

Fonctions

Jeudi 26 Juin 2008

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-2; 5]$.
2. Donner le tableau de variation de f sur cet intervalle.
3. Expliquer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale (d) dont on déterminera l'équation.
4. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse $x_A = 0$.
5. Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point B d'abscisse $x_B = 4$.
6. Tracer précisément sur une feuille de papier millimétré, la courbe $(\mathcal{C}_f)$, les droites d , (T_A) et (T_B) .

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3x - 4 + \frac{5}{x-1}$.

1. (a) Quelle est la valeur interdite pour f ?
(b) Calculer les deux limites associées à cette valeur.
(c) Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?
2. (a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) Calculer $f(x) - (3x - 4)$. À l'aide d'un calcul de limites, montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de la fonction f admet une asymptote oblique que l'on précisera.
3. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f .
4. Donner le tableau de variations complet de f . Préciser les éventuelles tangentes horizontales.
5. Déterminer une équation de la tangente (T_A) au point A d'abscisse $x_A = 2$.
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$, ses asymptotes et les tangentes étudiées dans l'exercice.

Exercice 3

1. Représenter dans un même repère orthonormal sur l'intervalle $[-4; 3]$
 - la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2$,
 - la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 10$.
2. Utiliser ces représentations graphiques pour résoudre graphiquement :
 - (a) l'équation $(x+2)^2 = 5x + 10$;
 - (b) l'inéquation $(x+2)^2 \leq 5x + 10$.
3. Retrouver les résultats précédents par le calcul.

Exercice 4

- (a) Résoudre l'équation : $x^2 + 2x - 2 = 0$.
(b) À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $x^2 + 2x - 2$ suivant les valeurs de x .
- Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4; 4]$ par : $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2}$.
Montrer que $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2+2)^2}$.
- A l'aide de la première question, dresser un tableau de variation de f sur I .
- Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f sur I .
- Quelles sont la plus grande valeur et la plus petite valeur prises par f sur I ?
- (a) Trouver une équation de la tangente T au point A d'abscisse $x_A = 0$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
(b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) .

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 2[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

- Étudier la limite en 2 de f . En déduire une interprétation graphique.
- Étudier la limite en $-\infty$ de $f(x)$.
- (a) Démontrer que pour tout $x < 2$, $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x - 2}$.
(b) Étudier la limite en $-\infty$ de $(f(x) - (x - 2))$ et en déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de la fonction f .
- Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty; 2[$.
- $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, préciser.
- En déduire les variations de f sur $] -\infty; 2[$.
- Donner le tableau de variation complet de f sur $] -\infty; 2[$.
- Déterminer l'équation de la tangente (T_A) à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse $x_A = 0$.
- Tracer dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal $(\mathcal{C}_f)$, les tangentes et les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- (a) Résoudre graphiquement sur $] -\infty; 2[$ l'équation : $f(x) = 0$.
(b) Résoudre sur $] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$ l'équation : $f(x) = 0$.
- (a) Résoudre graphiquement sur $] -\infty; 2[$ l'inéquation : $f(x) \leq 0$.
(b) Résoudre sur $] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$ l'inéquation : $f(x) \leq 0$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-7; 7]$ par : $f(x) = \frac{8x+6}{x^2+1}$.

- Expliquer pourquoi f est bien définie sur $[-7; 7]$.
- Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
- Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.

4. Soit la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x + 6$. Déterminer (par le calcul) pour quelles valeurs de x la droite $(\mathcal{D})$ est située au dessus de $(\mathcal{C}_f)$.
5. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-4(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$.
6. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[-7; 7]$.
7. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point B d'abscisse 0.
8. Tracer dans un repère les droites $(\mathcal{D})$, (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 7

Une entreprise fabrique une quantité q d'un certain produit. q est exprimée en tonnes et varie de 0 à 20. Le coût total de production est, en milliers d'euro, $C(q) = q^3 - 30q^2 + 300q$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction C .
2. La production est vendue intégralement au prix de 84 000 euros la tonne. La recette totale, en milliers d'euros est donc $R(q) = 84q$.
 - (a) Étudier le signe de la fonction $B(q) = R(q) - C(q)$. Interpréter le résultat en terme de bénéfice.
 - (b) Pour quelle valeur de q le bénéfice est-il maximal ?