Calcul algébrique : corrigé

Lundi 16 Juin 2008

Développer, factoriser

1. $(2x+5)^3 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$ (eh oui, les coefficients montent vite)
2. $(2x+1)(x^2-1)-3(x+1)(2x+1)+5x(2x+1)(x+1) = (2x+1)((x+1)(x-1)-3(x+1)+5x(x+1)) = (2x+1)(x+1)(x-1-3+5x) = (2x+1)(x-1)(6x-4) = 2(2x+1)(x-1)(3x-2)$
3. $(x^2+x-3)(2x+1) = 2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 6x - 3 = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 3$
4. $3x(x^2-6x+9)+4(x-2)(x^2-3x)+7(x-3)x^2 = 3x(x-3)^2+4x(x-2)(x-3)+7(x-3)x^2 = x(x-3)(3x-9+4x-8+7x) = x(x-3)(14x-17)$
5. $(4x^2-9)+2x+3 = (2x+3)(2x-3)+2x+3 = (2x+3)(2x-3+1) = (2x+3)(2x-2) = 2(x-1)(2x+3)$

Simplifier (calculatrice interdite)

1. $\dfrac{1+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{3}-3\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \dfrac{3+\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}-9\sqrt{2}-6}{9-4} = \dfrac{-3-8\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{5}$
2. $\dfrac{a^5(a^2b)^{-3}}{(a^{-1}b^3)^3b^{-2}} = \dfrac{a^5a^{-6}b^{-3}}{a^{-3}b^9b^{-2}} = a^2b^{-10}$
3. $\dfrac{(4^{-3}\times 10^3)^{-2}\times 27\sqrt{80}}{6^8\times\sqrt{54}} = \dfrac{4^6\times 10^{-6}\times 3^3\sqrt{2^4\times 5}}{2^8\times 3^8\times\sqrt{3^3\times 2}} = \dfrac{2^{12}\times 2^{-6}\times 5^{-6}\times 3^3\times 2^2\times\sqrt{5}}{2^8\times 3^9\times\sqrt{6}} = 3^{-6}\times 5^{-6}\times\sqrt{\dfrac{5}{6}}$
4. $([-1;0]\cup[2;7[)\cap(]-2;3]\cup]6;+\infty[) = [-1;0]\cup[2;3]\cup]6;7[$ (si vous n'êtes pas convaincus, faites un dessin !)
5. $\dfrac{3744}{7920} = \dfrac{1872}{3960} = \dfrac{936}{1980} = \dfrac{468}{990} = \dfrac{234}{495} = \dfrac{78}{165} = \dfrac{26}{55}$
6. $251\times 249 = (250+1)\times(250-1) = 250^2-1^2 = 25^2\times 10^2-1 = 5^4\times 100-1 = 62499$

Résoudre (un peu de tout)

1. $\dfrac{4-x}{2x+6}\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{4-x-2x-6}{2x+6}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x-2}{2x+6}\leq 0$

x		-3		$-\frac{2}{3}$	
$-3x-2$	$+$	|	$+$	0	$-$
$2x+6$	$-$	0	$+$	|	$+$
Q	$-$	||	$+$	0	$-$

On en déduit $\mathcal{S} =]-\infty;-3[\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

2. $(6-4x)^2 \leqslant (3x-5)^2 \Leftrightarrow (6-4x-3x+5)(6-4x+3x-5) \leq 0 \leftrightarrow (11-7x)(1-x) \leq 0$

x		1		$\frac{11}{7}$	
$11-7x$	$-$		$-$	0	$+$
$1-x$	$-$	0	$+$		$+$
P	$+$	0	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{S} = \left[1; \frac{11}{7}\right]$

