Géométrie, suite et fin

Lundi 23 Juin 2008

À savoir et à savoir faire

Géométrie analytique

- Repères du plan, repères normés, orthogonaux et orthonormés.
- Définition des coordonnées d'un point et d'un vecteur dans un repère.
- Formule de caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs via leurs coordonnées, formule de calcul de la norme d'un vecteur.
- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, du milieu du segment $[AB]$, distance entre deux points.

Géométrie dans l'espace

- Représentation de figures en perspective cavalière, et propriétés fondamentales de cette perspective (elle conserve le parallélisme et les milieux, mais pas les distances).
- Différentes façons de définir un plan dans l'espace (par trois points ; par un point et une droite qui ne le contient pas ; par deux droites sécantes ou strictement parallèles) et notation usuelle des plans (on n'utilise jamais plus de trois points pour désigner un plan).
- Règles d'incidence de deux plans : ils sont soit confondus, soit strictement parallèles, soit sécants suivant une droite (c'est la même chose que pour deux droites dans le plan, en remplaçant point par droite pour l'intersection).
- Règles d'incidence de deux droites : elles sont soit confondues, soit strictement parallèles, soit sécantes, soit non coplanaires (elles n'appartiennent pas à un même plan, contrairement aux trois premiers cas ; dans ce derniers cas, leur intersection est vide mais les droites ne sont pas parallèles).
- Règles d'incidence d'une droite et d'un plan : la droite est soit incluse dans le plan, soit strictement parallèle au plan, soit sécante au plan en un point.
- Propriétés du parallélisme dans l'espace :
  - Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
  - Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
  - Une droite parallèle à une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan.
  - Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.
  - Un plan contenant deux droites sécantes parallèles à un autre plan est parallèle à ce plan.
  - (théorème du toit) Un plan contenant une droite parallèle à un autre plan est soit parallèle à ce plan, soit il le coupe suivant une droite parallèle aux deux premières.
  - Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.
  - Si deux plans sont parallèles, toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.
  - Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre, et les deux droites d'intersection sont alors parallèles.
- Définition de la perpendicularité et de l'orthogonalité de deux droites (deux droites sont orthogonales si leurs parallèles respectives menées par un même point sont perpendiculaires) ; de la perpendicularité d'une droite et d'un plan (une droite est perpendiculaire à un plan si elle

est orthogonale à toutes les droites de ce plan) ; de la perpendicularité de deux plans (un plan est perpendiculaire à un autre s'il contient une droite perpendiculaire à ce plan).

- Propriétés de la perpendicularité dans l'espace :
  - Une droite perpendiculaire à deux droites sécantes incluses dans un plan est perpendiculaire à ce plan.
  - Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
  - Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.
  - Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
  - Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
  - Attention, dans l'espace, deux droites perpendiculaires à une même troisième ne sont pas toujours parallèles.

Exercices

Vérifions les bases

Dans un repère du plan on place les points $A(-4;-3)$, $B(2;-1)$ et $C(0;3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point E, milieu de $[CD]$.
3. Déterminer les coordonnées du point F, symétrique de A par rapport à E.
4. Montrer que $ADFC$ est un parallélogramme.
5. Montrer que D est le milieu de $[BF]$.

Des repères dans un exo de géométrie

On considère un triangle ABC, I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, et D le symétrique de B par rapport à A. Le point d'intersection de (JD) et (IC) est noté E, et on a donc $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CI}$, pour un certain réel k. De même, on note F l'intersection de (JD) et de (AC), et on a $\overrightarrow{CF} = k'\overrightarrow{CA}$.

1. Montrer que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ est un repère du plan.
2. Déterminer les coordonnées dans ce repère des points A, B, C, D, I et J.
3. Déterminer les coordonnées de E en fonction de k, puis en utilisant le fait que D, E et J sont alignés, en déduire la valeur de k.
4. Utiliser une technique similaire pour déterminer la valeur de k'.

Géométrie ou coordonnées, au choix

Soit $ABCD$ un carré, et I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit P le point d'intersection des droites (AJ) et (BK), Q celui de (BK) et (CL), R celui de (CL) et (DI) et S celui de (DI) et (AJ).

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ de tous les points de la figure.
3. Calculer les longueurs PQ, QR, RS, SP et PR.
4. En déduire que $PQRS$ est un carré. Quelle est son aire ?
5. Redémontrer le résultat de la question précédente géométriquement (sans utiliser de vecteurs). Vous pourrez par exemple montrer que les quadrilatères $ISJB$, $JCKP$, $QKDL$, $BLAI$ et $PQRS$ ont tous la même aire.

Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

Soit $SABC$ un tétraèdre tel que ABC soit rectangle en B, et (SA) perpendiculaire au plan (ABC) (une figure est fortement conseillée).

