Géometrie plane

Mardi 17 Juin 2008

Mise en jambes

1. C'est le théorème des milieux dans le triangle ABH : I et J sont les milieux des côtés respectifs HB et HA, donc (IJ) est parallèle au troisième côté (AB).
2. Comme (IJ) est parallèle à (AB), qui est elle-même perpendiculaire à (AC), donc (IJ) est perpendiculaire à (AC). Autrement dit, il s'agit de la hauteur issue du sommet I dans le triangle AIC. Comme par ailleurs J appartient également à (AH) qui est par définition la hauteur issue de A dans ce même triangle, le point J, appartenant à deux hauteurs du triangle, est l'orthocentre du triangle AIC.
3. Le point J appartient donc également à la hauteur issue de C dans AIC. La droite (CJ) est donc perpendiculaire au côté opposé (AI).

Pythagore via les triangles semblables

1. Ces trois triangles ont chacun un angle droit. Qui plus est, les triangles ABC et HAB ont en commun l'angle $\widehat{CBA}$; ayant deux angles en commun, ces deux triangles sont semblables. De même, ABC et HAC ont en commun l'angle $\widehat{BCA}$, donc sont également semblables. Finalement, les trois triangles sont semblables.
2. Ecrivons les égalités de rapport de longueur des côtés entre les triangles ABC et HAB : $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{AC}{AH}$. En faisant un produit en croix avec les deux premiers rapports, on obtient $AB^2 = BC \times HB$. De même, dans les triangles ABC et HAC, on a $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{HC} = \dfrac{AB}{AH}$, d'où $AC^2 = BC \times HC$ (on garde seulement les deux premiers quotients, comme tout à l'heure). Enfin, dans HAB et HAC, on a $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{AH}{HC}$, donc $AH^2 = BH \times CH$ (avec les deux derniers quotients cette fois).
3. D'après les résultats précédents, $AB^2 + AC^2 = BC \times (HC + HB) = BC \times BC = BC^2$. On vient de prouver le théorème de Pythagore.

Encore des triangles semblables

1. Par construction de la bissectrice, $\widehat{BAD} = \widehat{CAI}$. De plus, les angles $\widehat{CAI}$ et $\widehat{BDA}$ étant alternes-internes, on a $\widehat{BDA} = \widehat{CAI}$. Le triangle BAD a donc deux angles égaux, il est isocèle en B.
2. On a déjà vu que $\widehat{BDI} = \widehat{CAI}$. De plus, $\widehat{BID} = \widehat{AIC}$ (angles opposés par le sommet). Les triangles BDI et AIC ont deux angles égaux, ils sont semblables.
3. Écrivons les égalités de rapports entre les côtés des deux triangles précédents : $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AC}{BD}$. Or, $BD = AB$ puisque le triangle ABD est isocèle en B. En reprenant et en inversant les deux derniers quotients, on a bien $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Un peu plus varié

1. Figure un jour si j'ai le courage.
2. Le triangle ABC est rectangle en C puisque C appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Appliquons donc Pythagore dans ce triangle : $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 100 - 25 = 75$ donc $BC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.
3. Dans ce même triangle $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Notons au passage qu'on a donc $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
4. L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{1}{2} \times AB \times BC = \dfrac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{3} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$. Le triangle ADB a la même aire que ABC (il en est le symétrique par rapport à (AB), donc l'aire totale du quadrilatère $ACBD$ vaut $25\sqrt{3}$.
5. Toujours par raison de symétrie, $BC = BD$, donc BCD est isocèle en B. Mais de plus, $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 30 + 30 = 60^\circ$. Les deux autres angles (égaux) du trtiangle BCD valent donc aussi 60°, et le triangle BCD est en fait équilatéral.
6. Sur la figure, on constate que l'aire du quadrilatère $ACBD$ est constitué de la somme des aires d'une portion du disque $\mathcal{C}_1$ d'angle au centre $\widehat{DAC}$; d'une portion du disque $\mathcal{C}_\in$ d'angle au centre $\widehat{DBC}$; et de l'aire recherchée. La première portion de disque a pour aire $25\pi \times \dfrac{120}{360}$ (puisque l'angle $\widehat{DAC}$ mesure deux fois $\widehat{CAB}$ soit deux fois 60°), soit $\dfrac{25}{3}\pi$. De même, l'aire de la deuxième portion de disque vaut $\dfrac{25}{6}\pi$ (l'angle au centre est deux fois plus petit), donc on a finalement l'aire cherchée qui vaut $25\sqrt{3} - \dfrac{25}{3}\pi - \dfrac{25}{6}\pi = 25\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$ (soit environ 4.03 cm^2).

