

Géometrie plane

Mardi 17 Juin 2008

À savoir et à savoir faire

- Définition et nom du point de concurrence des droites remarquables dans un triangle : orthocentre pour les hauteurs, centre de gravité pour les médianes, centre du cercle circonscrit pour les médiatrices, et centre du cercle inscrit pour les bissectrices).
- Théorème de Thalès et réciproque, version géométrique et vectorielle.
- Théorème de Pythagore et réciproque, et tant qu'on y est contraposée (quand on dit « $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ donc le triangle n'est pas rectangle en A », c'est le théorème qu'on utilise, sous forme de contraposée, et non la réciproque).
- Théorème du triangle inscrit dans un cercle : un triangle inscrit dans un cercle et dont l'un des côtés est un diamètre du cercle est rectangle.
- Vocabulaire sur les angles : opposés par le sommet, complémentaires, supplémentaires, alternes-internes et externes.
- Théorème des angles inscrits (deux angles inscrits dans un cercle interceptant un même arc ont même mesure) et de l'angle au centre (l'angle au centre interceptant un arc est double de l'angle inscrit interceptant le même arc).
- Définition d'une translation, symétrie, réflexion et rotation ; propriétés élémentaires de ces quatre transformations (conservation des distances et des angles, des aires, des intersections, de l'alignement, des milieux, des droites et des cercles, du parallélisme et de la perpendicularité).
- L'image d'une droite par une translation ou une symétrie est une droite parallèle, l'image d'une droite par une rotation d'angle 90° est une droite perpendiculaire.
- Triangles isométriques : définition et caractérisations (angle égal entre deux côtés égaux ; côté égal entre deux angles égaux).
- Triangles semblables : définition et caractérisations (angles égaux deux à deux ; côtés proportionnels ; angle égal entre deux côtés proportionnels), conséquence sur les aires (le rapport des aires est le carré du rapport des longueurs des côtés).
- Vecteurs : définition, calcul vectoriel (somme de vecteurs, relation de Chasles, produit d'un vecteur par un réel et propriétés), colinéarité de vecteurs (définie par le fait que les deux vecteurs ont la même direction, mais caractérisé par le fait que les vecteurs sont proportionnels) et conséquences (deux droites sont parallèles si elles sont dirigées par deux vecteurs colinéaires ; trois points A , B et C sont alignés si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Pour montrer que deux vecteurs sont colinéaires en géométrie plane non analytique (si la phrase précédente est du charabia pour vous, remplacez par « sans coordonnées »), on est souvent amenés à exprimer ces deux vecteurs en fonction de deux vecteurs fixes de la figure, et vérifier que les deux expressions sont proportionnelles).

Exercices

Mise en jambes

Soit ABC un triangle rectangle en A , H le pied de la hauteur issue de A dans ce triangle, et I et J les milieux respectifs de $[HB]$ et de $[AH]$.

1. Montrer que (IJ) est parallèle à (AB) .
2. Que représente J pour le triangle AIC ?
3. Que peut-on en déduire pour les droites (CJ) et (AI) ?

Pythagore via les triangles semblables

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A dans ABC .

1. Montrer que les triangles ABC , HAB et HAC sont semblables.
2. En déduire les égalités suivantes : $AH^2 = BH \times CH$; $AC^2 = BC \times HC$ et $AB^2 = BC \times HB$.
3. En déduire une démonstration du théorème de Pythagore.

Encore des triangles semblables

Soit ABC un triangle quelconque. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe la droite (BC) en I . La parallèle à (AC) passant par B coupe (AI) en D .

1. Montrer que le triangle ABD est isocèle.
2. Montrer que les triangles IAC et IDB sont semblables.
3. En déduire que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

Un peu plus varié

On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et les trois cercles suivants : $\mathcal{C}_1$ a pour centre A et rayon 5 cm ; $\mathcal{C}_2$ a pour centre B et rayon 5 cm ; $\mathcal{C}_3$ a pour diamètre $[AB]$. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en deux points C et D .

1. Faire une figure.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Calculer la longueur BC .
3. En déduire le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$, puis la mesure de cet angle.
4. Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.
5. Quelle est la nature du triangle BCD (justifier) ?
6. Calculer l'aire de la partie du triangle BCD qui se trouve en dehors des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Du classique sur les vecteurs

Soit ABC un triangle quelconque, I la symétrique de A par rapport à B , J le milieu de $[BC]$ et K le point vérifiant $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ à l'aide des résultats précédents, et en déduire que I , J et K sont alignés.
3. Soit G le centre de gravité de ABC . Montrer que (KG) est parallèle à (BC) .
4. Soit H le point d'intersection de (KG) et de (AB) . Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Encore des vecteurs, un peu plus rigolo

$ABGH$, $BCFG$ et $CDEF$ sont trois carrés accolés (faites une figure, vous comprendrez), I est le milieu de $[BH]$ et J le point d'intersection de (BG) et de (DH) .

