Exercices sur les Matrices : corrigé

Mardi 16 Février 2008

Exercice 1

C'est du simple calcul, on obtient $CA = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 14 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$; $BC = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $BCA = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I$, puis les puissances de A sont périodiques, égales successivement à A, A^2 et I, ce qu'on peut écrire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{3k} = I$; $A^{3k+1} = A$ et $A^{3k+2} = A^2$.

Exercice 3

Par le calcul, on obtient $J^2 = 4J$ puis $J^3 = 16J$. On peut alors se douter que chaque nouvelle multiplication par J multipliera le résultat par 4, ce qui devrait donner $J^k = 4^{k-1}J$. Prouvons-le par récurrence : c'est vrai pour $k = 1$ puisque $4^{1-1}J = J = J^1$, et si on suppose que $J^n = 4^{n-1}J$, alors $J^{n+1} = J^n J = 4^{n-1}J.J = 4^{n-1}J^2 = 4^{n-1}.4J = 4^n J$, ce qui prouve la formule pour la puissance $n+1$.

Exercice 4

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2z & = & x & + & 3y \\ y & + & 2t & = & 2x & + & 4y \\ 3x & + & 4z & = & z & + & 3t \\ 3y & + & 4t & = & 2z & + & 4t \end{array} \right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $z = \dfrac{3}{2}y$, et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation $x+z = t$. Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme $\left\{x, y, \dfrac{3}{2}y, x + \dfrac{3}{2}y\right\}$, où x et y sont deux réels quelconques.

Exercice 5

1. Soit donc une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Pour que la matrice AB soit nulle, il faut donc avoir $d = e = f = 0$, puis $a = b = c = 0$. Autrement dit, les deux premières lignes de B doivent être nulles, et la troisième est quelconque.
2. D'après la question précédente, C doit être de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si on effectue le produit CA pour une telle matrice, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g+2h & 2g+h+i & 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce produit soit nul, il faut donc avoir $g = -2h$ et $i = -2g + h = 5h$, soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & h & 5h \end{pmatrix}$, le réel h étant quelconque.

Exercice 6

On a $A = I + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul peu passionnant donne $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis les puissances supérieures de B sont nulles. On a donc, via le binôme de Newton (les matrices B et I commutant bien entendu), $A^k = (B+I)^k = \binom{k}{0} I^k + \binom{k}{1} B I^{k_1} + \binom{k}{2} B^2 I^{k-2} + \binom{k}{3} B^3 I^{k-3} = I + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} B^3$ (les termes suivants étant nuls), soit (attention les yeux) :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k + 2k(k-1) & 4k + 6k(k-1) + 4k(k-1)(k-2) \\ 0 & 1 & 2k & 3k + 2k(k-1) \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

On calcule (pour changer) $A + I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$, et la puissance suivante est bien nulle. Autrement dit, $A = B - I$, où B est une matrice nilpotente. On peut donc utiliser Newton : $A^k = (B-I)^k = (-I)^k + kB(-I)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} B^2 (-I)^{k-2} = (-1)^k \left(I - kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 \right)$, soit encore

$$A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -ka & -ka \\ -k & 1 + \frac{k(k-1)}{2} a & \frac{k(k-1)}{2} a \\ k & -\frac{k(k-1)}{2} a & 1 - \frac{k(k-1)}{2} a \end{pmatrix}$$

Exercice 8

La bonne méthode pour prouver ce genre de propriété est la récurrence. Cherchons donc à prouver la propriété P_k : il existe un réel que l'on notera a_k, tel que la matrice A^k soit de la forme $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_k & 1-2a_k & 2a_k \\ a_k & -a_k & a_k+1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Il faut vérifier que A^1, c'est-à-dire A elle-même, est de la forme donnée. Or, si on pose $a_1 = 3$, on a bien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times 3 & 1-2\times 3 & 2\times 3 \\ 3 & -3 & 3+1 \end{pmatrix}$, donc la propriété P_1 est vérifiée.

Hérédité : Faisons l'hypothèse de récurrence que P_k est vérifiée. Il nous faut alors prouver P_{k+1}, et pour cela calculer A^{k+1}. Or, $A^{k+1} = A \times A^k$ avec par hypothèse de récurrence $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_k & 1-2a_k & 2a_k \\ a_k & -a_k & a_k+1 \end{pmatrix}$ (où a_k est un réel pour l'instant indéterminé). Le calcul du produit donne alors $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4a_k & -5+4a_k & 6-4a_k \\ 3-2a_k & -3+2a_k & 4-2a_k \end{pmatrix}$. Si on appelle a_{k+1} le réel défini par $a_{k+1} = 3-2a_k$, A^{k+1} vérifie bien la propriété demandée puisque $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(3-2a_k) & 1-2(3-2a_k) & 2(3-2a_k) \\ 3-2a_k & -(3-2a_k) & 3-2a_k+1 \end{pmatrix}$. La propriété P_{k+1} est donc vérifiée, donc par le principe de récurrence, P_k est vrai pour tout entier $k \geq 1$.