Du classique sur les vecteurs

1. La symétrie signifie par exemple que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BI}$, donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{AB}$; J est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (on peut aussi l'obtenir directement à l'aide de la règle du parallélogramme) ; enfin $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, soit $3\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{CA}$ ou encore $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Utilisons Chasles : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; de même, $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On constate (ou on fait le calcul) au vu des deux expression que $\overrightarrow{IK} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{IJ}$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont donc colinéaires, et les points I, J et K alignés.
3. On sait que G est aux deux tiers de la médiane $[AJ]$, donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$. On en déduit que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{JA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{JC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (puisque $\overrightarrow{JC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$). Les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires, et les droites correspondantes parallèles.
4. Les droites (HK) et (BC) étant parallèles, et comme $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, le théorème de Thalès, version vectorielle, permet de dire que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, et accessoirement que $\overrightarrow{HK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Encore des vecteurs, un peu plus rigolo

1. Les droites (BG) et (DE) sont parallèles, et $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$ donc, par le théorème de Thalès vectoriel, $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$.
2. On a $\overrightarrow{JH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DJ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{JH}$, donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{JH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DJ}$, soit en multipliant par $\frac{3}{2}$, $\overrightarrow{JH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JD}$. Les triangles JBD et JGH étant en position de Thalès (encore !), on a également $\overrightarrow{JG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JB}$.
3. Le segment $[BG]$ est la médiane issue de B dans le triangle BFH, et le point G est situé aux deux tiers de cette médiane (continue à bidouiller l'égalité de la question précédente si vous n'êtes pas convaincus), il s'agit donc du centre de gravité du triangle BFH.
4. Le point I est le milieu du segment $[BH]$, donc le segment $[FI]$ est une médiane du triangle BFH. On en déduit que $J \in (BH)$, autrement dit les points J, I et F sont alignés.

Découpages à la règle et au compas

1. Pas de figure pour l'instant.
2.
   - Dans un pentagone régulier $ABCDE$, les angles $\widehat{OAB}$, $\widehat{OBC}$, $\widehat{OCD}$, $\widehat{ODE}$ et $\widehat{OEA}$ sont égaux et leur somme vaut 360 degrés, donc chacun de ces angles a pour mesure $\frac{360}{5} = 72$ degrés. La calculatrice donne comme valeur approchée $\cos(72) \simeq 0.30902$.
   - Calculons la valeur de OJ. $OI = 2$ puisque I est le milieu de $[OB]$, et $OB = 4$ car c'est un rayon du cercle. De même, $OM = 4$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OIM rectangle en O, on obtient $IM^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, donc $IM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Comme J appartient au cercle de centre I et de rayon $[IM]$, on a $IJ = IM = 2\sqrt{5}$. On en déduit $OJ = IJ - OI = 2\sqrt{5} - 1 = 2(\sqrt{5} - 1)$ (il manquait un 2 dans l'énoncé, c'est OK qui vaut $\sqrt{5} - 1$).
     Pour calculer le cosinus de l'angle $\widehat{AOC}$, il faut trouver un triangle rectangle utile. Ce sera le triangle OKC, rectangle en O. Le cosinus d'un angle est égal au rapport du côté adjacent sur l'hypothénuse, donc ici le cosinus de l'angle $\widehat{AOC}$ est égal au rapport de la longueur OK sur la longueur OC. Or, $OC = 4$ (c'est un rayon du cercle) et $OK = \sqrt{5} - 1$ (K est le milieu de $[OJ]$). On en déduit que le cosinus vaut $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, dont une valeur approchée à la calculatrice vaut 0.30902.
   - L'angle $\widehat{AOC}$ vaut donc 72 degrés, et le polygone tracé dans le cercle est un pentagone régulier.
3. Pour la construction de l'heptadécagone, ça va pas être facile, mais je vais essayer !

