Fonctions 2, le retour, assaisonnées d'un peu de systèmes

Vendredi 20 Juin 2008

Systèmes en vrac

1. En faisant la somme des deux équations, $x = -2$, donc en reprenant la deuxième équation $y = 2x = -4$, d'où $\mathcal{S} = \{(-2; -4)\}$.
2. Multiplions la première équation par 5 et la deuxième par 2 pour obtenir $\begin{cases} 10x + 15y = 105 \\ 10x - 8y = 82 \end{cases}$
   En soustrayant les deux, on a $23y = 23$, soit $y = 1$, donc en reprenant la première équation initiale $2x = 21 - 3 = 18$, d'où $x = 9$. On a donc $\mathcal{S} = \{(9; 1)\}$.
3. Si on multiplie la deuxième équation par $\frac{4}{3}$, on obtient $12x + 16y = \frac{40}{3}$, ce qui est assez contradictoire avec la première équation, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
4. En multipliant la première équation par $\sqrt{3}$, on obtient $\sqrt{3}x + 3y = 4\sqrt{3}$, dont il ne reste plus qu'à soustraire la deuxième équation pour avoir $y = \sqrt{3}$, donc $x = 4 - \sqrt{3}y = 1$; $\mathcal{S} = \{(1; \sqrt{3})\}$.
5. La deuxième équation est la même que la première, à une multiplication par -2 près. Tout ce qu'on peut dire est donc que $y = 3x - 5$, soit $\mathcal{S} = \{(x; 3x - 5) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
6. Le principe n'est pas très différent, le fait que x^2 et y^2 soient les inconnues ne change rien. On multiplie la deuxième équation par 3 et on la soustrait à la première pour obtenir $-13y^2 = -117$, soit $y^2 = 9$, puis on remplace dans la première pour avoir $3x^2 = 12$, soit $x^2 = 4$. On a donc $x = 2$ ou $x = -2$, et $y = 3$ ou $x = -3$, ce qui donne pas moins de quatre couples de solutions : $\mathcal{S} = \{(-2; -3); (-2; 3); (2; -3); (2; 3)\}$.
7. Pareil que pour la précédente. On multiplie la deuxième équation par 2 et on fait la somme pour avoir $7\sqrt{y+1} = 28$, soit $\sqrt{y+1} = 4$, d'où $y + 1 = 16$ et $y = 15$. En remplaçant dans la première équation, on a alors $\frac{2}{x-2} = 2$, soit $x - 2 = 1$, donc $x = 3$. Il y a une solution unique : $\mathcal{S} = \{3; 15\}$.

Petits problèmes faisant intervenir des systèmes

1. Notons x le nombre de chameaux et y celui de dromadaires. Il y a donc au total $x + y$ animaux, soit $4x + 4y$ pattes, et $2x + y$ bosses (deux par chameau et une par dromadaire). Autrement dit, $2x + y = 40$ et $4x + 4y = 100$. La deuxième équation donne $x + y = 25$, ce qui en la soustrayant à l'autre donne $x = 15$, puis $y = 10$. Il y a donc 15 chameaux et 10 dromadaires.
2. Notons x le nombre d'enfants et y le nombre d'adultes. On a $x + y = 60$ (nombre total de personnes), et $15x + 35y = 1640$ (prix total). De la première équation, on tire $y = 60 - x$, ce qui en remplaçant dans la deuxième donne $15x + 2100 - 60x = 1640$, soit $20x = 460$, ou encore $x = 23$. on en déduit alors $y = 37$. Il y a 23 enfants et 37 adultes.
3. Notons x la longueur du rectangle et y sa largeur. On a $2x + 2y = 30$ (périmètre). Si on augmente un côté de 5 et qu'on diminue l'autre de 5, sa nouvelle aire vaut $(x - 5)(y + 5)$, et elle vaut 20 de plus que l'aire initiale, qui valait bien sûr xy. On a donc $(x - 5)(y + 5) = xy + 20$, soit en développant $5x - 5y - 25 = 20$, ou encore $x - y = 9$ après simplification, donc $y = x - 9$.

En remplaçant dans la première équation, $4x - 18 = 30$, soit $x = 12$, puis $y = 3$. Le rectangle initial faisait donc 12 centimètres sur 3.

4. Notons donc a et b les longueurs des deux autres côtés. On a par Pythagore $a^2+b^2 = 13^2 = 169$, et par ailleurs $\frac{ab}{2} = 30$ (aire du triangle), soit $ab = 60$. On peut en déduire que $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 169+2\times 60 = 289$, d'où $a+b = 17$ ($a+b$ étant bien sûr positif). De même, on a $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab = 169-2\times 60 = 49$ donc $a-b = 7$. La somme des deux dernières équations obtenues donne $2a = 24$, soit $a = 12$, puis on obtient $b = 5$.