3. $|x-2| < 4$ La distance entre x et 2 doit être plus petite que 4, donc $\mathcal{S} =]-2; 6[$
4. $x^2+4x+4 = (3x+6)(x-3) \Leftrightarrow (x+2)^2 = 3(x+2)(x-3) \Leftrightarrow (x+2)(x+2-3x+9) = 0 \Leftrightarrow$ $(x+2)(-2x+11) = 0$, donc $\mathcal{S} = \left\{-2; \frac{11}{2}\right\}$
5. $(x+1)^2 - 3(x+1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+1-3x+6) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(-2x+7) \leq 0$

x		-1		$-\frac{7}{2}$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$-2x+7$	$-$		$-$	0	$+$
Q	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $\mathcal{S} = \left[-1; \frac{7}{2}\right]$

6. $|4x+1| = |-7x+3|$. On a soit $4x+1 = -7x+3$, donc $11x = 2$ et $x = \frac{11}{2}$, soit $4x+1 = 7x-3$, donc $3x = 4$ et $x = \frac{4}{3}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{3}; \frac{11}{2}\right\}$
7. Autrement dit, $\frac{x+3}{4} < \frac{2x}{5}$, soit $5x+15 < 8x$, donc $15 < 3x$, ou encore $x > 5$, et $\mathcal{S} =]5; +\infty[$
8. $\frac{x(2x-3)}{(3-x)(x+1)} < 0$
9. Un peu d'astuce et un dessin permettent de séparer trois cas : si $x \in [-3; 1]$, la somme de ses distances à -3 et 1 vaut toujours la longueur du segment, soit 4. Mais si x est strictement à l'extérieur du segment, une des deux distances est déjà strictement plus grande que 4 et x ne peut pas être solution, donc $\mathcal{S} = [-3; 1]$.
10. Le membre de gauche vaut $-(x-3)^2$, il est donc toujours négatif (ou nul), alors qu'à droite, une valeur absolue augmentée de 2 est toujours plus grande que 2, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Encadrements

1. (a) $z \in [-1; 1]$

   (b) $3 \leq 3x \leq 9$ et $4 < 2y < 6$, donc $7 < 3x + 2y < 15$.
   $1 \leq x^2 \leq 9$ et $4 \leq 4x \leq 12$, donc $5 \leq x^2 + 4x \leq 21$. On peut aussi faire autrement en constatant que $x^2+4x = x(x+4)$. Comme $5 \leq x+4 \leq 7$, on obtient le même encadrement.

   (c) Sans factoriser, $1 \leq x^2 \leq 9$ et $-6 \leq -2x \leq -2$, donc $-4 \leq x^2 - 2x + 1 \leq 8$.
   Mais on sait bien que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, et $0 \leq x - 1 \leq 2$, donc on a en fait $0 \leq (x-1)^2 \leq 4$. L'encadrement est nettement meilleur quand on factorise d'abord (c'est toujours le cas).

   (d) Il y a plein de pièges dans ceux-là. Pour le premier, on a $2 < xy < 9$, donc $-27 < -3xy < -6$, puis on additionne tout et $-28 < 2z - 3xy + 1 < -3$.

Pour le deuxième, on a $-5 \leq 2z-3 \leq -1$. Quand on passe à l'inverse (on a le droit car tout est négatif), ça change le sens des inégalités, donc $-1 \leq \frac{1}{2z-3} \leq -\frac{1}{5}$. Par ailleurs, $-4 \leq x-5 \leq -2$. Comme ce n'est guère pratique de faire des produits de nombres négatifs, remarquons que $\frac{x-5}{2z-3} = \frac{5-x}{3-2z}$, avec $2 \leq 5-x \leq 4$ et $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3-2z} \leq 1$, donc $\frac{2}{5} \leq \frac{x-5}{2z-3} \leq 4$.

Pour $z(x+2)$, il y a un problème de signes puisque $-1 \leq z \leq 1$ et $3 \leq x+2 \leq 5$. Dans le cas où $0 \leq z \leq 1$, on aura $0 \leq z(x+2) \leq 5$. Et si $-1 \leq z \leq 0$, on a juste un changement de signe par rapport au cas précédent, et $-5 \leq z(x+2) \leq 0$, donc finalement $-5 \leq z(x+2) \leq 5$.

