

Statistiques, Trigonométrie

Mercredi 25 Juin 2008

Exercice 1

Temps en h	[0; 1[	[1; 1.5[	[1.5; 2[	[2; 3[	[3; 5[
Fréquence cumulée croissante	0.17	0.51	0.74	0.88	1
Fréquence cumulée décroissante	1	0.82	0.48	0.25	0.11

Histogramme à venir.

Exercice 2

1. L'étendue est de 4.5 (il faut prendre les extrémités des intervalles extrêmes pour la calculer), le mode est l'intervalle $[3; 3.5[$, et l'effectif total 13 540.

2. Hop, retour du tableau :

Poids en kg	[0, 5; 1, 5[	[1, 5; 2[	[2; 2, 5[	[2, 5; 3[	[3; 3, 5[	[3, 5; 4[	[4; 5]
Effectif cumulé croissant	105	273	916	3616	9152	12605	13540

3. La courbe arrive.
4. On doit obtenir une médiane de l'ordre de 3.3 kg.

Exercice 3

1. On utilise la formule du cours dans le cas de deux sous-groupes : $\bar{x} = \frac{20 \times 10.2 + 15 \times 11.8}{35} \simeq 10.89$.
2. On réutilise la formule, la nouvelle moyenne est d'environ 11.46.
3. Notons x la moyenne de l'autre classe, on a donc $\frac{10.89 \times 35 + x \times 30}{65} = 10.7$, dont on déduit $x \simeq 10.48$.

Exercice 4

1. Un calcul brutal donne une moyenne de 75.72 euros (rappelons qu'on calcule la moyenne à l'aide du centre des classes dans ce genre de cas).
2. Ca vient...
3. Si les factures sont équitablement réparties entre 20 et 40, on peut estimer qu'il y a 46 factures de montant inférieur à 30 euros.

Exercice 5

1. Faisons donc :

Poids (en kg)	[60; 64[	[64; 68[	[68; 72[	[72; 76[	[76; 80[	[80; 84[	[84; 88[
Fréquence	7%	12%	36%	15%	16%	10%	4%
Effectifs	21	36	108	45	48	30	12
Effectifs cumulés croissants	21	57	165	210	258	288	300

- Il y en 210 , donc 70%.
- On obtient un poids moyen d'environ 72.68 kg.
- Encore un histogramme à faire.

Exercice 6

On peut simuler l'expérience de la façon suivante : on utilise comme d'habitude la fonction de tirage aléatoire de la calculatrice, et on décide que chaque série de chiffres représente une famille. Un chiffre impair représente un garçon et un chiffre pair une fille, on compte donc dans chaque ligne le nombre de chiffres nécessaires avant d'en avoir un pair et un impair (dans le cas très rare où tous les chiffres de la série sont pairs ou impairs, on continue sur la série suivante).

Une simulation que j'ai effectué donne 27 familles de deux enfants, 15 familles de trois enfants, 4 de quatre enfants, 3 de cinq enfants et une de six enfants, soit une moyenne de 2.72 enfants. La théorie (beaucoup trop compliquée pour que je puisse vous l'expliquer ici !) dit qu'on doit avoir une moyenne de 3 enfants par famille.

Exercice 7

C'est assez simple, on tire des séries de chiffres à la calculatrice, on enlève tous les chiffres qui ne sont pas compris entre 1 et 6, puis on les regroupe par groupes de 3 (ou 4), et on regarde quelle proportion de ces groupes contient un 6. Normalement, on doit trouver plus de groupes sans 6 avec trois dés, mais plus de groupes avec 6 avec quatre dés. En effet, quand on lance un dé, on a une chance sur 6 d'obtenir un 6, soit cinq chances sur 6 de ne pas avoir de 6. Quand on lance trois dés à la fois, la probabilité qu'on a de n'avoir aucun 6 est donc $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$, qui est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Par contre, avec quatre dés, on descend à $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$, qui est légèrement inférieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 8

- $(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \cos x \sin x = 1 - 2 \cos x \sin x$
- $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \cos x \sin x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $(1 + \cos x + \sin x)^2 = 1 + \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x \sin x = 2(1 + \cos x + \sin x + \cos x \sin x) = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$

Exercice 9

- On a $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = \cos x + \sin(2x) = f(x)$, donc f est bien 2π -périodique.
- En effet, on a, quel que soit x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$, donc en additionnant $-2 \leq f(x) \leq 2$. La courbe représentative de la fonction est donc comprise entre les deux droites horizontales d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

3. Un petit tableau sera aussi simple pour résumer les valeurs :

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$f(x)$	-1	0	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	0
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
1	$\sqrt{3}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	$-\sqrt{3}$	-1

4. Ça ne saurait tarder à venir.

5. Ça ressemble à ceci :

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	-1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1

6. Oui, son minimum est $-\sqrt{3}$, atteint en $\frac{5\pi}{6}$, puis périodiquement tous les 2π ; et son maximum est $\sqrt{3}$, atteint en $\frac{\pi}{6}$, puis également tous les 2π .

Exercice 10

- On essaiera.
- Au vu du thème de l'exercice, on va plutôt mesurer en radian. On a $\widehat{CDE} = \frac{\pi}{3}$ puisque le triangle CDE est équilatéral, donc $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
- Le triangle AED est isocèle en D puisque $DE = DC = CA = 1$.
- Ces deux angles ont pour mesure $\frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{12}$.
- Le triangle AEB est aussi isocèle (en E), mais ça ne sert en fait à rien pour répondre à la question : $\widehat{EAB} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$.
- Pour EG , c'est à savoir, la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $GH = 1$ (par construction, $BCGH$ et $ADGH$ sont des rectangles), on a donc $EH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Dans le triangle rectangle AEH , on a $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{EH}{AH} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$ (on a $AH = \frac{1}{2}$ car le triangle AEB étant isocèle, sa hauteur issue de E est aussi médiane de $[AB]$).
- Utilisons Pythagore : $AE^2 = \frac{1}{4} + EH^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$. Pour vérifier que la valeur donnée par l'énoncé pour AE est bonne, le plus simple est de l'élever au carré et de vérifier qu'on trouve bien la même chose que ci-dessus (c'est pour ça qu'on vous donnait la valeur) : $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4} = 2 - \sqrt{3}$. C'est bon.

9. On a donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{6}$ (en utilisant la quantité conjuguée) et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$