Fonctions 2, le retour, assaisonnées d'un peu de systèmes

Vendredi 20 Juin 2008

À savoir et à savoir faire

- Résoudre des systèmes par la méthode de votre choix.

> **Rappel :** Il existe deux méthodes pour résoudre un système. La méthode par substitution consiste à exprimer la première inconnue en fonction de la deuxième équation, puis de remplacer la première inconnue par cette expression dans la deuxième équation. On obtient ainsi une deuxième équation qui ne comporte plus qu'une seule inconnue. Par exemple, pour le système :
> $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 3 \\ x & - & 2y & = & -1 \end{array}\right.$$
> On a dans la première équation $y = 3-2x$, puis en remplaçant dans la deuxième $x-2(3-2x) = -1$, dont on déduit $x = 1$ puis $y = 1$.
> La deuxième méthode est la méthode par combinaison : on effectue une combinaison des deux équations (à base de somme des équations et de produits des équations par des réels) pour faire disparaitre l'une des deux inconnues). Toujours avec le même système, en soustrayant à la première équation le double de la seconde, on obtient $5y = 5$, et on retrouve la même solution.

- Calculer le déterminant d'un système pour savoir avant de le résoudre son nombre de solutions (qui est soit 0, soit 1, soit une infinité).
- Faire le lien entre résolution d'un système d'équations et intersection de deux droites dans le plan.

Exercices

Systèmes en vrac

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & -2 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 21 \\ 5x & - & 4y & = & 41 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 12x & + & 16y & = & 20 \\ 9x & + & 12y & = & 10 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & \sqrt{3}y & = & 4 \\ x\sqrt{3} & + & 2y & = & 3\sqrt{3} \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 5 \\ -6x & + & 2y & = & -10 \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x^2 & - & y^2 & = & 3 \\ x^2 & + & 4y^2 & = & 40 \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{rcrcl} \dfrac{2}{x-2} & + & \sqrt{y+1} & = & 6 \\ \dfrac{-1}{x-2} & + & 3\sqrt{y+1} & = & 11 \end{array}\right.$

Petits problèmes faisant intervenir des systèmes

1. Une caravane est constituée de chameaux et de dromadaires. Il y a en tout 40 bosses et 100 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?
2. Lors d'un concert, le tarif est de 15 euros pour les enfants et 35 euros pour les adultes. Un groupe de 60 personnes paye au total 1640 euros. Combien y a-t-il d'adultes et d'enfants dans ce groupe ?
3. Le périmètre d'un rectangle est de 30 cm. Quand on augmente un de ses côtés de 5 cm et qu'on diminue l'autre de 5, son aire augmente de 20 cm^2. Quelles sont ses dimensions ?
4. Un triangle rectangle a une hypothénuse de 13 cm et une aire de 30 cm^2. Déterminer les longueurs de ses deux autres côtés (essayez de déterminer en premier lieu les valeurs de $a+b$ et de $a-b$).

Une histoire de températures

Une même température peut être exprimée en degré Farenheit ou Celsius. Si on note y la valeur en Farenheit et x celle en Celsius, on a une relation affine entre les deux, donc de la forme $y = ax+b$.

1. Sachant que 0 degrés Celsius correspondent à 32 degrés Farenheit, et 100 degrés Celsius à 212 Farenheit, déterminer a et b.
2. On veut régler un climatiseur gradué uniquement en Farenheit à une température correpondant à 20° Celsius, comment s'y prendre ?
3. Donner la relation permettant de passer des degrés Farenheit aux degrés Celsius.
4. Un anglais a 104 de fièvre (en Farenheit...). Est-il malade ?

Calcul d'équations de droites

Dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$, on place les points $A(-2;4)$; $B(0;-2)$ et $C(2;2)$.

