Fonctions, première partie

Jeudi 19 Juin 2008

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{2\}$
2. On doit avoir $3 - 4x \geq 0$, soit $x \geq \dfrac{4}{3}$, donc $\mathcal{D}_f = \left[\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$
3. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule jamais, il est toujours strictement positif).
4. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ \backslash \{9\}$
5. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \left\{-2; \dfrac{5}{2}\right\}$
6. Là c'est plus compliqué, il faut avoir $\dfrac{2x+6}{3-x} \geq 0$, ce qui impose un tableau de signes :

x		-3		3	
$2x+6$	$-$	0	$+$	|	$+$
$3-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
Q	$-$	||	$+$	0	$-$

On en déduit que $\mathcal{D}_f = [-3; 3[$.

Pair/Impair

La fonction f est paire ($\sqrt{5 + (-x)^2} = \sqrt{5 + x^2}$) ; la fonction g est impaire car $\dfrac{(-x)^3}{(-x)^4 + 1} = -\dfrac{x^3}{x^4 + 1}$; la fonction h n'est rien du tout (seul le x^3 change de signe) ; la fonction i non plus ; et la fonction j est impaire.

Représentations graphiques

Le corrigé arrivera en même temps que les autres figures.

Un exercice graphique

1. Les images de 1, 3 et $\dfrac{3}{2}$ sont respectivement -3, 1 et -4.
2. 0 a un seul antécédent, qui vaut environ 2.8, et -3 en a trois qui valent à peu près -0.5, 1 et $2,5$.
3. La teableau de variations ressemble à ceci :

x		0.2		1.8	
$f(x)$	$\nearrow$	-1.8	$\searrow$	-4.2	$\nearrow$

4. Les réels ayant trois antécédents sont tous ceux de l'intervalle $]-4.2;-1.8[$ (les crochets vers l'extérieur sont importants) et ceux ayant un antécédent sont tous ceux appartenant à $]-\infty;-4.2[\cup]-1.8;+\infty[$ (les deux réels -1.8 et -4.2 étant les seuls à avoir deux antécédents).
5. On a déjà $f(0)=-2=d$, puis $f(1)=a+b+c+d=-3$, donc $a+b+c=-1$. De même, $f(2)=8a+4b+2c+d=-4$, donc $8a+4b+2c=-2$, et enfin $f(3)=27a+9b+3c+d=1$, donc $27a+9b+3c=3$. Il ne reste plus qu'à résoudre un petit système de trois équations à trois inconnues. Comme $a+b+c=-1$, on a $2a+2b+2c=-2$, donc en soustrayant à notre avant-dernière équation, $6a+2b=0$, soit $b=-3a$. En remplaçant b par sa valeur, on obtient $-2a+c=-1$, donc $c=2a-1$. On remplace tout ça dans la dernière équation : $27a+9\times(-3a)+3(2a-1)=3$, soit $6a-3=3$, donc $a=1$, puis $b=-3$ et $c=1$. La fonction est donf donnée par l'équation $f(x)=x^3-3x^2+x-2$.

Un peu de calcul

Soient f, g et h les trois fonctions définies par les équations suivantes :

$$f(x)=\frac{6}{9x^2-16} \qquad g(x)=\sqrt{\frac{2x+3}{8-x}} \qquad h(x)=x\times|x|$$

1. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ (il n'y a pas de raison qu'il en soit autrement), f n'est pas définie si $x^2=\frac{16}{9}$, soit $x=\frac{4}{3}$ ou $x=-\frac{4}{3}$, donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right\}$. Enfin, pour g, il faut que ce qui se trouve sous la racine soit positif, ce qui nécessite un petit tableau de signes :

x		$-\frac{3}{2}$		8	
$2x+3$	$-$	0	$+$	|	$+$
$8-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
Q	$-$	||	$+$	0	$-$

On en déduit que $\mathcal{D}_g=\left[-\frac{3}{2};8\right[$.

