Fonctions, première partie

Jeudi 19 Juin 2008

À savoir et à savoir faire

- Définition de ce qu'est une fonction, exemples.
- Domaine (ou ensemble) de définition d'une fonction, valeurs interdites dans le cas d'un quotient ou d'une racine carrée.
- Représentation graphique d'une fonction dans un repère.
- Définition d'image et antécédent, interprétation graphique (l'image de x est l'ordonnée de l'unique point d'abscisse x, les antécédents de y sont les abscisses des points d'ordonnée y), calcul d'images (ça c'est facile) et d'antécédents (équations à résoudre).
- Résolution graphique d'équations et d'inéquations (par exemple, pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq 5$, il faut déterminer les abscisses de tous les points de la courbe dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 5 ; pour résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$, on cherche les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g).
- Fonctions paires et impaires et interprétation graphique (il faut aussi être capable de prouver qu'une fonction n'est ni paire ni impaire en exhibant un contre-exemple).
- Sens de variation d'une fonction, tableau de variations, maximum, minimum d'une fonction, et surtout les méthodes qui permettent de prouver qu'une fonction est croissante ou décroissante. Rappelons-les au cas où : on commence toujours par considérer deux réels a et b appartenant à l'intervalle d'étude et tels que $a < b$, en ensuite, soit on calcule $f(b) - f(a)$ et on essaie de déterminer son signe, la plupart du temps en factorisant par $b - a$; soit on part de $a < b$ et, par inégalités successives, on essaie d'aboutir à $f(a) < f(b)$ (ou $f(a) > f(b)$). La deuxième méthode est peut-être plus simple, mais ne marche malheureusement que pour des fonctions suffisamment simples.
- Tableau de variations et allure des courbes représentatives des fonctions « classiques »suivantes : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^3$.
- Définition et équation des fonctions affines et linéaires. Réprésentations graphiques de telles fonctions (il faut savoir représenter rapidement une droite à partir de son équation).
- Réciproquement, il faut savoir trouver l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique. Connaitre aussi la définition et l'interprétation du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.
- Caractérisation du parallélisme des droites par l'égalité des coefficients directeurs.
- Calcul d'une équation de droite à partir des coordonnées de deux de ses points (je rappelle les formules : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $b = y_A - ax_A$).

Exercices

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x - 4}$
2. $f(x) = \sqrt{3 - 4x}$

3. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4}$
4. $f(x) = \dfrac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$
5. $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+2)(2x-5)}$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+6}{3-x}}$

Pair/Impair

Les fonctions suivantes sont-elles paires ? Impaires ? $f(x) = \sqrt{5+x^2}$; $g(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1}$; $h(x) = \dfrac{3}{-x^3-2}$; $i(x) = x^3 - 5x + 2$; $j(x) = x^3 - 5x$.

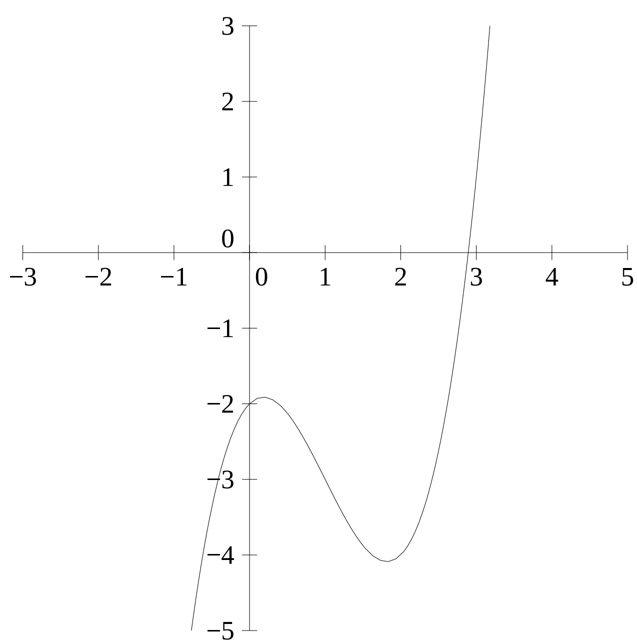
Représentations graphiques

Tracer une représentation graphique de fonction compatible avec les conditions suivantes (une pour chaque lot de conditions...).

1. f est définie sur $]0;5]$, croissante sur $]0;3]$ et décroissante ensuite et telle que l'image de 1 soit -2 et 2 et 4 soient des antécédents de 3.
2. f est affine sur chacun des intervalles $]-\infty;-2]$, $[-2;1]$, $[1,4]$ et $[4,+\infty[$ avec pour coefficient directeurs respectifs -1, 0, 2 et $-\dfrac{2}{3}$; et f passe par le point de coordonnées $(0;-2)$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \leq -1$; $f(x) = x^3$ si $-1 \leq x \leq 2$, f est strictement croissante sur $[5;+\infty[$, et $-\dfrac{1}{2}$ a 6 (eh oui) antécédents par f.
4. $\mathcal{D}_f = [-2;2]$; $f(1) = 3$; 0 a exactement 2 antécédents ; et $-1 \leqslant x \leqslant 4$.

Un exercice graphique

On ne connait de la fonction f que la courbe suivante :



1. Quelles sont les images des réels 1 ; 3 et $\dfrac{3}{2}$?
2. Quels sont les antécédents de 0 ? de -3 ? (donnez des valeurs approchées si besoin est)
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f, en y indiquant les images des valeurs intéressantes.
4. Quels sont les réels ayant trois ancédédents par f ? Et un seul antécédent ?
5. Pour les plus motivés : on sait que f est de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des réels. Déterminer graphiquement la valeur de ces réels.

Un peu de calcul

Soient f, g et h les trois fonctions définies par les équations suivantes :

$$f(x) = \frac{6}{9x^2 - 16} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{8-x}} \qquad h(x) = x \times |x|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces trois fonctions.
2. La fonction h est-elle paire ? Impaire ?
3. Calculer les images de -1 par f, de 2 par g, de $\dfrac{-2}{3}$ par h.
4. Déterminer les antécédents de $\dfrac{1}{8}$ par f et ceux de $\dfrac{1}{3}$ par g.
5. Quels sont les réels invariants par h (c'est-à-dire tels que $h(x) = x$) ?

Classique sur une fonction du second degré

Soit f la fonction définie par l'équation $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

1. Étudier la parité de f.
2. Calculer les images de -2 et de $\frac{1}{2}$ par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de -5.
4. Montrer que $f(x) = (x+2)^2 - 9$ et en déduire les antécédents de 0.
5. Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$.
6. Faire un tableau de valeurs pour les entiers compris entre -3 et 3 (pas de justification !) et tracer rapidement la courbe représentative de f.

Étude d'une fraction rationnelle

On considère la fonction f définie par l'équation $f(x) = \dfrac{6x+6}{x^2+3}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer les images des nombres 1 et $\sqrt{3}$.
3. Déterminer par le calcul les antécédents éventuels de 0 et de 2.
4. À l'aide du tableau de valeurs suivant (les valeurs données sont des valeurs approchées), tracer rapidement la courbe représentative de f (on pourra prendre comme unité 1 carreau sur l'axe des abscisses et 2 carreaux sur l'axe des ordonnées) :

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	7
$f(x)$	$-0,86$	-1	$-0,86$	0	2		$2,57$	2	$1,29$	$0,92$

5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$.