

Suites

Mardi 24 Juin 2008

Rappels de cours

En gros, une suite de réels est simplement une liste de nombres numérotés (habituellement à partir de 0) et infinie. on note ainsi le premier terme u_0 , le deuxième u_1 , le troisième u_2 , etc. On appelle terme général de la suite le terme u_n , et on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite proprement dite.

Une autre façon de voir les choses est de dire qu'une suite est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$. L'image de 0 est notée u_0 plutôt que $u(0)$, et de même pour tous les entiers.

Il existe essentiellement trois façons de définir une suite :

- par la liste de ses éléments, par exemple $1; 3; 5; 7; \dots$. Ce n'est possible que lorsque la suite est très simple et prévisible, et peu pratique pour les calculs, on n'utilise quasiment jamais ce genre de définition.
- par une formule, comme pour une fonction, par exemple $u_n = 3n^2 - n + 2$. Très pratique pour les calculs (pour obtenir la valeur d'un terme de la suite, il suffit de remplacer n par la valeur souhaitée), c'est la forme qu'on cherchera le plus souvent à obtenir.
- par une relation de récurrence, c'est-à-dire en exprimant u_{n+1} à partir de u_n et en donnant la valeur de u_0 (autrement dit, on connaît le point de départ et la façon de passer d'un terme au suivant), par exemple $u_{n+1} = 3u_n - 2$ et $u_0 = 1$. Moins pratique que la forme précédente puisqu'on doit a priori calculer tous les termes de la suite un par un. Le but de la suite du cours est justement de passer de cette forme à la précédente dans quelques cas simples.

Comme pour les fonctions, une des principales choses qu'on aura à étudier pour les suites sera le sens de variation (la suite est-elle croissante ? décroissante ?), mais les techniques utilisées ne sont pas du tout les mêmes. En général, pour connaître le sens de variation d'une suite, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on cherche à déterminer son signe.

Exemple : si $u_n = n^2 + 2n - 3$, on a $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 2(n+1) - 3 - n^2 - 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - 3 - n^2 - 2n + 3 = 2n + 3 \geq 0$, donc la suite est croissante.

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur, autrement dit une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$, le réel a étant appelé raison de la suite.

Une suite arithmétique de raison a peut se mettre sous la forme générale $u_n = u_0 + na$ (et réciproquement, toute suite de cette forme est arithmétique). Elle est croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$, et de plus la somme de ses $n+1$ premiers termes est donnée par la formule $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$.

Un exemple parmi tant d'autres : la population d'une ville est de 10 000 habitants en 2 000 et augmente de 200 habitant chaque année. Si on note u_n le nombre d'habitants de la ville n années parès l'an 2 000, (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10\,000$ et de raison 200. on aura par exemple pour 2 050, $u_{50} = 10\,000 + 50 \times 200 = 20\,000$ habitants.

Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur, autrement dit une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = bu_n$, le réel b étant appelé raison de la suite.

Une suite géométrique de raison b peut se mettre sous la forme générale $u_n = b^n u_0$ (et réciproquement, toute suite de cette forme est géométrique). Elle est croissante si $b > 1$, décroissante si $0 < b < 1$ (on n'étudie pas les suites géométriques de raison négative), et de plus la somme de ses $n + 1$ premiers termes est donnée par la formule $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - b}$.

Pour les exemples, n'importe quelle augmentation ou diminution régulière en pourcentage fait l'affaire, par exemple un placement de 300 euros à intérêts composés à 2% par an. Au bout de 30 ans, on est à la tête de $300 \times 1.02^{30} \simeq 543.4$ euros.

Exercices

Indices

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -3n^2 + 5$.

Donner l'expression de $u_n + 1$, u_{n+1} , u_{n^2} , u_{2n} , $u_{2n+1} + 2$.

Sens de variation

On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \frac{1}{2n-1}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2n-1)(2n+1)}$.

3. En déduire le sens de variation de la suite.

Arithmétiques et géométriques

On sait que (u_n) est arithmétique de raison a :

- Si $a = -3$ et $u_0 = 10$, calculer u_{15} et u_{132} .
- Si $a = 5$ et $u_5 = -2$, calculer u_0 et u_{12} .
- Si $u_4 = 8$ et $u_2 = 16$, calculer r et u_{10} .

On sait désormais que (u_n) est géométrique de raison b :

- Si $u_0 = 4$ et $b = 3$, calculer u_3 et u_{32} .
- Si $u_0 = 2$ et $b = \frac{1}{2}$, calculer u_4 et u_8 .
- Si $u_4 = 5$ et $u_5 = 7$, calculer b et u_3 .

Comparaison de suites

On étudie l'évolution du prix d'un ticket de métro dans la grande ville de Krobaglop. En janvier 2 000, le ticket coûtait 10 zloruks (unité monétaire locale). Au cours de l'année 2 000, le prix du ticket subit une augmentation de 8% en mai, puis une diminution de 6% en juillet et une nouvelle augmentation de 4% en octobre.

1. Quel est le pourcentage d'évolution globale du prix du ticket sur l'année 2 000 (arrondi au dixième de pourcent) ?
2. En déduire le prix du ticket au 1er janvier 2 001.
3. En admettant que la hausse globale annuelle du prix du ticket restera la même, combien vaudra-t-il début 2 002 ? Début 2 003 (arrondi au centime près si besoin est) ?

4. On note (u_n) le prix du ticket après n années. Déterminer la valeur de u_n , en déduire le prix du ticket en 2 010, 2 020, et 2 050.

La ville voisine de Schmurtz vendait aussi ses tickets à 10 zlourks au 1er janvier 2 000, mais a préféré tabler sur une augmentation régulière du prix du ticket de 75 centimes de zlourks par an (l'inflation a toujours été élevée à Schmurtz).

1. Déterminer le prix du ticket en 2 001 et en 2 002.
2. On note (v_n) le prix du ticket après n années. Déterminer la valeur de v_n , en déduire le prix du ticket en 2 010, 2 020, et 2 050.
3. En quelle année le prix des tickets à Krobaglop dépasse-t-il celui des tickets de Schmurtz ?

Sans titre

Une usine d'objets en résine fabrique des boîtiers de portable. La machine fonctionne 7 jours sur 7 durant le mois de juin. La production est de 2 500 boîtiers le 31 mai. À partir du 1er juin, la production augmente de 50 boîtiers par jour. Pour un client, on stocke la production du 11 juin au 24 juin inclus. On nomme u_n la production le jour n du mois de juin.

1. Etablir la formule donnant u_n en fonction de n et calculer la production du 24 juin.
2. Calculer le nombre de boîtiers stockés pour le client.
3. On vend chaque boîtier 1,40 euros pièce, prix TTC. Calculer le montant de la facture TTC pour le client.

Un classique avec des salaires

Une entreprise recrute un nouvel employé et lui propose deux évolutions possibles pour son salaire : salaire initial de 23 000 euros (salaire annuel) et augmentation annuelle de 500 euros ; ou bien salaire initial de 21 000 euros et augmentation annuelle de 4%.

1. Calculer son salaire après un an et après deux ans dans chacun des deux cas.
2. On note u_n et v_n respectivement son salaire après n années dans chacun des cas. Déterminer l'expression de u_n et de v_n .
3. Calculer u_5 , v_5 , u_{10} et v_{10} .
4. L'employé compte rester 8 ans dans cette entreprise. Quelle formule lui conseillez-vous ?

Du calcul

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On définit une deuxième suite (v_n) par $v_n = u_n - 2n + 6$. Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
3. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
4. En déduire la valeur de v_n puis celle de u_n .
5. Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{20}$.
6. Calculer $T = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.