, on trouve de même des points de la forme $(0, y, z, 1/t)$, avec $v(y) = v(z) = 1$, vérifiant $v_M(u(u-1)) = 1$ (on a maintenant $v_M(t) = -1$), et des points tels que $v_M(x) = v_M(y) = v_M(z) < 0$, et $v_M(u(u-1)) = 0$, donc ϕ_∞ est également surjective. De plus, la surface Y possède des points rationnels : pour $u_0 \in \mathbb{C}$, on peut spécialiser les équations pour obtenir des courbes incluses dans Y d'équations :

$$\begin{cases} x^2 - t(u_0 - a)(u_0 - b) & = u_0(u_0 - 1)y^2 \neq 0 \\ x^2 - te(u_0 - c)(u_0 - d) & = u_0(u_0 - 1)z^2 \neq 0 \end{cases}$$

Ces courbes admettent des compactifications lisses d'équations :

$$\begin{cases} X^2 - t(u_0 - a)(u_0 - b)T^2 & = u_0(u_0 - 1)Y^2 \neq 0 \\ X^2 - te(u_0 - c)(u_0 - d)T^2 & = u_0(u_0 - 1)Z^2 \neq 0 \end{cases}$$

qui ont des points rationnels pour u_0 général quand $T = 0$. On en déduit l'existence de points rationnels sur Y et le théorème puisque l'image de l'application diagonale $Y(\mathbb{C}(t)) \rightarrow Y(\mathbb{C}((t))) \times Y(\mathbb{C}((1/t)))$ n'est pas dense. \square

Remarque 10. Il est vraisemblable que ce type d'équations pour des surfaces d'Enriques permettent également d'obtenir un contre-exemple explicite au principe de Hasse, mais un tel contre-exemple n'a pas encore pu être exhibé à ce jour.

3 Annexe 1 : Quelques rappels sur les réseaux

Définition 21. Un *réseau euclidien* M est un groupe abélien libre muni d'une forme bilinéaire symétrique $b : M^2 \rightarrow \mathbb{Z}$. La *signature* de M est celle de b étendue à $M \otimes \mathbb{R}$.

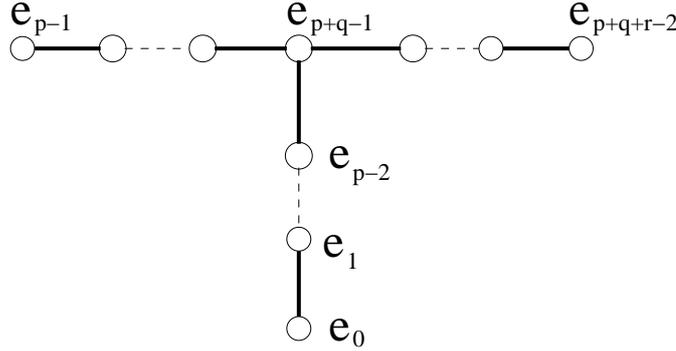
Remarque 11. On définit ainsi des réseaux positifs, négatifs, non-dégénérés, définis positifs ou négatifs, et hyperboliques (un réseau M est dit hyperbolique quand sa signature de M vaut $(1, r-1)$, où r est le rang de M en tant que groupe abélien libre). Un réseau pair est un réseau M vérifiant $\forall x \in M, b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$.

Définition 22. Un réseau M est dit *pair* si $\forall x \in M, b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$.

Définition 23. Le *réseau dual* de M est $M^* = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$. L'application $x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$ définit un morphisme de groupes $i_M : M \rightarrow M^*$. On appelle *discriminant* du réseau M l'entier $\text{card}(M^*/i_M(M))$, si celui-ci est fini. Un réseau est dit *unimodulaire* si son discriminant vaut 1, c'est-à-dire si i_M est bijective.

Exemple 1. Le réseau U_n est le groupe abélien libre engendré par les éléments e_1, \dots, e_n et muni de la forme bilinéaire définie sur cette base par $b(e_i, e_j) = 1 - \delta_{i,j}$. En particulier, U_2 est appelé *plan hyperbolique standard*.

Exemple 2. Pour trois entiers $p \leq q \leq r$, le réseau $Q_{p,q,r}$ est le groupe abélien libre engendré par les éléments $e_1, \dots, e_{p+q+r-2}$ muni de la forme bilinéaire définie sur cette base par $b(e_i, e_i) = -2$ et $b(e_i, e_j) = 1$ si e_i et e_j sont reliés dans le graphe suivant (sinon, $b(e_i, e_j) = 0$) :



Les réseaux $Q_{2,2,3}$, $Q_{2,2,4}$ et $Q_{2,3,4}$ sont aussi notés E_6 , E_7 et E_8 , les graphes correspondants étant les diagrammes de Dynkin traditionnellement notés ainsi. Le discriminant du réseau $Q_{p,q,r}$ vaut $|pqr - pq - pr - qr|$.

Définition 24. Un *isomorphisme de réseaux* est un isomorphisme de groupes compatible avec les formes bilinéaires.

