Exercices sur les variables aléatoires finies : corrigé

ECE1 Lycée Kastler

31 mars 2008

Exercice 1

Comme toujours, mieux vaut commencer par préciser l'univers des résultats avant de calculer les probabilités. On a $card(\Omega) = 6^3 = 216$. La probabilité d'obtenir trois 6 est de $\frac{1}{216}$ (un seul tirage favorable), celle d'en obtenir deux vaut $\frac{5 \times \binom{3}{2}}{215} = \frac{15}{216}$, et celle d'en obtenir un $\frac{5^2 \times \binom{3}{1}}{216} = \frac{75}{216}$. D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

On calcule sans problème $E(X) = \frac{-7}{216}$; $E(X^2) = \frac{269}{216}$ donc $V(X) \simeq 0.781$ et $\sigma(X) \simeq 0.884$.

Exercice 2

Commençons par constater que $|\Omega| = \binom{5}{3} = 10$ et que $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ (comme on tire trois jetons parmi les cinq le plus petit ne peut pas être plus grand que 3). On peut trouver des façons compliquées de calculer la loi de X mais le plus simple est peut-être de dénombrer « à la main ». On obtient

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

On a donc $E(X) = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$; $E(X^2) = \frac{27}{10}$ et $V(X) = \frac{9}{20}$.

Exercice 3

1. On a $P(X = 1) = \frac{1}{2}$; $P(X = 2) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 3) = \frac{1}{6}$, d'où $E(X) = \frac{5}{3}$; $E(X^2) = \frac{10}{3}$ et $V(X) = \frac{5}{9}$.
2. On a juste ajouté 3 à chacune des faces du dé précédent. Si on note Y la variable aléatoire correspondante, on a donc $P(Y = 4) = \frac{1}{2}$; $P(Y = 5) = \frac{1}{3}$ et $P(Y = 6) = \frac{1}{6}$, et $E(Y) = E(X) + 3 = \frac{14}{3}$.
3. On a $E(Z) = E(X) + E(Y) = \frac{19}{3}$. Pour la loi de Z, rappelons qu'on a par exemple $P(Z = 6) = P(X = 1) \times P(Y = 5) + P(X = 2) \times P(Y = 4)$. On obtient la loi suivante :

z_i	5	6	7	8	9
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

On retrouve bien $E(Z) = \dfrac{19}{3}$.

Exercice 4

Dans le cas où on est sans remise, on peut considérer que les tirages sont simultanés, ça ne change rien. On a alors $|\Omega| = \binom{10}{5} = 252$. De plus $B(\Omega) = \{0;1;2\}$ (on ne peut pas tirer plus de boules blanches qu'il n'y en a dans l'urne), et $P(B=0) = \dfrac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{56}{252} = \dfrac{2}{9}$; $P(B=1) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{140}{252} = \dfrac{5}{9}$; $P(B=2) = \dfrac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{2}{9}$. On en déduit $E(B) = 1$ et $E(B^2) = \dfrac{13}{9}$, donc $V(B) = \dfrac{4}{9}$. Pour N, pas besoin de se fatiguer, on a $B + N = 5$ donc $N = 5 - B$, et on en déduit sans calcul que $P(N=5) = P(N=3) = \dfrac{2}{9}$; $P(N=4) = \dfrac{5}{9}$; $E(N) = 5 - E(B) = 4$ et enfin $V(N) = V(B) = \dfrac{4}{9}$ (on utilise pour la variance la formule $V(aX+b) = a^2V(X)$, avec ici $a = -1$ et $b = 5$).

