Calcul algébrique

Lundi 16 Juin 2008

À savoir et à savoir faire

Les techniques et définitions suivantes sont à maitriser parfaitement :

- Développer des expressions factorisées, notamment à l'aide d'identités remarquables. Note pour les plus curieux : il est bon de connaitre les carrés mais aussi les cubes, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Factoriser des expressions algébriques, y compris quand le facteur commun n'est pas évident. Exemple : $(2x-4)(x+3)-(5-x)(2-x) = (x-2)(2(x+3)+5-x) = (x-2)(x+8)$.
- Simplifier des expressions faisant intervenir des racines carrées ou des puissances (à l'aide de la décomposition en facteurs premiers notamment). Exemple : $\dfrac{6^3 \times 5}{10\sqrt{8}} = \dfrac{2^3 \times 3^3 \times 5}{2 \times 5 \times 2\sqrt{2}} = \dfrac{2 \times 27}{\sqrt{2}} = 27\sqrt{2}$.
- Résoudre des équations du premier degré et des équations produit. Exemple : $(x-1)(2x+5) = 0$ a pour solutions $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5}{2}; 1\right\}$.
- Résoudre des inéquations du premier degré, et des inéquations produit ou quotient à l'aide d'un tableau de signes (il faut absolument avoir un 0 dans le second membre de l'inéquation sinon ça n'a pas de sens de faire un tableau de signes).

> **Rappel :** Un tableau de signes, comme son nom l'indique, est fait pour déterminer le signe d'une expression factorisée (produit ou quotient) en utilisant la règle des signes. Une ligne pour chaque facteur (qui doit être du premier degré), plus une ligne en haut où l'on indique les valeurs de x annulant les différents facteurs, dans l'ordre croissant. Rappelons au passage que $ax+b$ est du signe de a après $\dfrac{b}{a}$ (autrement dit, le signe se trouvant **après** le 0 est celui de a). On utilise comme toujours une double barre verticale pour indiquer une valeur interdite. Exemple : on veut résoudre $\dfrac{(2x-4)(x+3)}{5-x} \leq 0$:
>
> | x | | -3 | | 2 | | 5 | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | $2x-4$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
> | $x+3$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ |
> | $5-x$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ |
> | Q | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | $\|$ | $-$ |
>
> Q désignant le quotient étudié, on obtient $\mathcal{S} = [-3; 2] \cup]5; +\infty[$.

- Connaitre les différents types d'intervalles et savoir les utiliser pour noter les solutions d'équations ou d'inéquations.
- Utiliser les règles de calcul sur les inégalités : on peut additionner deux inégalités, mais on ne peut soustraire, multiplier ou quotienter que par un réel (en changeant de sens dans les deux derniers cas si le réel est négatif). On peut passer une inégalité à l'inverse en en changeant le sens si les deux membres sont de même signe. On peut passer à la racine carrée ou au carré dans une inégalité si les deux membres sont positifs.

- Connaitre la définition d'une valeur absolue comme distance entre le réel x et 0.
- Résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des valeurs abeolues en utilisant la distance. Exemple : $|x-2| \geq 3$ signifie que la distance de x à 2 est plus grande que 3, soit $x \in]-\infty;-1] \cup [5;+\infty[$.
- Résoudre des équations du genre $|a| = |b|$, où a et b peuvent être des expressions algébriques. Exemple : $|2x-5| = |3-x| \Leftrightarrow 2x-5 = 3-x$ ou $2x-5 = -3+x$, soit $x = \dfrac{8}{3}$ ou $x = 2$.

Exercices

Développer, factoriser

1. $(2x+5)^3$
2. $(2x+1)(x^2-1) - 3(x+1)(2x+1) + 5x(2x+1)(x+1)$
3. $(x^2+x-3)(2x+1)$
4. $3x(x^2-6x+9) + 4(x-2)(x^2-3x) + 7(x-3)x^2$
5. $(4x^2-9) + 2x + 3$

Simplifier (calculatrice interdite)

1. $\dfrac{1+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{a^5(a^2b)^{-3}}{(a^{-1}b^3)^3b^{-2}}$
3. $\dfrac{(4^{-3} \times 10^3)^{-2} \times 27\sqrt{80}}{6^8 \times \sqrt{54}}$
4. $([-1;0] \cup [2;7[) \cap (]-2;3] \cup]6;+\infty[)$
5. $\dfrac{3744}{7920}$
6. 251×249

Résoudre (un peu de tout)

1. $\dfrac{4-x}{2x+6} \leq 1$
2. $(6-4x)^2 \leqslant (3x-5)^2$
3. $|x-2| < 4$
4. $x^2+4x+4 = (3x+6)(x-3)$
5. $(x+1)^2 - 3(x+1)(x-2) \leq 0$
6. $|4x+1| = |-7x+3|$
7. Le quart de la somme de x et de 3 est inférieure strictement au quotient du produit de x par 2 et de 5.
8. $\dfrac{x(2x-3)}{(3-x)(x+1)} < 0$
9. $|x-1| + |x+3| = 4$
10. $6x - x^2 - 9 \geqslant 2 + |x+5|$

