Géométrie, suite et fin

Lundi 23 Juin 2008

Vérifions les bases

1. Si $ABDC$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Comme $\overrightarrow{AB}$ a pour cooronnées $(2-(-4);-1-(-3)) = (6;2)$, $\overrightarrow{CD}$ aussi, donc $x_D - x_C = 6$ et $y_D - y_C = 2$, soit $x_D = 6+0 = 6$, et $y_D = 2+3 = 5$. Finalement, D a pour coordonnées $(6;5)$.
2. On utilise la petite formule du cours : $x_E = \dfrac{x_C + x_D}{2} = 3$ et $y_E = \dfrac{y_C + y_D}{2} = 4$, donc $E(3;4)$.
3. On a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE}$, donc ses coordonnées sont $(7;7)$, d'où $x_F - x_E = y_F - y_E = 7$. On en déduit rapidement $F(10;11)$.
4. Utilisons les vecteurs : on a $\overrightarrow{AD}(10;8)$ et $\overrightarrow{CF}(10;8)$. Les deux vecteurs étant égaux, $ADFC$ est bien un parallélogramme.
5. Vérifions : $\dfrac{x_B + x_F}{2} = 6 = x_D$ et $\dfrac{y_B + y_F}{2} = 5 = y_D$, donc D est bien le milieu de $[BF]$.

Des repères dans un exo de géométrie

1. Un repère est simplement constitué d'un point et de deux vecteurs non colinéaires. Comme ici $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (j'aurais tout de même du préciser que ABC n'était pas aplati), on a bien un repère.
2. Le point A est l'origine du repère, il a pour coordonnées $(0;0)$. Les points B et C étant les extrémités des deux vecteurs de base du repère, on a $B(1;0)$ et $C(0;1)$. Comme $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$, $D(-1;0)$; de même, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. Enfin, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (règle du parallélogramme), donc $J\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.
3. D'après la question précédente $\overrightarrow{CI}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$, donc, si $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CI}$, on a $\overrightarrow{CE}\left(\dfrac{k}{2};-k\right)$. On en déduit que $x_E = \dfrac{k}{2} + x_C = \dfrac{k}{2}$, et $y_E = -k + y_C = 1-k$. Or, les points D, E et J étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DJ}$ doivent être colinéaires. Ils ont pour coordonnées respectives $\left(\dfrac{k}{2}+1;1-k\right)$ et $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, donc on doit avoir $\dfrac{k}{4}\dfrac{1}{2} + \dfrac{3k}{2} - \dfrac{3}{2} = 0$, soit $\dfrac{7k}{4} = 1$, donc $k = \dfrac{4}{7}$.
4. C'est un peu plus simple : $\overrightarrow{AF} = k'\overrightarrow{AC}$ implique $\overrightarrow{AF}(0;k')$, soit $F(0;k')$. On a donc $\overrightarrow{DF}(1;k')$ qui doit être colinéaire à $\overrightarrow{DJ}\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, soit $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}k' = 0$, donc $k' = \dfrac{1}{3}$.

Géométrie ou coordonnées, au choix

1. Figure un jour.
2. Le point A est l'origine, donc $A(0;0)$. Les points B et D sont les extrémités des vecteurs de base, donc $B(1;0)$ et $D(0;1)$. Le point C vérifie $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $C(1;1)$. Les coordonnées des milieux s'obtiennent immédiatement comme moyenne de celles des extrémités des segments : $I(\frac{1}{2};0)$, $J(1;\frac{1}{2})$, $K(\frac{1}{2};1)$, $L(0;\frac{1}{2})$. On en déduit rapidement les équations des droites $(AJ) : y = \frac{1}{2}x$, $(BK) : y = -2x+2$, $(CL) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $(DI) : y = -2x+1$.
   Il suffit ensuite de résoudre les systèmes correspondants pour obtenir les coordonnées des points $P(\frac{4}{5};\frac{2}{5})$, $Q(\frac{3}{5};\frac{4}{5})$, $R(\frac{1}{5};\frac{3}{5})$, $S(\frac{2}{5};\frac{1}{5})$.
3. Le calcul des longueurs se fait avec la formule habituelle, par exemple $PQ = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. On obtient la même valeur pour les longueurs QR, RS et SP, et $PR = \sqrt{\frac{2}{5}}$.
4. $PQRS$ est donc un losange, et comme de plus $PR^2 = \frac{2}{5} = PQ^2 + QR^2$, le triangle PQR est rectangle en Q. $PQRS$ est donc un carré de côté $\frac{\sqrt{5}}{5}$, donc d'aire $\frac{1}{5}$.
5. Il existe plusieurs méthodes pour redémontrer le résultat sans utiliser de repère. Outre celle suggérée par l'énoncé, en voici une autre : on note O le centre du carré $ABCD$. La droite (BK) étant image de la droite (AJ) par le quart de tour de centre O (A est envoyé sur B, et J, milieu de $[BC]$, est envoyé sur le milieu de $[CD]$, c'est-à-dire K), ces deux droites se coupent à angle droit. De même pour (CL) et (BK), et pour (DI) et (CL). On en déduit que le quadrilatère $PQRS$ est un rectangle (quatre angle droits). De plus, le raisonnement précédent montre que les droites (AJ) et (CL) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème des milieux dans le triangle ABP et en déduire $AS = SP = 2SI$. Mais alors, toujours en utilisant le quart de tour de centre O, on obtient rapidement les égalités suivantes : $AS = SP = BP = PQ = CQ = QR = DR = DS = 2SI = 2PJ = 2QK = 2RL$. On en déduit, d'une part que $PQRS$ est en fait un carré, d'autre part que $SP = \frac{2}{5}AJ$. Or $AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 = \frac{5}{4}AB^2$, donc $AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$, et $SP = \frac{\sqrt{5}}{5}AB$. L'aire du carré $PQRS$ vaut donc un cinquième de celle de $ABCD$.

Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

1. La droite (SA) étant supposée perpendiculaire au plan (ABC), elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier (BC).
2. La droite (BC) est orthogonale à (SA) mais aussi par hypothèse à (AB), donc elle est orthogonale au plan (SAB), et en particulier à la droite (SB) qui est incluse dans ce plan. Le triangle (SBC) est donc perpendiculaire en B.
3. (a) Les droites (BC) et (HI) sont coplanaires (dans (ABC)) et toutes deux perpendiculaires à la droite (AB), donc elles sont parallèles.
   (b) La droite (JK) est la droite d'intersection des plans (HIJ) et (SBC), qui contiennent respectivement les droites parallèles (HI) et (BC), donc d'après le théorème du toit, (JK) est parallèle à (BC) et (HI).
   (c) De la même manière, (HK) est coplanaire avec (SA) et toutes deux sont perpendiculaires à (AB), donc ces deux droites sont parallèles. La droite (IJ), qui est l'intersection des plans (SAC) et (SAB) contenant les deux droites précédentes, est donc, toujours d'après le théorème du toit, parallèle à (HK). Le quadrilatère $HIJK$ est donc un parallélogramme. De plus, la droite (IJ), parallèle à (BC) est comme elle orthogonale au plan (SAB), donc en particulier perpendiculaire à la droite (HK). Le parallélogramme $HIJK$ contient donc un angle droit, c'est en fait un rectangle.

Un brin de calcul dans l'espace

1. Ca ne devrait pas poser de difficulté.
2. Son volume vaut $2 \times 4 \times x = 8x$ (unités non précisées).
3. Il s'agit d'appliquer Pythagore dans les triangles rectangles ACD et AEF : $AC^2 = 2^2+4^2 = 20$, donc $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $AF^2 = 2^2 + x^2 = x^2 + 4$ donc $AF = \sqrt{x^2+4}$.
4. La droite (AD) étant perpendiculaire à (AB) et (AE), elle est orthogonale au plan (ABE) donc perpendiculaire à AF. Un petit Pythagore de plus dans AFD : $FD^2 = 4^2 + x^2 + 4 = x^2 + 20$, donc $FD = \sqrt{x^2+20}$.
5. Si $FD = 5$, on a $FD^2 = 25$, soit $x^2 + 20 = 25$, donc $x = \sqrt{5}$. Le volume vaut alors $8\sqrt{5}$.

Un tracé de section guidé

1. Le point M est situé sur une droite incluse dans (IJK) et sur une autre incluse dans (BFC), il appartient donc à ces deux plans. Comme on connait déjà un point dans l'intersection de ces deux plans, le point K, et qu'on sait que l'intersection de ces deux plans est une droite, il ne peut s'agir que de la droite (MK), ou plutôt pour l'intersextion avec la face de lu segment $[KL]$, L étant l'intersection de (KM) et de (BC).
2. La droite (MK) coupe (BC) en un point L appartenant à l'intersection de (IJK) et de (ABC). On connait déjà le point I dans cette intersection, qui est donc le segment $[IL]$.
3. Figure à faire.
4. Elles semblent parallèles (du moins elles devraient), ce qui est normal puisqu'un plan coupe deux plans parallèles (ici (ABC) et (EFG)) suivant des droites parallèles.