Théorème 21. Soit M un réseau pair, unimodulaire, défini, de signature (a, b) avec $a \leq b$. Alors M est isomorphe à $U^a \oplus E_8^{b-a}$.

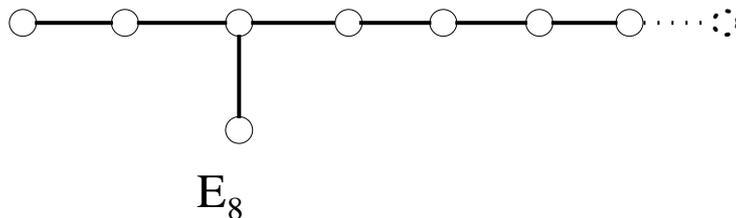
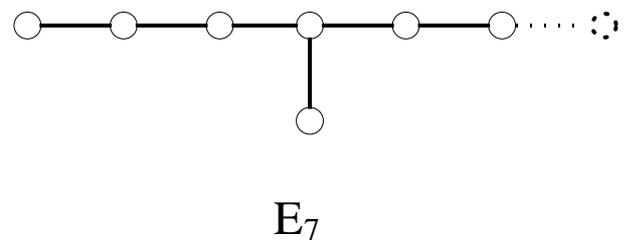
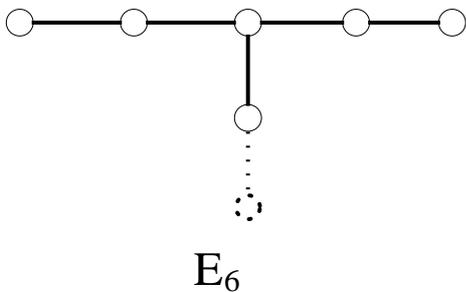
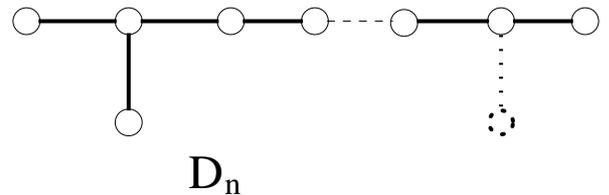
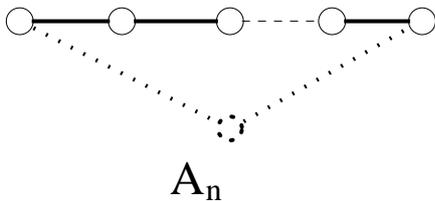
Démonstration. Cf [11], ch.5, Th.5. □

Définition 25. Un *système de racines* pour un réseau M est un ensemble fini B d'éléments de M vérifiant $\forall x, y \in B, \exists x^* \in M^*$ tel que $x^*(x) = 2, x^*(y) \in \mathbb{Z}$ et $s_{x,x^*} : y \mapsto y - x^*(y)x$ laisse stable B . Le système de racine est dit *fini* (resp. *affine*) si la restriction de b au sous-réseau engendré par B est définie négative (resp. négative).

Définition 26. Le *diagramme de Dynkin* du système de racines B est le graphe pondéré ayant pour sommets les éléments de B et, pour $e_i, e_j \in B$, une arête reliant e_i et e_j si $b(e_i, e_j) = 1$

Le résultat suivant est classique et se trouve par exemple dans [16], chapitre VI :

Théorème 22. *Le diagramme de Dynkin d'un système de racines fini (respectivement affine) est de type A_n , D_n ou E_n (resp. \tilde{A}_n , \tilde{D}_n , \tilde{E}_n), où les graphes en question sont les suivants (il faut ajouter le point et les arêtes en pointillés bizarres pour obtenir les diagrammes affines à partir des diagrammes finis, les pointillés horizontaux sur les deux premiers diagrammes étant simplement là pour indiquer qu'il y a n sommets dans les graphes A_n et D_n ; les graphes \tilde{A}_n et \tilde{D}_n ayant également n sommets, ils sont obtenus en ajoutant un sommet à A_{n-1} et D_{n-1} respectivement) :*



Définition 27. Le groupe de Weyl W d'un système de racines est le sous-groupe d'isométries du réseau correspondant engendré par les réflexions s_{x,x^*} pour x parcourant le système de racines.

Théorème 23. *Le groupe de Weyl d'un système de racines agit transitivement sur l'ensemble des racines.*

Démonstration. Cf [16], Chapitre VI, §1.5, Théorème 2. □

4 Annexe 2 : Sur les points doubles rationnels

Les points doubles rationnels sont un type de singularité précis qui présentent l'intérêt de pouvoir être classifiés aisément et d'avoir une classification du même type que celle des systèmes de racines dans les réseaux que l'on vient de voir au paragraphe précédent.

Définition 28. Soit $Y \xrightarrow{\pi} X$ une résolution minimale de singularité entre deux surfaces définies sur un corps algébriquement clos K , X étant de plus supposée affine. On appelle *genre* de la singularité l'entier $\dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$. Une singularité de genre nul est dite *rationnelle*.