Reste à calculer la valeur de a_k ! La suite a_k est arithmético-géométrique puisque $a_{k+1} = 3-2a_k$, son équation caractéristique est $x = 3-2x$, dont la solution est $x = 1$. On introduit donc la suite auxiliaire $(b_k)_{k\geq 1}$, définie par $b_k = a_k - 1$, et qui vérifie $b_{k+1} = a_{k+1} - 1 = (3-2a_k) - 1 = 2 - 2a_k = -2(a_k - 1) = -2b_k$. La suite b_k est donc une suite géométrique de raison -2. Par ailleurs, son deuxième terme est $b_1 = 2$ puisque $a_1 = 3$, donc $b_k = -(-2)^k$ et $a_k = 1-(-2)^k$. La matrice A^k peu donc s'écrire sous la forme $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(1-(-2)^k) & 1-2\times(1-(-2)^k) & 2\times(1-(-2)^k) \\ 1-(-2)^k & (-2)^k-1 & 2-(-2)^k \end{pmatrix}$.

Exercice 9

1. On commence par un peu de calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.
   Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.

2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons P_k la propriété « Il existe deux réels a_k et b_k tels que $A^k = a_kA^2 + b_kA$ ». Pour une fois on initialise la récurrence pour $k = 2$: P_2 est bien vérifiée en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (on a bien $A^2 = 1\times A^2 + 0\times A$). Supposons P^k vérifiée, on a alors $A^{k+1} = A\times A^k = A\times(a_kA^2+b_kA) = a_kA^3+b_kA^2 = a_k(6A-A^2)+b_kA^2 = (b_k-a_k)A^2+6a_kA$, qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.

3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes : $a_{k+1} = b_k - a_k$ et $b_{k+1} = 6a_k$. On a donc $b_k = 6a_{k-1}$ ce qui donne en remplaçant dans la première relation $a_{k+1} = -a_k + 6a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$, dont les deux racines sont $x = 2$ et $x = -3$. On a donc $a_k = \alpha 2^k + \beta(-3)^k$, avec $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ et $a_3 = 8\alpha - 27\beta = -1$. La résolution du système donne $\alpha = \frac{1}{10}$ et $\beta = \frac{1}{15}$, donc $a_k = \dfrac{2^{k-1}-(-3)^{k-1}}{5}$, et $b_k = 6\times\dfrac{2^{k-2}-(-3)^{k-2}}{5}$.

4. On se contentera d'écrire $A^k = \begin{pmatrix} 6a_k - 2b_k & -3a_k + b_k & -3a_k + b_k \\ -8a_k + 6b_k & 6a_k - 2b_k & 2a_k - 4b_k \\ 2a_k - 4b_k & -3a_k + b_k & a_k + 3b_k \end{pmatrix}$ sans préciser les valeurs. Pour $k = 1$, on obtient avec les formules de la question précédente $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, ce qui donne $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$, ce qui est indiscutablement vrai. Et pour $k = 0$, on obtient $a_0 = \frac{1}{6}$ et $b_0 = \frac{1}{6}$, et là ça ne marche plus...

Exercice 10

1. En posant $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a effectivement $M_{a,b} = aI + bK$.
2. Plutôt que de faire un calcul de produit de matrices pénible, utilisons la question précédente : $M_{a,b} \times M_{c,d} = (aI + bK)(cI + dK) = acI + adK + bcK + bdK^2 = acI + (ad + bc)K + bdK^2$, et on obtient la même chose en faisant le produit dans l'autre sens.
3. Un petit calcul montre que $K^2 = 2K$. Une récurrence immédiate montre alors que $K^k = 2^{k-1}K$. Comme $M_{1,-1} = I - K$, on a via Newton $M_{1,-1}^k = (I - K)^k = \sum_{p=0}^{k} I^p(-K)^{k-p} = I - (\sum_{p=0}^{k-1}(-2)^{k-p})K$.

Exercice 11

1. On obtient aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$.
2. On peut appliquer la formule du binome de Newton, les matrices I et A commutant : $B^n = (A + 2I)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k(2I)^{n-k} = I(2I)^n + nA(2I)^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}A^2I^{n-2} = 2^nI + n2^{n-1}A + n(n-1)2^{n-3}A^2$. Autrement dit, $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^n & 2^n & 0 \\ n(n-1)2^{n-2} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.
3. On peut en fait, en notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, écrire la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = BX_n$, dont on déduit facilement (une petite récurrence) que $X_n = B^nX_0$, autrement dit $a_n = n2^na_0$; $b_n = n2^na_0 + 2^nb_0$ et $c_n = n(n-1)2^{n-2}a_0 + n2^{n-1}b_n + 2^nc_n$.