Enfin, $-3 \leq -3z^2 \leq 0$ (puisque $0 \leq z^2 \leq 1$, un carré étant toujours positif), donc $-1 < y - 3z^2 < 0$. L'inverse d'un tel nombre est strictement plus petit que -1, mais peut se rapprocher de $-\infty$ autant qu'on le veut, donc on peut seulement dire $\frac{1}{y-3z^2} < -1$. On obtient alors $\frac{x}{3z^2-y} > 1$ (j'ai changé le signe au dénominateur, on multiplie x par un nombre plus grand que 1, on a donc nécessairement quelque chose de plus gros), puis $\frac{x}{y-3z^2} < -1$.

2. (a) Notons m la masse du cylindre, on a $737 \leq m \leq 739$; et μ la masse volumique du fer, on a $7.79 \leq \mu \leq 7.81$.

   (b) Le volume V du cylindre vérifie $V = \frac{m}{\mu}$. Or, $\frac{1}{7.81} \leq \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{7.81}$, donc $\frac{737}{7.81} \leq V \leq \frac{739}{7.79}$ (si vous donnez des valeurs approchées, il faut absolument mettre une valeur approchée par défaut à gauche et par excès à droite pour que l'encadrement reste vrai, par exemple $94.36 \leq V \leq 94.87$).

   (c) On a donc $11.49 \leq h \leq 11.51$, h étant la hauteur du cylindre. De plus, $V = 2\pi Rh$, donc $R = \frac{V}{2\pi h}$. Comme $6.28 \leq 2\pi \leq 6.3$, on a $72.1572 \leq 2\pi h \leq 72.513$, soit en passant à l'inverse et en multipliant par l'encadrement de V, $\frac{737}{7.81 \times 72.513} \leq R \leq \frac{739}{7.79 \times 72.1572}$, soit par exemple $1.301 \leq R \leq 1.315$ (en centimètres).

Forme canonique et second degré, une approche

1. Il suffit de faire passer le 1 à gauche ...
2. On reconnait une idéntité remarquable donc on cherche à résoudre $(x-2)^2 = 1$, soit $x-2 = 1$ ou $x-2 = -1$, et on trouve donc deux solutions : $x = 3$ et $x = 1$.
3. Prenons la première : $x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 4 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 4$, donc $x+3 = 2$ ou $x+3 = -2$, ce qui donne les deux solutions $x = -1$ et $x = -5$. Pour la deuxième, $4x^2 - 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = -5 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = -5$, qui ne peut avoir de solutions puisqu'un carré est toujours positif. Vous remarquerez que la difficulté, dans chaque cas, est d'arriver à faire apparaitre une identité remarquable. L'an prochain, vous apprendrez à vous passer de cette étape.

Tableaux de signes pour valeur absolue

L'idée est que, par exemple, $|x-1| = 1-x$ sur $]-\infty; 1]$, et $x-1$ sur $[1; +\infty[$. On remplit donc le tableau non pas avec des signes mais avec des expressions selon la valeur de x :

x		-3		1		2	
$\|x-1\|$	$1-x$		$1-x$	0	$x-1$		$x-1$
$\|2x-4\|$	$4-2x$		$4-2x$		$4-2x$	0	$2x-4$
$\|3+x\|$	$-3-x$	0	$3+x$		$3+x$		$3+x$
$A(x)$	$8-2x$		$2-4x$		$-2x$		$2x-8$