2. On a $h(-x)=(-x)\times|-x|=-x\times|x|$, donc la fonction h est impaire.
3. On a $f(-1)=-\frac{6}{7}$; $g(2)=\sqrt{\frac{7}{6}}$ et $h\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{9}$.
4. On a $f(x)=\frac{1}{8}$ si $9x^2-16=48$ (produit en croix), soit $x^2=\frac{64}{9}$, équation qui a deux solutions : $x\frac{8}{3}$ et $x=-\frac{8}{3}$; $g(x)=\frac{1}{3}$ entraine par passage au carré (les deux nombres sont positifs donc ça ne change rien) $\frac{2x+3}{8-x}=\frac{1}{3}$, soit $2x+3=24-3x$, donc $5x=21$. Un seul antécédent donc : $x=\frac{21}{5}$.
5. Question un peu curieuse, à la résolution inhabituelle : si $x\times|x|=x$, on a en passant tout à gauche et en factorisant par x, $x(|x|-1)=0$, ce qui se produit si $x=0$ ou si $|x|=1$. La fonction h a donc trois invariants, qui sont 0, 1 et -1.

Classique sur une fonction du second degré

Soit f la fonction définie par l'équation $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

1. La fonction f n'est ni paire ni impaire (on a par exemple $f(1) = 0$ et $f(-1) = -8$).
2. $f(2) = 8$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 - 5 = -\frac{11}{4}$.
3. Il faut résoudre l'équation $x^2 + 4x - 5 = -5$, soit $x(x + 4) = 0$, donc il y a deux antécédents : $x = 0$ et $x = -4$.
4. Partons plutôt dans l'autre sens : $(x + 2)^2 - 9 = x^2 + 4x + 4 - 9 = x^2 + 4x - 5 = f(x)$, donc les antécédents de 0 vérifient $(x + 2)^2 - 9 = 0$, soit en factorisant $(x + 2 + 3)(x + 2 - 3) = 0$. Il y a encore une fois deux antécédents : $x = -5$ et $x = 1$.
5. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, alors $f(b) - f(a) = (b + 2)^2 - 9 - (a + 2)^2 + 9 = (b + 2 + a + 2)(b + 2 - a - 2) = (a + b + 4)(b - a)$. Le deuxième facteur étant par hypothèse positif, reste à déterminer le signe du premier. Si a et b sont tous deux inférieurs à -2, $a+b$ est plus petit que -4 et le premier facteur est négatif. On a alors $f(b) - f(a) \leq 0$, soit $f(b) \leq f(a)$, et la fonction est donc décroissante sur $]-\infty; -2]$. Au contraire, si a et b sont tous deux plus grands que -2, leur somme est supérieure à -4, le premier est positif, et f est croissante sur $[-2; +\infty[$.
6. Voilà le tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-8	-9	-8	-5	0	7	16

La courbe arrivera avec les figures.

Étude d'une fraction rationnelle

On considère la fonction f définie par l'équation $f(x) = \frac{6x + 6}{x^2 + 3}$.

1. C'est $\mathbb{R}$ tout entier, puisque le dénominateur est toujours strictement positif.
2. On a $f(1) = \frac{12}{4} = 3$, et $f(\sqrt{3}) = \frac{6\sqrt{3} + 6}{6} = \sqrt{3} + 1$.
3. Si $f(x) = 0$, alors $6x + 6 = 0$, soit $x = -1$, qui est donc le seul antécédent de 0. Pour résoudre $f(x) = 2$, on fait un petit produit en croix : $6x + 6 = 2x^2 + 6$, soit $2x^2 - 6x = 0$, ou encore $2x(x - 3) = 0$, donc 2 a deux antécédents, qui sont 0 et 3.
4. Courbe à venir.
5. Il semble y avoir deux solutions valant environ -0.5 et 5.5.
6. Il y a apparemment une seule solution, aux alentours de 2.2.