Exercice 12

1. On a bien $A^2 = 5A - 4I$.
2. On procède comme à l'exercice 9, par récurrence. On peut l'initialiser à $k = 1$ ou $k = 2$, et en la supposant vérifiée au rang k, on a $A^{k+1} = A(a_kA + b_kI) = a_kA^2 + b_kA = 5a_kA - 4a_kI + b_kA$, qui est bien de la formé demandée avec $a_{k+1} = 5a_k + b_k$ et $b_{k+1} = -4a_k$.
3. On a donc $b_k = -4a_{k-1}$, puis $a_{k+1} = 5a_k - 4a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 5x + 4 = 0$, dont les racines sont 1 et 4. Après un calcul bref mais intense, on doit aboutir à $a_k = \dfrac{4^k - 1}{3}$ et $b_k = \dfrac{4 - 4^k}{3}$.

4. On en déduit que $A^k = \begin{pmatrix} 2a_k + b_k & a_k & a_k \\ a_k & 2a_k + b_k & a_k \\ a_k & a_k & 2a_k + b_k \end{pmatrix}$ et, comme $B = \frac{1}{4}A$, on a $B^k = \frac{1}{4^k}A^k$. On peut s'amuser à écrire les coefficients de cette matrice, les 4^k disparaissant dans les formules donnant a_k et b_k (enfin, il y en a, mais au dénominateur) et on remarque que les coefficients se rapprochent de plus en plus de ceux de la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 13

1. On peut commencer à droite ou à gauche au choix. $PT = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 24 \\ 4 & 8 & 0 \\ -4 & -0 & -12 \end{pmatrix}$ et $PTQ = \begin{pmatrix} 56 & 64 & 64 \\ 24 & 16 & 48 \\ -56 & -56 & -88 \end{pmatrix}$ ce qui vaut bien $8A$.
2. Le calcul donne $PQ = QP = 8I$, donc $A^2 = \frac{1}{64}PTQPTQ = \frac{1}{64}PT(8I)TQ = \frac{1}{8}PT^2Q$ puis $A^3 = A^2 \times A = \frac{1}{8}PT^2Q \times \frac{1}{8}PTQ = \frac{1}{64}PT^2(QP)TQ = \frac{1}{8}PT^3Q$. Par récurrence, on obtient facilement $A^k = \frac{1}{8}PT^kQ$. Or, T étant diagonale, on sait que $T^k = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$, ce qui permet si on le souhaite d'obtenir de belles formules pour les coefficients de A^k.

Exercice 14

1. C'est très simple, mais faisons-le de manière formelle pour nous échauffer avant la suite. En fait, on a $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Ici, il suffit de constater que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
2. Pas de difficulté non plus, $Tr(A + B) = \displaystyle\sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = Tr(A) + Tr(B)$.
3. Un peu plus rigolo : $Tr(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_{ii}$, avec $c_{ii} = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$, donc $Tr(AB) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}b_{ji}$. De la même façon, on a $Tr(BA) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{ij}a_{ji}$. Je vous laisse vous convaincre que les deux sommes sont égales.
4. Si une telle égalité était vérifiée, on aurait $Tr(AB - BA) = Tr(I) = n$. Mais d'après les questions précédentes, $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$, ce n'est donc pas possible.

Exercice 15

1. Calculons $M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 - 4a + 6a^2 & 2a - 3a^2 & 2a - 3a^2 \\ 2a - 3a^2 & 1 - 4a + 6a^2 & 2a - 3a^2 \\ 2a - 3a^2 & 2a - 3a^2 & 1 - 4a + 6a^2 \end{pmatrix}$. Le réel a_0 doit donc à la fois vérifier $1 - 4a_0 + 6a_0^2 = 1 - 2a_0$ et $2a_0 - 3a_0^2 = a_0$. La première équation a pour solutions 0 et $\frac{1}{3}$, et celles de la deuxième sont 0 et $\frac{1}{3}$ également. Il y a donc bien une solution non nulle. Dans ce cas, tous les coefficients de M_{a_0} sont égaux à $\frac{1}{3}$.

2. En posant $\alpha = 1 - 3a$, on a effectivement l'égalité demandée.
3. On a déjà vu que $P^2 = P$; on calcule que $Q^2 = Q$, $PQ = 0$ et $QP = 0$.
4. On a $M_a^2 = (P + \alpha Q)^2 = P^2 + \alpha PQ + \alpha QP + \alpha^2 Q^2 = P + \alpha^2 Q$. Par une récurrence facile, on obtient $M_a^k = P + \alpha^k Q$.