1. Il faut résoudre séparément sur chaque intervalle, en tenant compte des différentes expressions : si $x \leq -3$, $A(x) = 2$ se traduit par $8 - 2x = 2$, soit $x = 3$, amis comme 3 n'appartient pas à l'intervalle considéré, ce n'est pas une solution valable ; si $-3 \leq x \leq 1$, on résout $2-4x = 2$, qui donne $x = 0$, solution valable ; sur $[1; 2]$, on cherche à résoudre $-2x = 2$, on obtient $x = -1$, ce n'est pas une solution acceptable ; enfin $2x - 8 = 2$ a pour solution $x = 5$ qui est valable. Finalement, $\mathcal{S} = \{0; 5\}$.
2. Même principe : sur $]-\infty; -3]$, on a $8 - 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$, solutions inacceptables ; sur $[-3; 1]$, on a $2 - 4x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$, donc $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ est solution ; sur $[1; 2]$, on a $-2x \leq 4$, soit $x \geq -2$, donc $[1; 2]$ tout entier est solution ; enfin sur $[2; +\infty[$, $2x - 8 \leq 4$ donne $x \leq 6$, donc $[2; 6]$ est aussi solution. En regroupant le tout, on a $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}; 6\right]$.
3. Toujours pareil : sur $]-\infty; -3]$, $8 - 2x = 2x - 1$ donne $x = \frac{7}{4}$, solution inacceptable ; sur $[-3; 1]$, $2 - 4x = 2x - 1$ donne $x = \frac{1}{6}$ qui est bien solution ; sur $[1; 2]$, $-2x = 2x - 1$ donne $x = \frac{1}{4}$, inacceptable ; enfin, sur $[2; +\infty[$, $2x - 8 = 2x - 1$ n'a pas de solution. Il y a finalement une seule solution à l'équation : $x = \frac{1}{6}$.

Une introduction aux suites

1. Le plus simple pour vous est de calculer les prix après les diverses évolutions : le billet passe à 10.8, puis à 10.152 et enfin à 10.55808 zlourks. Le prix a donc globalement augmenté de 5.6% environ.
2. On l'a calculé plus haut, il vaudra 10.56 zlourks.
3. On augmente de 5.6% à chaque fois, on obtient un prix de 11.15 zlourks en 2002 puis de 11.77 (ou 11.78 selon que vous arrondissez le prix précédant pour le calcul ou pas) zlourks en 2003.
4. Une augmentation de 5.6% correspond à multiplier à chaque fois par 1.056. Au bout de n années, on aura donc multiplié par 1.056^n. Le prix en 2 010 sera donc de $10 \times 1.056^{10} \simeq 17.24$ zlourks ; après 20 ans on monte à 29.73 zlourks, et après 50 ans à 152.47 zlourks.

1. Le ticket vaudra donc 10.75 zlourks en 2 001 et 11.5 zlourks en 2 002.
2. Au bout de n années, on paiera le ticket $10 + 0.75 \times n$ zlourks, ce qui donne 17.5 zlourks après 10 ans, 25 zlourks après 20 ans, et 47.5 zlourks après 50 ans.
3. Un peu de tâtonnements à la calculatrice permet de voir que c'est en 2 012 que le prix devient plus élevé à Krobaglop. Vous apprendrez des méthodes plus mathématiques pour faire ce genre de choses en Terminale.

Un peu de géometrie

1. L'aire du jardin vaut $n(n+3)$, qui est un produit de deux entiers donc a priori peu susceptible d'être un nombre premier. Seul cas un peu particulier, $n = 1$ (eh oui...), mais dans ce cas l'aire vaut 4, qui n'est toujours pas un nombre premier.