Dans le cas où il y a une remise, les calculs sont assez différents. On a $|\Omega| = 10^5$; $B(\Omega) = \{0;1;2;3;4;5\}$ et la loi suivante pour B :

b_i	0	1	2	3	4	5
$P(B=b_i)$	$\dfrac{\binom{5}{0}\times 8^5\times 2^0}{10^5}$	$\dfrac{\binom{5}{1}\times 8^4\times 2^1}{10^5}$	$\dfrac{\binom{5}{2}\times 8^3\times 2^2}{10^5}$	$\dfrac{\binom{5}{3}\times 8^2\times 2^3}{10^5}$	$\dfrac{\binom{5}{4}\times 8^1\times 2^4}{10^5}$	$\dfrac{\binom{5}{5}\times 8^0\times 2^5}{10^5}$

En effet, pour tirer deux boules blanches par exemple, le nombre de cas favorables est 2^2 (pour le tirage des deux boules blanches) $\times 8^3$ (pour le tirage des trois boules noires) $\times\binom{5}{2}$ (pour la place des deux boules blanches dans le tirage obtenu). On ne peut éviter de tenir en compte l'ordre sinon les possibilités ne sont pas équiprobables. On peut mettre les probabilités précédentes sous une forme un peu plus agréable :

b_i	0	1	2	3	4	5
$P(B=b_i)$	$\dfrac{1024}{3125}$	$\dfrac{256}{625}$	$\dfrac{128}{625}$	$\dfrac{32}{625}$	$\dfrac{4}{625}$	$\dfrac{1}{3125}$

Avec un peu de courage et une bonne calculatrice, on se convainc que $E(B) = 1$ (comme précédemment) et on calcule $E(B^2) = \dfrac{9}{5}$, donc $V(B) = \dfrac{4}{5}$. Comme dans le cas précédent, on en déduit sans calcul que $E(N) = 1$ et $V(N) = \dfrac{4}{5}$, et la loi de N est obtenue en « retournant » le tableau précédent :

n_i	0	1	2	3	4	5
$P(N=n_i)$	$\dfrac{1}{3125}$	$\dfrac{4}{625}$	$\dfrac{32}{625}$	$\dfrac{128}{625}$	$\dfrac{256}{625}$	$\dfrac{1024}{3125}$

Exercice 5 (rien à voir avec les variables aléatoires, mais je le trouve rigolo)

L'avion à deux moteurs arrive à bon port si ses deux moteurs restent intacts, donc avec une probabilité $(1-p)^2$. Celui à quatre moteurs peut avoir ses quatre moteurs en marche (proba $(1-p)^4$) ou un moteur qui tombe en panne (proba $4p(1-p)^3$, il y a quatre choix de moteur possible). L'avion à deux moteurs est plus sûr si $(1-p)^2 \geq (1-p)^4 + 4p(1_p)^3$, c'est-à-dire si $(1-p)^2(1-(1-p)^2 - 4p(1-p)) \geq 0$. sachant que $0 \leq p \leq 1$, le signe de ce qui est à gauche dépend de celui de $1-(1-p)^2 - 4p(1-p) = 3p^2 - 2p = 2p(3p-2)$, qui est positif si $p \geq \dfrac{2}{3}$, auquel cas je vous déconseille de toute façon fortement de prendre cet avion, qui va s'écraser la majeure partie du temps.

Exercice 6

On a $|\Omega| = 2^4 = 16$, et sur ces 16 lancers, un seul donnera 0 Face, quatre donneront exactement une Face etc, d'où la loi de X :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

J'ai provisoirement la flemme de faire une belle courbe avec un logiciel adapté, je me contente donc de décrire la courbe : $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$; $F_X(x) = \frac{1}{16}$ si $0 \leq x < 1$; $F_X(x) = \frac{5}{16}$ si $1 \leq x < 2$; $F_X(x) = \frac{11}{16}$ si $2 \leq x < 3$; $F_X(x) = \frac{15}{16}$ si $3 \leq x < 4$ et $F_X(x) = 1$ si $4 \leq x$. Rappelons que pour obtenir la courbe on utilise que $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{k \leq x} P(X = k)$.