1. Déterminer les équations des droites (AB), (AC) et (BC).
2. Déterminer l'équation de la droite parallèle à (AC) passant par le point B.
3. Déterminer l'équation de la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}(4;-6)$.
4. Déterminer les équations des trois médianes du triangle ABC.
5. Déduire des deux premières équations les coordonnées du centre de gravité G du triangle, et vérifier qu'il appartient à la troisième médiane (note : il y a beaucoup plus rapide pour calculer les coordonnées de G).

Du classique pour commencer

Trois opérateurs téléphoniques proposent les forfaits suivants :
- pour le premier, 6 euros l'heure de communications.
- pour le deuxième, 4 euros de l'heure, mais avec un fixe de 10 euros.
- enfin, pour le troisième, c'est 60 euros quel que soit le temps de communication.

Représenter les trois types de forfait en fonction du temps passé au téléphone, et déterminer dans quel cas chacun d'entre eux est le plus intéressant.

Programmation linéaire

Oui, le titre de l'exercice peut faire un peu peur, mais ce n'est pas si compliqué que ça.

Un voleur a réussi à forcer l'entrée d'un musée, mais se trouve limité par les conditions matérielles dans sa tentative d'empocher le plus gros butin possible. Il décide de se limiter à emporter quelques tableaux et quelques vases. Chacun des objets mettant du temps à emporter, il ne peut en prendre plus de 10 au total. Par ailleurs, chaque tableau prend un volume de 12 litres dans son sac, et chaque vase prend 8 litres. Or, son sac est d'une contenance de 104 litres (curieux, mais c'est comme ça). Il peut espérer revendre chaque tableau 400 euros et chaque vase 300 euros. Quel est le gain maximal qu'il peut tirer de ce cambriolage ?

Trop méchant ? Bon, ok, je vous aide un peu :

1. Soit x le nombre de tableaux et y le nombre de vases emportés par notre voleur. Écrire les deux contraintes (nombre d'objets et volume) sous forme d'inégalités faisant intervenir x et y.
2. Réecrire ces inégalités sous forme d'« inéquations de droites » (de la forme $y \leq ax + b$ ou $y \geq ax + b$).
3. Représenter les deux droites correspondantes dans un même repère et hachurer les zones du plan correspondant à des couples (x, y) impossible pour notre valeur (au passage, n'oubliez pas que x et y sont censés être positifs).
4. Donner des exemples de combinaisons possibles pour notre voleur, et l'argent qu'il tirera de la revente des objets dans chaque cas.
5. On suppose que le voleur a emporté pour 2 400 euros de butin. Montrer que x et y vérifient alors une équation qui peut être mise sous forme d'équation de droite.
6. Représenter la droite en question dans votre repère et désuisez-en les valeurs de x et y possibles pour un butin de 2 400 euros (rappel : x et y sont entiers).
7. Si on change la valeur de 2 400 par une autre, on peut toujours trouver les valeurs en traçant une droite. Que peut-on dire concernant cette droite et la précédente droite tracée ? Quelle condition doit-on avoir sur la droite pour qu'il existe une combinaison permettant d'amasser le butin fixé ?
8. En déduire une méthode graphique pour déterminer le butin maximal, et le déterminer !

Un problème d'optimisation géométrique

On dispose d'un carré de carton de 25 cm de côté, et on souhaite fabriquer une boite parallélépipédique sans couvercle de la façon suivante : on coupe un carré de côté x à chaque coin du carton et on replie en jetant les quatre petits carrés (faites un dessin...). On note $f(x)$ le volume de la boite obtenue.

1. Sans calcul, quelle valeur de x prendriez-vous pour avoir le plus grand volume possible ?
2. Quel est le domaine de définition de f (attention, ici, il faut que la valeur de x soit compatible avec la fabrication d'une boite) ?
3. Donner l'expression de $f(x)$.
4. Faire un tableau de valeurs pour f pour tous les entiers appartenant à $\mathcal{D}_f$.
5. Tracer la courbe représentative de f (prenez une échelle adaptée).
6. Déterminer graphiquement la valeur du maximum de f et la valeur de x correspondante.