2. Si on augmente de 2, on a désormais des dimensions $n+2$ et $n+5$, donc une aire de $(n+2)(n+5)$. D'après l'énoncé, $(n+2)(n+5) = n(n+3)+45$, soit $n^2+7n+10 = n^2+3n+45$, donc $4n = 35$, soit $n = \frac{35}{4}$. Les dimensions initiales étaient donc $\frac{35}{4}$ et $\frac{47}{4}$.
3. Le rectangle restant a pour dimensions 3 sur n (faites un dessins si vous n'êtes pas convaincus), donc par Pythagore sa diagonale vaut $\sqrt{n^2+9}$.
4. Simple calcul : $(p+1)^2 - p^2 = p^2 + 2p + 1 - p^2 = 2p + 1$.
5. Si $2n + 1 = 9$, d'après la question précédente, on aura $n^2 + 9 = (n+1)^2$, donc la diagonale de la piscine sera un entier (égal à $n + 1$). Cela se produit si $n = 4$.
6. On veut que $\sqrt{n^2+9}$ soit entier, donc que $n^2 + 9 = k$ où k^2 est un nombre entier. mais on a alors $k^2 - n^2 = 9$, soit en factorisant $(k+n)(k-n) = 9$. Les deux facteurs k et n étant entiers, on a pas des masses de choix : soit $k+n = 1$ et $k-n = 9$; soit $k+n = k-n = 3$, soit $k-n = 1$ et $k + n = 9$. Le deuxième cas n'est pas possible (on trouve $n = 0$ et $k = \frac{3}{2}$, ce qui n'est pas très entier). Le premier donne $k = 5$ et $n = -4$, pas possible non plus. Enfin, le dernier donne $k = 5$ et $n = 4$, qui est justement le cas trouvé à la question précédente. C'est donc la seule solution au problème posé.

Quelques problèmes

1. Notons x le poids d'Anne, le poids de son frère est donc $\frac{x}{2}$ et celui de sa soeur $x + 5$. Par hypothèse, on a $x + \frac{x}{2} + x + 5 = 80$, soit $\frac{5}{2}x = 75$, donc $x = 30$. Anne pèse trente kilos.
2. Notons v la vitesse du piéton, et V celle du tapis. S'il va dans le bon sens, la vitesse cumulée est de $v + V$, et il met 30 secondes, donc on a $v + V = \frac{l}{30}$, où l est la longueur du tapis. Dans l'autre sens, la vitesse du piéton est $v - V$ (le tapis le ralentit) et il met une minute, donc $v - V = \frac{l}{60}$ (les vitesses étant exprimées en unité de longueur par seconde). En additionnant les deux équations, $2v = \frac{l}{30} + \frac{l}{60} = \frac{3l}{60} = \frac{l}{20}$, donc $v = \frac{l}{40}$. Le piéton met donc 40 secondes à parcourir la distance l, ce qui répond à la question.
3. On l'a fait à l'exercice précédent : $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, donc $1^2 - 0^2 = 1$; $2^2 - 1^2 = 3$ etc. On a donc $1 + 3 + \cdots + 199 = (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \cdots + (100^2 - 99^2) = 100^2$ (tout le reste se simplifie !). Cette somme vaut donc 10 000.
4. Notons x mon âge actuel et y le votre. J'avais votre âge, c'est-à-dire y, il y a $x - y$ années, et vous aviez alors $y - (x - y) = 2y - x$ ans. D'après la première phrase de l'énoncé, on a donc $x = 4(2y - x)$, soit $5x = 8y$. Mais quand vous aurez x années, donc dans $x - y$ années, j'aurai $2x - y$ années, et on aura alors $2x - y + x = 95$. Résumons : $3x - y = 95$, donc en reprenant l'autre équation $3x - \frac{5}{8}x = 95$, soit $\frac{19}{8}x = 95$, donc $x = 40$, et $y = 3x - 95 = 25$. Vous avez donc 25 ans.
5. Il y avait une petit erreur d'énoncé dans celui-ci, le produit devant être 711 000 000. Mais je ne suis pas certain que ce soit plus facile pour autant ...
6. Notons donc x l'âge de Diophante, l'énoncé nous donne simplement (même si de manière un peu inhabituelle) l'équation $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$, donc $9 = \frac{9}{84}x$, donc $x = 84$. Diophante est mort à 84 ans (vous pouvez vérifier, c'est vrai).