1. Démonter que les droites (BC) et (SA) sont orthogonales.
2. Montrer que SBC est rectangle en S.
3. Soit H un point de $[AB]$, on trace par H le plan orthogonal à (AB). Ce plan coupe (AC) en I, (SC) en J et (SB) en K.
   (a) Montrer que (HI) et (BC) sont parallèles.
   (b) En déduire que (HI) et (JK) sont parallèles.
   (c) Montrer de même que (HK) et (IJ) sont parallèles, et prouver que $HIJK$ est un rectangle.

Un brin de calcul dans l'espace

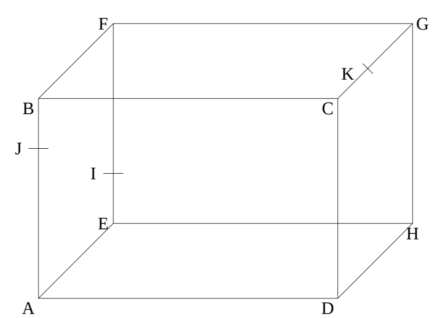
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit d'arêtes $AB = 2$, $AD = 4$ et $AE = x$.

1. Représenter ce pavé en perspective cavalière.
2. Quel est son volume ?
3. Déterminer AC et AF en fonction de x.
4. Montrer que (AD) et (AF) sont perpendiculaires, en déduire la valeur de FD.
5. Déterminer la valeur de x telle que $FD = 5$. Quel est alors le volume du pavé ?

Un tracé de section guidé

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle, les points I, J et K sont situés respectivement sur $[EF]$, $[AB]$ et $[GC]$. Le but de l'exercice est de tracer l'intersection du plan (IJK) avec $ABCDEFGH$.

1. Placer sur la figure le point M, intersection des droites (IJ) et (FB). Pourquoi M appartient-il à l'intersection de (IJK) et de (BFC) ? En déduire l'intersection de (IJK) et de la face $BFGC$, la tracer sur la figure.
2. Tracer en justifiant l'intersection de (IJK) et de la face $ABCD$.
3. Compléter le tracé de l'intersection de (IJK) avec $ABCDEFGH$ (on commencera par trouver un point distinct de I dans l'intersection de (IJK) et de (EFG)).
4. Que semble-t-on constater concernant les intersections de (IJK) avec les faces $ABCD$ et $EFGH$?



Plus amusant

Un grand cube est constitué de 125 petits cubes (5 sur chaque arête). On peint le grand cube en blanc (uniquement les faces extérieures donc). Sur les 125 petits cubes, combien ne sont pas peints du tout ? Combien sont peints sur 1, 2 ou 3 faces ?

De plus en plus amusant : les polyèdres réguliers

Un polyèdre régulier est constitué de faces polygonales régulières, toutes de même type (le même nombre de côtés...) et tel que chaque sommet appartient au même nombre de faces.

1. Question préliminaire : considérons un polygone régulier à n côtés. Montrer que l'angle à chaque sommet a pour mesure $180 \times \frac{n-2}{n}$ degrés (commencer par le cas du carré puis du pentagone, en utilisant des triangles).
2. On considère maintenant un sommet d'un polyèdre régulier. Montrer qu'il ne peut pas appartenir à plus de cinq faces à la fois si celles-ci sont des triangles ; pas à plus de quatre si ce sont des carrés ; et pas plus de trois si ce sont des pentagones. Montrer qu'il est impossible que les faces aient six côtés ou plus.
3. En déduire qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre (vingt faces triangulaires), le cube et le dodécaèdre (douze faces pentagonales).
4. Faire un patron pour chacun de ces solides.
5. Compter pour chacun son nombre de faces F, d'arêtes A et de sommets S. Vérifier qu'on a à chaque fois F-A+S=2 (relation d'Euler).
6. Dualité : le polyèdre dual d'un polyèdre est obtenu en prenant pour sommets les centres de ses faces et en les reliant aux centres des faces voisines. Quel est le dual de chacun des polyèdres réguliers ?

Il existe également des polyèdres semi-réguliers, qui sont composés de faces polygonales régulières, mais auxquelles on n'impose pas d'être toutes de même type. La définition exacte étant compliquée, je ne vous la donne pas. Il y en a 13, qui portent tous des noms assez ésotériques. Il est beaucoup plus difficile d'en dresser la liste, je vous la donne donc, avec les figures qui vont avec. Vous pouvez vous amuser à répondre aux mêmes questions que pour les polyèdres réguliers : les patrons ne sont pas évidents à réaliser, mais donnent de jolis objets, la relation d'Euler est toujours vérifiée, et les polyèdres duaux deviennent très difficiles à visualiser, d'autant plus qu'ils ne sont pas forcément semi-réguliers !

Pour ceux que ça amuse, sachez qu'on peut en fait former tout un paquet de solides à partir de polygones réguliers si on n'impose pas de condition supplémentaire. Vous pouvez par exemple jeter un oeil à la page suivante :

http ://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html