Une histoire de températures

1. Autrement dit, on a $32 = a\times 0+b$ et $212 = 100a+b$, donc on déduit $b = 32$, puis $100a = 180$, soit $a = 1.8$.
2. La température correspondante en Farenheit est $y = 1.8\times 20+32 = 68$. Il faut donc le régler sur 68° F.
3. Il faut retourner la relation précédente : $y = 1.8x+32$, donc $1.8x = y-32$, et $x = \frac{y-32}{1.8}$.
4. On utilise la relation précédente pour trouver la température correspondante en Celsius : $x = \frac{104-32}{1.8} = 40$. L'anglais est très malade.

Calcul d'équations de droites

1. On utilise les formules toutes faites : pour (AB), $a = -3$ et $b = -2$ (pas besoin de calcul, le point à l'origine est le point B), donc l'équation est $y = -3x-2$. pour (AC), $a = -\frac{1}{2}$, et $b = 3$, donc l'équation est $y = -\frac{1}{2}x+3$; enfin pour (BC), $a = 2$ et $b = -2$, l'équation est $y = 2x-2$.
2. Cette droite a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ (le même que (AC)) et pour ordonnée à l'origine -2 puisqu'elle passe par B, donc a pour équation $y = -\frac{1}{2}x-2$.
3. Cette droite a pour coefficient directeur $\frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$, et pour ordonnée à l'origine $b = y_C - ax_C = 2+3 = 5$, donc pour équation $y = -\frac{3}{2}x+5$.
4. Le milieu de $[BC]$ est $I(1;0)$, donc la médiane (AI) issue de A vérifie $a = -\frac{4}{3}$ et $b = \frac{4}{3}$, donc son équation est $y = -\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$. Le milieu de $[AC]$ est $J(0;3)$ qui a même abscisse que B donc la médiane (BJ) est verticale d'équation $x = 0$. Enfin, le milieu de $[AB]$ est $K(-1;1)$, donc (CK) vérifie $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{4}{3}$, d'où l'équation $y = \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.
5. On a $x_G = 0$ d'après la deuxième équation, et donc $y_G = \frac{4}{3}$ d'après la première. Ces coordonnées vérifient bien la troisième équation.

Du classique pour commencer

Correction dès que j'ajoute les figures.

Programmation linéaire

1. On doit avoir d'après l'énoncé $x+y \leq 10$, et $12x+8y \leq 104$.
2. Autrement dit, $y \leq -x+10$, et $y \leq -\frac{3}{2}x+13$

3. Graphique à venir.
4. Par exemple, 2 et 5 convient, et le voleur gagne alors 2 300 euros.
5. On a dans ce cas $400x + 300y = 2\ 400$, soit $y = -\frac{4}{3}x + 8$.
6. On a soit $x = 0$ et $y = 8$, soit $x = 3$ et $y = 4$, soit $x = 6$ et $y = 0$.
7. Toutes ces droites seront parallèles. Pour qu'il y ait une solution compatible avec le butin envisagé, il faut que la droite correspondante coupe la zone non hachurée en un point à coordonnées entières.
8. Il faut trouver, parmi toutes ces droites parallèles, celle qui a la plus grande ordonnée à l'origine possible (puisque celle-ci représente, à un facteur 300 près, le butin amassé) et qui coupe notre zone. On obtient graphiquement la solution $x = 6$ et $y = 4$, pour un butin de 3 600 euros.

Un problème d'optimisation géométrique

1. Bon, ça c'est une question de feeling, disons que prendre un quart de la longueur totale, donc 6.25 centimètres a l'air assez raisonnable.
2. La valeur de x doit évidemment être positive, et ne peut dépasser 12.5 centimètres (quand on atteint cette valeur, les quatre carrés découpés recouvrent tout le grand carré, il ne reste plus rien pour la boite), donc $\mathcal{D}_f = [0; 12.5]$.
3. Le parallélépipède a une hauteur x, et une longueur et une largeur toutes deux égales à $25-2x$ (on enlève x de chaque côté, donc son volume est $f(x) = x(25 - 2x)^2$.
4. Allons-y :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	0	529	882	1083	1156	1125	1014	847	648	441	250	99	12

5. La courbe arrivera en temps voulu.
6. Le maximum semble être atteint un peu après 4 et valoir un tout petit peu plus que $f(4)$.