

Calcul algébrique

Lundi 16 Juin 2008

À savoir et à savoir faire

Les techniques et définitions suivantes sont à maîtriser parfaitement :

- Développer des expressions factorisées, notamment à l'aide d'identités remarquables. Note pour les plus curieux : il est bon de connaître les carrés mais aussi les cubes, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Factoriser des expressions algébriques, y compris quand le facteur commun n'est pas évident. Exemple : $(2x - 4)(x + 3) - (5 - x)(2 - x) = (x - 2)(2(x + 3) + 5 - x) = (x - 2)(x + 8)$.
- Simplifier des expressions faisant intervenir des racines carrées ou des puissances (à l'aide de la décomposition en facteurs premiers notamment). Exemple : $\frac{6^3 \times 5}{10\sqrt{8}} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 5}{2 \times 5 \times 2\sqrt{2}} = \frac{2 \times 27}{\sqrt{2}} = 27\sqrt{2}$.
- Résoudre des équations du premier degré et des équations produit. Exemple : $(x - 1)(2x + 5) = 0$ a pour solutions $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5}{2}; 1 \right\}$.
- Résoudre des inéquations du premier degré, et des inéquations produit ou quotient à l'aide d'un tableau de signes (il faut absolument avoir un 0 dans le second membre de l'inéquation sinon ça n'a pas de sens de faire un tableau de signes).

Rappel : Un tableau de signes, comme son nom l'indique, est fait pour déterminer le signe d'une expression factorisée (produit ou quotient) en utilisant la règle des signes. Une ligne pour chaque facteur (qui doit être du premier degré), plus une ligne en haut où l'on indique les valeurs de x annulant les différents facteurs, dans l'ordre croissant. Rappelons au passage que $ax + b$ est du signe de a après $\frac{b}{a}$ (autrement dit, le signe se trouvant **après** le 0 est celui de a). On utilise comme toujours une double barre verticale pour indiquer une valeur interdite. Exemple : on veut résoudre $\frac{(2x - 4)(x + 3)}{5 - x} \leq 0$:

x	-3	2	5				
$2x - 4$	-	-	0	+	+		
$x + 3$	-	0	+	+	+		
$5 - x$	+	+	+	0	-		
Q	+	0	-	0	+		-

Q désignant le quotient étudié, on obtient $\mathcal{S} = [-3; 2] \cup]5; +\infty[$.

- Connaître les différents types d'intervalles et savoir les utiliser pour noter les solutions d'équations ou d'inéquations.
- Utiliser les règles de calcul sur les inégalités : on peut additionner deux inégalités, mais on ne peut soustraire, multiplier ou quotienter que par un réel (en changeant de sens dans les deux derniers cas si le réel est négatif). On peut passer une inégalité à l'inverse en changeant le sens si les deux membres sont de même signe. On peut passer à la racine carrée ou au carré dans une inégalité si les deux membres sont positifs.

Exercices

Développer, factoriser

1. $(x - 2)(3x - 1) - (4 - x)(x - 2)$
2. $(2x - 5)(x + 2)$
3. $(2x + 1)(3x - 5) - 4x^2 + 1$
4. $(3x^2 - x + 4)(x + 1)$
5. $(3x - 6)(x + 3) - (4 - 2x)(2x - 7) + 4(x - 2)$
6. $(2x - 3)^2 - (3x + 1)^2$
7. $(x + 1)^3 + (x + 1)^2 + x + 1$

Simplifier (calculatrice interdite)

1. $\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$
2. $\frac{4^5 \times 10^2 \times 9^{-3}}{8^4 \times 3^{-5} \times 25}$
3. $\frac{6\sqrt{200}}{5\sqrt{18}}$
4. $([-3; 1[\cup]5; +\infty[) \cap (]-1; 4] \cup]7; 9])$
5. $\frac{7056}{1512}$
6. 502^2

Résoudre (un peu de tout)

1. $\frac{3x + 1}{7} \leq x - 2$
2. $(x - 5)(2x + 4) < 0$
3. $2x^2 - 8x + 8 = 0$
4. $\frac{2x + 1}{x - 3} \leq 3$
5. $(x - 5)^2 = (2x + 3)^2$
6. $\frac{x(x - 3)}{2x + 5} \geq 0$
7. $x^2 - 6x = 9 + (2x - 1)^2$
8. $3x^3 - 6x^2 + 3x = 0$

Encadrements

1. On considère trois réels x , y et z vérifiant $x \in [1; 3]$; $2 < y < 3$ et $z^2 \leq 1$.
 - (a) Indiquer à quel intervalle peut appartenir z .
 - (b) Encadrer $3x + 2y$, $x^2 + 4x$, $\frac{3}{y - 1}$.
 - (c) Encadrer $x^2 - 2x + 1$, d'abord sans factoriser, puis après factorisation. Comparer les résultats.
 - (d) Encadrer $2z - 3xy + 1$; $\frac{x - 5}{2z - 3}$; $z(x + 2)$; $\frac{x}{y - 3z^2}$.

2. Un cylindre de fer pèse 738 grammes à un gramme près. La masse volumique du fer est de 7.8 g/cm^3 à 10^{-2} .
 - (a) Réécrire les données de l'énoncé sous forme d'encadrements.
 - (b) En déduire un encadrement du volume du cylindre.
 - (c) La hauteur du cylindre est de 11.5 cm à 1 mm près. En utilisant $3.14 \leq \pi \leq 3.15$, donner un encadrement du rayon du cylindre.

Forme canonique et second degré, une approche

Voici une première approche de la méthode générale de résolution des équations du second degré, que vous étudierez en détail l'an prochain. On cherche à résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

1. Montrer que cette équation est équivalente à $x^2 - 4x + 4 = 1$.
2. En déduire les solutions de l'équation.
3. Résoudre de la même manière les équations $x^2 + 6x + 5 = 0$ et $4x^2 - 4x + 6 = 0$.

Quelques problèmes

1. Anne pèse deux fois plus que son petit frère mais cinq kilos de moins que sa grande soeur. À eux trois, ils pèsent 80 kilos. Quel est le poids d'Anne ?
2. Un piéton qui marche à une vitesse constante met 30 secondes à parcourir un tapis roulant. Il le reprend en sens inverse (en marchant toujours à la même vitesse) et met cette fois-ci 1 minute. Combien de temps aurait-il mis si le tapis roulant était en panne ?
3. Montrer que la différence entre deux carrés successifs est toujours un nombre impair. En déduire une façon de calculer $1 + 3 + 5 + \dots + 199$ à la main (et rapidement).
4. J'ai quatre fois l'âge que vous aviez, quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 95 ans ! Quel âge avez-vous ?
5. Déterminer quatre entiers naturels inférieurs à 711 dont la somme vaut 711 et le produit 711 000.
6. Pour finir sur une note historique, un classique de l'époque grecque qui propose de calculer l'âge de Diophante :

Passant sous ce tombeau repose Diophante.
 Ces quelques vers tracés par une main savante
 Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
 Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
 Le sixième marqua le temps de son enfance ;
 Le douzième fut pris par son adolescence.
 Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
 Puis s'étant marié, sa femme lui donna
 Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
 Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père.
 De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
 Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.