Calcul algébrique

Lundi 23 Juin 2008

À savoir et à savoir faire

- Calculer des pourcentages, composer des pourcentages (évolutions successives données en pourcentages), passer d'une augmentation ou d'une diminution en pourcentage à un produit par un coefficient multiplicateur et vice versa. Déterminer un pourcentage d'évolution à l'aide des valeurs avant et après évolution.
- Résoudre des systèmes d'équations linéaires (deux équations à deux inconnues habituellement).
- Tracer des droites à partir de leur équation, ou réciproquement lire une équation de droite à partir de son tracé.
- Résoudre des équations du second degré, et déterminer le signe d'un trinome.
- Plus généralement, faire des tableaux de signe, résoudre des équations et inéquations simples, bref tout ce que vous saviez déjà faire en seconde.

Exercices

Quelques petits calculs de pourcentages

1. Leonard a acheté une voiture neuve 15 000 euros, mais sa valeur baisse de 10% chaque année. Combien pourra-t-il la revendre au bout d'un an ? De deux ans ?
2. Un magasin de vêtements effectue des remises de 30% en période de soldes. Combien vaut maintenant le pull qui était affiché à 50 euros avant la remise ? Combien valait le T-shirt qui est désormais à 14 euros avant remise ?
3. Vrai ou Faux : si on effectue deux remises successives de 15% et de 10% sur un même prix, peu importe l'ordre, le prix final sera le même ? Si on augmente le prix d'un objet de 20% puis qu'on le diminue de 20%, on revient au prix initial ?
4. Un article valant 250 euros est augmenté de 25% puis diminué de 20%. Quel est prix final ? Quel est le pourcentage d'évolution global ?

Des histoires d'indice

La consommation d'eau d'une résidence était de 247 m^3 en janvier 2 007 (base 100 de l'indice).

1. La consommation en févirer est de 230 m^3. Quel est l'indice correspondant ?
2. En mars, l'indice est de 106, quelle était la consommation ?
3. La consommation a augmenté de 5% en avril. Quel est l'indice correspondant ?
4. Quel est le pourcentage d'augmentation de la consommation entre janvier et avril ? Entre février et avril ?

Un peu plus de pourcentages

Les pays de la mer du Nord sont devenus en 2 000 les premiers fournisseurs de pétrole de la France, avec 32.3% sur un total de 72.4 millions de tonnes. Le Proche-Orient ne fournit plus que 28.3% contre 78.9 en 1 978, période à laquelle la France importait 115.6 millions de tonnes. Quand aux pays africains, ils sont passés de 14.7% à 20.8% pendant la même période.

1. Quelle est la variation en pourcentage des importations entre 1 978 et 2 002 ?
2. Les importations du Proche-Orient ont-elles diminué de près de la moitié ?
3. Les pays africains fournissent-ils moins de pétrole qu'avant ?
4. Les importations du Proche-Orient en 1 978 étaient-elles 4 fois supérieures à celles de la mer du Nord en 2 000 ?

Systèmes en vrac

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & -2 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 21 \\ 5x & - & 4y & = & 41 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 12x & + & 16y & = & 20 \\ 9x & + & 12y & = & 10 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & \sqrt{3}y & = & 4 \\ x\sqrt{3} & + & 2y & = & 3\sqrt{3} \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 5 \\ -6x & + & 2y & = & -10 \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x^2 & - & y^2 & = & 3 \\ x^2 & + & 4y^2 & = & 40 \end{array}\right.$
7. $\left\{\begin{array}{rcrcr} \dfrac{2}{x-2} & + & \sqrt{y+1} & = & 6 \\ \dfrac{-1}{x-2} & + & 3\sqrt{y+1} & = & 11 \end{array}\right.$

Du classique pour commencer

Trois opérateurs téléphoniques proposent les forfaits suivants :

- pour le premier, 6 euros l'heure de communications.
- pour le deuxième, 4 euros de l'heure, mais avec un fixe de 10 euros.
- enfin, pour le troisième, c'est 60 euros quel que soit le temps de communication.

Représenter les trois types de forfait en fonction du temps passé au téléphone, et déterminer dans quel cas chacun d'entre eux est le plus intéressant.

Programmation linéaire

Un voleur a réussi à forcer l'entrée d'un musée, mais se trouve limité par les conditions matérielles dans sa tentative d'empocher le plus gros butin possible. Il décide de se limiter à emporter quelques tableaux et quelques vases. Chacun des objets mettant du temps à emporter, il ne peut en prendre plus de 10 au total. Par ailleurs, chaque tableau prend un volume de 12 litres dans son sac, et chaque vase prend 8 litres. Or, son sac est d'une contenance de 104 litres (curieux, mais c'est comme ça). Il peut espérer revendre chaque tableau 400 euros et chaque vase 300 euros.

1. Soit x le nombre de tableaux et y le nombre de vases emportés par notre voleur. Écrire les deux contraintes (nombre d'objets et volume) sous forme d'inégalités faisant intervenir x et y.

2. Réecrire ces inégalités sous forme d'« inéquations de droites » (de la forme $y \leq ax + b$ ou $y \geq ax + b$).
3. Représenter les deux droites correspondantes dans un même repère et hachurer les zones du plan correspondant à des couples (x, y) impossible pour notre valeur (au passage, n'oubliez pas que x et y sont censés être positifs).
4. Donner des exemples de combinaisons possibles pour notre voleur, et l'argent qu'il tirera de la revente des objets dans chaque cas.
5. On suppose que le voleur a emporté pour 2 400 euros de butin. Montrer que x et y vérifient alors une équation qui peut être mise sous forme d'équation de droite.
6. Représenter la droite en question dans votre repère et désuisez-en les valeurs de x et y possibles pour un butin de 2 400 euros (rappel : x et y sont entiers).
7. Si on change la valeur de 2 400 par une autre, on peut toujours trouver les valeurs en traçant une droite. Que peut-on dire concernant cette droite et la précédente droite tracée ? Quelle condition doit-on avoir sur la droite pour qu'il existe une combinaison permettant d'amasser le butin fixé ?
8. En déduire une méthode graphique pour déterminer le butin maximal, et le déterminer !

Second degré

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $3x^2 + 4x - 7 = 0$
2. $5x^2 + 4x = 0$
3. $x^2 + 4x + 8 \geq 0$
4. $4x^2 + 4x - 15 \leq 0$
5. $x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0$

Un peu de tout

Un entreprise d'électronique décide de lancer un nouveau produit, dont elle veut doubler le chiffre de ventes en l'espace de deux ans. Pour cela, elle prévoit de l'augmenter de $t\%$ la première année, puis de $(1 + t)\%$ la deuxième année.

1. Exprimer en fonction du prix de vente initial V le prix de vente après un an et après deux ans.
2. Déterminer une équation vérifiée par t pour que l'entreprise atteigne son objectif.
3. Résoudre cette équation.
4. Le cout de production de x objets est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 81$ (en centaines d'euros). Montrer que $C(x) - 65 = (x - 2)(x^2 - 4x - 8)$.
5. Pour quelles valeurs de x le cout de production vaut-il 6 500 euros ?