1. Montrer que $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$.
2. En déduire un lien entre $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JD}$ puis entre $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{JB}$.
3. Que représente le point J pour le triangle BHF ?
4. Que peut-on en déduire pour les points J , I et F (le prouver) ?

Découpages à la règle et au compas

1. Faire une (belle) figure de la construction suivante :
 - Tracer un cercle de centre O et de rayon 4.
 - Tracer un diamètre $[AB]$, le milieu I de $[OB]$, et un rayon $[OM]$ perpendiculaire au diamètre $[AB]$.
 - Le cercle de centre I et de rayon IM recoupe le diamètre en un point J . Construire le point J .
 - La médiatrice de $[OJ]$ coupe le diamètre $[AB]$ en un point K , et le cercle en un point C . Construire les points K et C .
 - Reporter la distance $[AC]$ cinq fois autour du cercle. Que constate-t-on ?
2. On va faire une partie de la preuve que la construction précédente fonctionne.
 - Dans un pentagone régulier $ABCDE$ de centre O , calculer une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. Donner, à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée à 5 chiffres après la virgule du cosinus de cet angle.
 - Dans la construction précédente, montrer que $OJ = 4(\sqrt{5} - 1)$. En déduire la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{AOC}$. En donner une valeur approchée à cinq chiffres après la virgule.
 - Que concluez-vous du calcul précédent ?
3. Cette dernière question est consacrée à une seule construction, mais elle est un peu compliquée, je vous conseille de la faire en grand sur une feuille blanche assez grande.
 - Placer un point O au centre de la feuille et tracer un cercle de centre O (faites-le gros, le reste de la figure est inclus dans le cercle). Tracer deux diamètres perpendiculaires du cercle, et placer un point A à l'extrémité d'un des diamètres et un point B à l'extrémité de l'autre.
 - Construire le point I de $[OB]$ tel que $OI = \frac{1}{4}OB$.
 - Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{OIA}$, puis la bissectrice de cette bissectrice et de (OI) . Cette deuxième bissectrice coupe $[OA]$ en J .
 - Tracer la perpendiculaire à (IJ) passant par I puis la bissectrice de cette perpendiculaire et de (IJ) . Cette bissectrice coupe (OA) en K .
 - Tracer le cercle de diamètre $[AK]$. Il coupe $[OB]$ en un point L .
 - Tracer le cercle de centre J passant par L . Il coupe la droite (OA) en deux points P_3 et P_5 .
 - Tracer les perpendiculaires à (OA) passant par P_3 et P_5 . Elles coupent le cercle (le gros) en deux points M_3 et M_5 .
 - Construire la médiatrice du segment $[M_3M_5]$. Elle coupe le cercle au point M_4 .
 - Reporter autant de fois que nécessaire la longueur M_3M_4 sur le cercle à partir du point M_3 . Que constatez-vous ?

Si vous ne vous êtes pas trompés, vous venez d'apprendre comment découper un gâteau en 17 parts égales à la règle et au compas (pas hyper utile, mais vous pouvez toujours essayer d'impressionner les gens avec). Cette construction est due à Carl Friedrich GAUSS, l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire. Il l'a découverte alors qu'il était âgé de moins de 20 ans.

Faisons un peu de géométrie avec Leonhard Euler (autre immense mathématicien)

On considère un triangle ABC et on note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[CA]$, C' le milieu de $[AB]$, O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et G son centre de gravité.

Droite d'Euler

Soit H le point de la droite (OG) tel que $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{OA'}$ (on rappelle que le centre de gravité G du triangle vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$).
2. En déduire que les droites (OA') et (HA) sont parallèles.
3. En déduire que (HA) est une hauteur du triangle ABC et que les hauteurs d'un triangle sont concourantes (oui, je sais, vous le saviez déjà).
4. Conclure sur les positions relatives du centre de gravité, du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle.

La droite (OG) est appelée la droite d'Euler du triangle ABC .

Cercle des neuf points

On note respectivement D , E et F les pieds des hauteurs issues de A , B et C dans le triangle ABC , et K , L et M les milieux des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.

1. Prouver que les droites $(A'B')$ et (KL) sont parallèles. Que peut-on dire des droites $(B'C')$ et (LM) , $(C'A')$ et (MK) ?
2. Prouver que $A'B'KL$, $B'C'LM$ et $C'A'MK$ sont des rectangles.
3. En déduire que A' , B' , C' , K , L et M se trouvent sur un même cercle Γ . Donner trois diamètres de ce cercle.
4. Prouver que D se trouve sur le cercle Γ , puis qu'il en est de même pour E et F .
5. Comparer le rayon du cercle Γ et le rayon du cercle circonscrit à ABC .

Le cercle Γ est appelé le cercle des neuf points du triangle ABC (ou encore cercle d'Euler ou cercle de Feuerbach).

Position du centre du cercle des neuf points

On note N le centre du cercle Γ .

1. Quel est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$? Quel est l'orthocentre du triangle KLM ?
2. Quel est le symétrique du triangle $A'B'C'$ par rapport à N ?
3. En déduire que N est le milieu du segment $[HO]$.