Exercice 7

1. Si $n = 2$, on a quatre suites de lancers possibles : PP ; PF ; FP et FF. Attention, ils n'ont pas tous la même probabilité ! On a $P(PP) = p^2$; $P(PF) = P(FP) = pq$ et $P(FF) = q^2$. Parmi les quatre possibilités, il y en a deux (PP et FF) qui ne font pas apparaitre de changement (donc pour lesquelles $X_2 = 0$) et les deux autres pour lesquelles il y a un changement, donc $X_2 = 1$. On en déduit :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$p^2 + q^2$	$2pq$

2. Dans le cas où $n = 3$, on a huit suites de lancers possibles, de probas différentes, que je regroupe dans le tableau suivant :

lancers	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
probabilité	p^3	p^2q	p^2q	pq^2	p^2q	pq^2	pq^2	q^3
changements	0	1	2	1	1	2	1	0

Pour déduire la loi de X_3 du tableau, il suffit d'additionner pour chaque valeur possible de X_3 les probabilités des cas correspondants :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$p^3 + q^3$	$2pq(p + q) = 2pq$	$pq(p + q) = pq$

On a donc $E(X^3) = 2pq + 2pq = 4pq$ et $E(X^2) = 2pq + 4pq = 6pq$ donc $V(X_3) = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq)$.

Exercice 8 (d'après EM Lyon 2000)

Premier protocole

1. Il suffit d'appliquer la formule des probabilités composées. Si on tire le premier Roi rouge au $k$ème tirage, c'est qu'on a eu autre chose aux $k - 1$ premiers tirages. La probabilité de ne pas obtenir un Roi rouge vaut $\frac{2n - 2}{2n}$ au premier tirage, puis $\frac{2n - 3}{2n - 1}$ au deuxième (on a tiré une carte qui n'est pas un Roi rouge), jusqu'à $\frac{2n - k}{2n - k + 2}$ au $k - 1$ème tirage. Enfin, la probabilité d'avoir le Roi rouge au $k$ème tirage vaut $\frac{2}{2n - k + 1}$. Quand on fait le produit de toutes ces probabilités, presque tout se simplifie et il reste $\frac{2(2n - k))}{2n(2n - 1)}$, ce qui prouve bien que $P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$.

2. Il suffit de connaitre les sommes classiques : $E(X) = \sum_{1 \leq k \leq 2n-1} k\frac{2n-k}{n(2n-1)} = \sum_{1 \leq k \leq 2n-1} \frac{2nk}{n(2n-1)} - \sum_{1 \leq k \leq 2n-1} \frac{k^2}{n(2n-1)} = \frac{2n}{n(2n-1)} \times \frac{(2n-1) \times 2n}{2} - \frac{1}{n(2n-1)} \frac{(2n-1) \times 2n \times (4n-1)}{6} = 2n - \frac{4n-1}{3} = \frac{2n+1}{3}$.
3. Si vous comprenez bien ce que dit l'énoncé, on a simplement $G_1 = a - X$ donc $E(G_1) = a - E(X) = a - \frac{2n+1}{3}$.

Deuxième protocole

1. La probabilité qu'un Roi rouge apparaisse au $k$ème tirage n'a pas changé depuis la première partie, on a donc $P(G_2 = a - k) = P(X = k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$.
2. On a $G_2 = -n$ si on n'a pas tiré de Roi rouge sur les n premières cartes, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \dots \frac{2n-n-1}{2n-n+1} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.
3. C'est du calcul : $E(G_2) = \sum_{1 \leq k \leq n} (a-k)\frac{2n-k}{n(2n-1)} - n\frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{1 \leq k \leq n} (2an - (2n + a)k + k^2) - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} = \frac{1}{n(2n-1)} \left(2an^2 - n^2(n+1) - \frac{an(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n-1)}{2} \right) = \frac{1}{6(2n-1)} \left(12an - 6n^2 - 6n - 3an - 3a + 2n^2 + 3n + 1 - 3n^2 + 3n\right) = \frac{3(3n-1)a - 7n^2 + 1}{6(2n-1)}$.

Comparaison des deux protocoles

Si on a $n = 16$, on a $E(G_1) = a - 11$ et $E(G_2) = \frac{141a - 1791}{186} = \frac{47a - 597}{62}$. Le premier protocole est le plus favorable au joueur si $a - 11 \geq \frac{47a - 597}{62}$, c'est-à-dire si $\frac{15a}{62} \geq \frac{85}{62}$, soit $a \geq \frac{17}{3}$. Si $a \leq 5$, le deuxième protocole est donc plus avantageux, mais à partir de $a = 6$, c'est le premier qui est plus intéressant (en supposant a entier).