Faisons un peu de géometrie avec Leonhard Euler (autre immense mathématicien)

Droite d'Euler

1. On a $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GO} - (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ (en utilisant la caractérisation du centre de gravité) $= 2\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{GA'} = -2(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA'}) = -2\overrightarrow{OA'}$.
2. Les vecteurs sont colinéaires donc les droites parallèles.
3. La droite (HA) est parallèle à (OA') qui est elle-même perpendiculaire à (BC) (c'est une médiatrice du triangle ABC) donc (HA) est perpendiculaire à (BC), il s'agit donc de la hauteur issue de A dans ABC.
4. De façon tout à fait similaire, le point H appartient aux deux autres hauteurs du triangle, donc H est l'orthocentre de ABC. Comme $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$, les points H, G et O sont alignés, donc

les centres de gravités et du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle quelconque sont alignés.

Cercle des neuf points

1. Par application du théorème des milieux dans les triangles ABC et ABH respectivement, les droites $(A'B')$ et (KL) sont toutes deux parallèles à (AB), donc sont parallèles entre elles. De même, $(B'C')$ et (LM) d'une part, $(C'A')$ et (MK) d'autre part sont parallèles.
2. Vive le théorème des milieux : dans les triangles AHC et BHC, les droites des milieux $(B'K)$ et $(A'L)$ sont toutes deux parallèles à (CH), donc parallèles entre elles (ce qui, combiné à la question précédente, prouve que $A'B'KL$ est un parallélogramme), mais également perpendiculaires à (AB), puisque la droite (CH) est une hauteur de ABC, donc perpendiculaire à (AB). Conclusion, comme $(A'B')$ est quand à elle parallèle à (AB), on a $(B'K)$ et $(A'L)$ qui sont perpendiculaires à $(A'B')$, et le quadrilatère $A'B'KL$ est un rectangle.

   Pour les deux autres quadrilatères, c'est exactement la même chose, il suffit de changer le nom des points.
3. On en déduit que les points A', B', K et L appartiennent au même cercle dont le centre est le centre du rectangle, et dont deux diamètres sont $[A'K]$ et $[B'L]$. De même, A', C', L et M sont sur un même cercle, qui se trouve être le même que le précédent puisqu'il a aussi pour diamètre $[A'L]$, mais également $[C'M]$. Les six points sont donc cocycliques.
4. Le triangle $A'DK$ est rectangle en D puisque K appartient à la hauteur (AD), donc D appartient au cercle de diamètre $[A'K]$. Pareil pour E et F dans les triangles $EB'L$ et $FC'M$.
5. Le rayon de Γ est la moitié de celui du cercle circonscrit mais je cherche un moyen de le prouver sans déborder du programme de seconde.

Position du centre du cercle des neuf points

1. La droite (OA') est perpendiculaire à (BC) donc à $(B'C')$ puisque ces deux droites sont parallèles, donc (OA') est une hauteur du triangle $A'B'C'$. De même, O appartient aux deux autres hauteurs du triangle, donc l'orthocentre de $A'B'C'$ est le point O. Quand à KLM, ses trois côtés sont parallèles aux côtés du triangle ABC (on l'a déjà vu lors de nos applications du théorème des milieux), donc ses hauteurs sont les mêmes que celles de ABC, et son orthocentre n'est autre que le point H.
2. Les segments $[A'K]$, $[B'L]$ et $[C'M]$ sont des diamètres du cercle Γ, donc ont pour milieu commun N. Les symétriques de A', B' et C' par rapport à N sont donc K, L et M, et le symétrique de $A'B'C'$ est KLM.
3. La symétrie conserve la perpendicularité donc également l'orthocentre. L'image de O, orthocentre de $A'B'C'$, par la symétrie de centre N, est donc le point H, orthocentre de KLM. Conclusion : N est le milieu du segment $[OH]$.