Définition 29. Soit $Y \xrightarrow{\pi} X$ une résolution minimale de singularité de courbe exceptionnelle E , R_i les composantes irréductibles de E . Un *cycle exceptionnel* Z pour π est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des R_i .

Proposition 28. Soit $Y \xrightarrow{\pi} X$ une résolution minimale d'une singularité $x \in X$. On a équivalence entre les propositions suivantes :

1. La singularité x est rationnelle.
2. Pour tout cycle exceptionnel Z , $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$.
3. Pour tout cycle exceptionnel Z , $p_a(Z) = 1 + \frac{1}{2}Z \cdot (Z + K_Y) \leq 0$.
4. On a une bijection $\text{Pic}Z = H^1(Z, \mathcal{O}_Z^*) \rightarrow \mathbb{Z}^r$ donnée par $L \mapsto (\dots, \deg(L \otimes \mathcal{O}_{R_i}), \dots)$, où par définition $\deg(L) = \chi(L) - \chi(\mathcal{O}_Z)$

Démonstration. Une preuve détaillée de ce résultat, ainsi que du suivant, se trouve dans l'exposé [7]. □

Définition 30. Un *cycle fondamental* pour π est un cycle Z combinaison linéaire à coefficients entiers strictement positifs des R_i tel que $\forall 1 \leq i \leq r, Z \cdot R_i \leq 0$, et minimal (pour la taille des coefficients de la combinaison linéaire) parmi les cycles vérifiant ces conditions.

Proposition 29. Un tel cycle fondamental Z existe toujours pour une résolution minimale π et est unique. De plus, la singularité est rationnelle si et seulement si $p_a(Z) = 0$ et la multiplicité de la singularité est alors $-Z \cdot Z$.

Définition 31. Un *point double rationnel* est une singularité rationnelle de multiplicité 2.

Corollaire 6. Soit $Y \xrightarrow{\pi} X$ une résolution minimale d'un point double rationnel $x \in X$. Si on note $E = R_1 + \dots + R_r$ le cycle exceptionnel de π , on a $\forall 1 \leq i \leq r, R_i \simeq \mathbb{P}^1$ et $R_i^2 = -2$.

Corollaire 7. Le graphe de Dynkin d'un point double rationnel (ie celui de la matrice $(R_i \cdot R_j)$) est de type A_n, D_n ou E_n .

Références

- [1] P. Colmez et J-P. Serre, editor. *Correspondance Grothendieck-Serre*. Société Mathématique de France, 2001.
- [2] Séminaire Schafarevitch. Algebraic surfaces. *Proceedings of the Steklov institute of mathematics*, 75, 1967.
- [3] A. BEAUVILLE. Surfaces algébriques complexes. *Astérisque*, 54, 1978.
- [4] D. BURNS ; M.RAPAPORT. On the Torelli theorem for Kählerian K3-surfaces. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 8 (quatrième série), p.235-274, 1975.
- [5] E.HORIKAWA. On the periods of Enriques surfaces i, ii. *Mathematische Annalen*, 234, p.73-88 ; 235, p.217-246, 1978.
- [6] F.R.COSSEC ; I.V.DOLGACHEV. *Enriques surfaces I*. Birkhäuser, 1989.
- [7] H.PINKHAM. Singularités rationnelles de surfaces. *Lecture Notes in Mathematics*, 777, p.147-178, 1979.
- [8] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ; A.N. SKOROBOGATOV ; SIR PETER SWINNERTON-DYER. Double fibers and double covers : paucity of rational points. *Acta Arithmetica*, LXXIX.2, 1997.
- [9] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ; P.GILLE. Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable. *à paraître*, 2003.
- [10] J-P.SERRE. Cohomologie galoisienne. *Lecture Notes in Mathematics*, 5, 1964.
- [11] J-P.SERRE. *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, 1970.
- [12] J-P.SERRE. Lie algebras and Lie groups. *Lecture Notes in Mathematics*, 1500, 1992.
- [13] J.DIEUDONNÉ. La géométrie des groupes classiques. *Ergebnisse der Mathematik*, 5, 1955.
- [14] J.W.S CASSELS. *Rational quadratic forms*. Academic Press, 1978.
- [15] K.UENO. Classification theory of algebraic surfaces and compact complex spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, 439, 1975.
- [16] N.BOURBAKI. *Eléments de mathématiques : groupes et algèbres de Lie*. Hermann, 1968.
- [17] R.HARTSHORNE. Algebraic geometry. *Graduate Texts in Mathematics*, 52, 1977.
- [18] SIR PETER SWINNERTON-DYER. Diophantine equations : progress and problems. 2002.
- [19] T. GRABER ; J. HARRIS ; B. MAZUR ; J. STARR. Rational connectivity and sections of families over curves. math.AG/0210225, 2003.
- [20] W. BARTH ; C.PETERS. Automorphisms of Enriques surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 73, p.383-411, 1983.
- [21] W. BARTH ; C.PETERS ; A.VAN DE VEN. Compact complex algebraic surfaces. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge, Band 4*, 1984.