Plus amusant

Il y a 27 cubes non peints (les cubes non peints forment un cube d'arête trois au centre du grand), 54 peints sur une face (9 sur chaque face du cube), 36 peints sur deux faces (3 sur chaque arête du cube), et 8 peints sur trois faces (un à chaque sommet).

De plus en plus amusant : les polyèdres réguliers

Un polyèdre régulier est constitué de faces polygonales régulières, toutes de même type (le même nombre de côtés...) et tel que chaque sommet appartient au même nombre de faces.

1. En traçant depuis le centre du polygone régulier tous les rayons vers ses sommets, on découpe le polygone en n triangles, qui ont une somme totale des angles de $n \times 180$ degrés. Recomptons cette somme autrement : elle est constituée de la somme des angles au centre du polygone (un pour chaque triangle), qui vaut manifestement 360 degrés, et de la somme des angles au bord du polygone, qui est la même que la somme des angles du polygone (chaque angle est coupé en deux, mais peu importe, on additionne tout), c'est-à-dire n fois la valeur d'un angle recherchée. Si on note x la valeur de la mesure de cet angle, on a donc $n \times x + 360 = n \times 180$, soit $nx = 180(n-2)$, et $x = 180 \times \dfrac{n-2}{n}$. Exemple : pour un carré, $n = 4$, et $180 \times \dfrac{2}{4} = 90$, qui est bien la mesure des angles d'un carré. Ensuite on obtient 108 degrés pour un pentagone, 120 pour un hexagone etc.
2. Si toutes les faces sont des triangles, elles ont des angles au sommet de 60 degrés (les triangles étant nécessairement réguliers, c'est-à-dire équilatéraux). Si un sommet en appartenait à 6 faces simultanément, il serait donc entouré de 6 triangles, ce qui ferait autour de lui un angle total de $6 \times 60 = 360$ degrés. Mais alors le polyèdre serait plat ! Encore pire bien entendu si le sommet

devait appartenir à plus de 6 faces, il n'y aurait plus la place de caser tous ces triangles. On est donc limités à un sommet commun à 5 faces triangulaires. De même, avec des carrés, on ne peut en caser plus de trois autour d'un sommet sans atteindre 360 degrés (4 fois 90 degrés) et aplatir le solide). Avec des pentagones dont l'angle atteint 108 degrés, on peut tout juste espérer en caser trois par sommet, et si on atteint l'hexagone, trois autour d'un sommet feraient déjà atteindre les fatidiques 360 degrés, donc ils sont exclus. Notez en effet que dans un solide, un sommet appartient nécessairement à au moins trois faces (sinon, ce n'est pas un solide).

3. Il n'y a qu'à récapituler : avec des pentagones, un sommet commun à trois faces à chaque fois (c'est le dodécaèdre) ; avec des carrés, un sommet commun à trois faces (c'est le cube) ; et avec des triangles, un sommet commun à trois faces (tétraèdre), quatre faces (c'est l'octaèdre) ou cinq faces (icosaèdre). Bon, pour être honnête, je vous ai joyeusement arnaqué, car on n'a montré nulle part qu'il n'y avait pas plein de façons de réaliser des polyèdres avec des sommets communs à trois triangles par exemple. Mais si vous y réflechissez un peu c'est assez logique (et c'est en tout cas vrai !).
4. Pour les patrons, ça se trouve facilement sur le Web.
5. Pour le tétraèdre, $F = 4$, $A = 6$ et $S = 4$. Pour le cube, $F = 6$, $A = 12$ et $S = 8$. Pour l'octaèdre, $F = 8$, $A = 12$ et $S = 6$. Pour le dodécaèdre, $F = 12$, $A = 30$ (cinq par face, communes à deux faces chacune) et $S = 20$ (cinq par face, communs à trois faces comme on l'a dit plus haut). Enfin, pour l'icosaèdre, $F = 20$, $A = 30$ et $S = 12$. Ca marche bien à tous les coups.
6. Le tétraèdre est son propre dual (évidemment, on obtient un tétraèdre plus petit). Le cube donne un octaèdre, et vive-versa. Enfin, le dodécaèdre et l'icosaèdre s'échangent aussi. C'est en fait facile à voir quand on sait que les faces deviennent des sommets et les sommets des faces, il n'y a qu'à reprendre les résultats de la question précédente pour deviner.