Encadrements

1. On considère trois réels x, y et z vérifiant $x \in [1;3]$; $2 < y < 3$ et $z^2 \leq 1$.
   (a) Indiquer à quel intervalle peut appartenir z.
   (b) Encadrer $3x + 2y$, $x^2 + 4x$, $\dfrac{3}{y-1}$.
   (c) Encadrer $x^2 - 2x + 1$, d'abord sans factoriser, puis après factorisation. Comparer les résultats.
   (d) Encadrer $2z - 3xy + 1$; $\dfrac{x-5}{2z-3}$; $z(x+2)$; $\dfrac{x}{y-3z^2}$.
2. Un cylindre de fer pèse 738 grammes à un gramme près. La masse volumique du fer est de 7.8 g/cm^3 à 10^{-2}.
   (a) Réecrire les données de l'énoncé sous forme d'encadrements.
   (b) En déduire un encadrement du volume du cylindre.
   (c) La hauteur du cylindre est de 11.5 cm à 1 mm près. En utilisant $3.14 \leq \pi \leq 3.15$, donner un encadrement du rayon du cylindre.

Forme canonique et second degré, une approche

Voici une première approche de la méthode générale de résolution des équations du second degré, que vous étudierez en détail l'an prochain. On cherche à résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

1. Montrer que cette équation est équivalente à $x^2 - 4x + 4 = 1$.
2. En déduire les solutions de l'équation.
3. Résoudre de la même manière les équations $x^2 + 6x + 5 = 0$ et $4x^2 - 4x + 6 = 0$.

Tableaux de signes pour valeur absolue

À l'aide d'un tableau similaire à un tableau de signes, écrire sans valeur absolue, selon la valeur de x, l'expression $A(x) = |x-1| + |2x-4| - |3+x|$. En déduire les solutions des équations et inéquations suivantes :

1. $A(x) = 2$.
2. $A(x) \leq 4$.
3. $A(x) = 2x - 1$.

Une introduction aux suites

On étudie l'évolution du prix d'un ticket de métro dans la grande ville de Krobaglop. En janvier 2 000, le ticket coutait 10 zlourks (unité monétaire locale). Au cours de l'année 2 000, le prix du ticket subit une augmentation de 8% en mai, puis une diminution de 6% en juillet et une nouvelle augmentation de 4% en octobre.

1. Quel est le pourcentage d'évolution globale du prix du ticket sur l'année 2 000 (arrondi au dixième de pourcent) ?
2. En déduire le prix du ticket au 1er janvier 2 001.
3. En admettant que la hausse globale annuelle du prix du ticket restera la même, combien vaudra-t-il début 2 002 ? Début 2 003 (arrondi au centime près si besoin est) ?
4. Déterminer une formule donnant le prix du ticket en fonction du nombre n d'années passées depuis le 1er janvier 2 000. En déduire le prix du ticket en 2 010, 2 020, et 2 050.

La ville voisine de Schmurtz vendait aussi ses tickets à 10 zlourks au 1er janvier 2 000, mais a préféré tabler sur une augmentation régulière du prix du ticket de 75 centimes de zlourks par an (l'inflation a toujours été élevée à Schmurtz).

1. Déterminer le prix du ticket en 2 001 et en 2 002.
2. Déterminer une formule donnant le prix du billet en fonction du nombre d'années écoulées depuis 2 000, et en déduire les prix en 2 010, 2 020 et 2 050.
3. En quelle année le prix des tickets à Krobaglop dépasse-t-il celui des tickets de Schmurtz ?

Un peu de géometrie

Le jardin d'une maison a pour longueur $n+3$ et pour largeur n (où n est un entier).

1. L'aire du jardin peut-elle être un nombre premier ?
2. Quand on augmente la longueur et la largeur du jardin de 2, l'aire augmente de 45. Quelle étaient les dimensions initiales du jardin ?
3. Le propriétaire décide de réduire la taille du jardin en le rendant carré, pour construire une piscine dans le rectangle restant. Quelle est la longueur de la diagonale de la piscine ?
4. Montrer que, si p est un entier, $(p+1)^2 - p^2 = 2p+1$.
5. Trouver une valeur de n pour laquelle la longueur de la diagonale est aussi entière.
6. Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles la diagonale de la piscine a une longueur entière.

Quelques problèmes

1. Anne pèse deux fois plus que son petit frère mais cinq kilos de moins que sa grande soeur. À eux trois, ils pèsent 80 kilos. Quel est le poids d'Anne ?
2. Un piéton qui marche à une vitesse constante met 30 secondes à parcourir un tapis roulant. Il le reprend en sens inverse (en marchant toujours à la même vitesse) et met cette fois-ci 1 minute. Combien de temps aurait-il mis si le tapis roulant était en panne ?
3. Montrer que la différence entre deux carrés successifs est toujours un nombre impair. En déduire une façon de calculer $1+3+5+\cdots+199$ à la main (et rapidement).
4. J'ai quatre fois l'âge que vous aviez, quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 95 ans ! Quel âge avez-vous ?
5. Déterminer quatre entiers naturels inférieurs à 711 dont la somme vaut 711 et le produit 711 000.
6. Pour finir sur une note historique, un classique de l'époque grecque qui propose de calculer l'âge de Diophante :

   Passant sous ce tombeau repose Diophante.
   Ces quelques vers tracés par une main savante
   Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
   Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
   Le sixième marqua le temps de son enfance ;
   Le douzième fut pris par son adolescence.
   Des septs parts de sa vie, une encore s'écoula,
   Puis s'étant marié, sa femme lui donna
   Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
   Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père.
   De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
   Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.