Correction des exercices sur les Matrices

7 mars 2007

L'exercice 8 bénéficie d'une rédaction particulièrement soignée que vous pouvez prendre comme modèle (c'est presque trop détaillé, en fait). Pour les autres, la rédaction est beaucoup plus rapide, et surtout déstinée à donner les idées principales et les résultats.

Exercice 1

On obtient $CA = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 14 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$; $BC = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $BCA = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I$, dont on déduit ensuite que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{3k} = I$; $A^{3k+1} = A$ et $A^{3k+2} = A^2$.

Exercice 3

Par le calcul, on obtient $J^2 = 4J$ puis $J^3 = 16J$. Une récurrence permet alors de montrer que $J^k = 4^k J$.

Exercice 4

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2z & = & x & + & 3y \\ y & + & 2t & = & 2x & + & 4y \\ 3x & + & 4z & = & z & + & 3t \\ 3y & + & 4t & = & 2z & + & 4t \end{array} \right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $z = \frac{3}{2}y$, et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation $x + z = t$. Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme $\{x, y, \frac{3}{2}y, x + \frac{3}{2}y\}$, où x et y sont deux réels quelconques.

Exercice 5

On a $A = I+B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul peu passionnant donne $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis les puissances supérieures de B sont nulles. On a donc, via le binôme de Newton (les matrices B et I commutant bien entendu), $A^k = (B+I)^k = \binom{k}{0}I^k + \binom{k}{1}BI^{k_1} + \binom{k}{2}B^2I^{k-2} + \binom{k}{3}B^3I^{k-3} = I + kB + \frac{k(k-1)}{2}B^2 + \frac{k(k_1)(k-2)}{6}B^3$ (les termes suivants étant nuls, soit (attention les yeux) :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k+2k(k-1) & 4k+6k(k-1)+4k(k-1)(k-2) \\ 0 & 1 & 2k & 3k+2k(k-1) \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

On calcule (pour changer) $A+I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$, et la puissance suivante est bien nulle. Autrement dit, $A = B - I$, où B est une matrice nilpotente. On peut donc utiliser Newton : $A^k = (B-I)^k = (-I)^k + kB(-I)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}B^2(-I)^{k-2} = (-1)^k(I - kB + \frac{k(k-1)}{2}B^2)$, soit encore

$$A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -ka & -ka \\ -k & 1 + \dfrac{k(k-1)}{2}a & \dfrac{k(k-1)}{2}a \\ k & -\dfrac{k(k-1)}{2}a & 1 - \dfrac{k(k-1)}{2}a \end{pmatrix}$$

Exercice 7

On a bien $A = 6I + B$. Par contre, le petit souci, c'est que la matrice B n'a pas des puissances spécialement évidentes à calculer. On peut donc toujours écrire le binôme de Newton pour le plaisir, mais on n'obteindra pas de belle grosse formule pour les puissances de A. Tout le monde se demande donc pourquoi j'ai posé cet exercice. Je ne vous le cacherai pas : moi aussi.

Exercice 8

La bonne méthode pour prouver ce genre de propriété est la récurrence. Cherchons donc à prouver la propriété P_k : il existe un réel que l'on notera a_k, tel que la matrice A^k soit de la forme $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_k & 1-2a_k & 2a_k \\ a_k & -a_k & a_k+1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Il faut vérifier que A^1, c'est-à-dire A elle-même, est de la forme donnée. Or, si on pose $a_1 = 3$, on a bien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times 3 & 1-2\times 3 & 2\times 3 \\ 3 & -3 & 3+1 \end{pmatrix}$, donc la propriété P_1 est vérifiée.

Hérédité : Faisons l'hypothèse de récurrence que P_k est vérifiée. Il nous faut alors prouver P_{k+1}, et pour cela calculer A^{k+1}. Or, $A^{k+1} = A \times A^k$ avec par hypothèse de récurrence $A^k =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_k & 1-2a_k & 2a_k \\ a_k & -a_k & a_k+1 \end{pmatrix}$ (où a_k est un réel pour l'instant indéterminé). Le calcul du produit donne alors $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4a_k & -5+4a_k & 6-4a_k \\ 3-2a_k & -3+2a_k & 4-2a_k \end{pmatrix}$. Si on appelle a_{k+1} le réel défini par $a_{k+1} = 3-2a_k$, A^{k+1} vérifie bien la propriété demandée puisque $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(3-2a_k) & 1-2(3-2a_k) & 2(3-2a_k) \\ 3-2a_k & -(3-2a_k) & 3-2a_k+1 \end{pmatrix}$. La propriété P_{k+1} est donc vérifiée, donc par le principe de récurrence, P_k est vrai pour tout entier $k \geq 1$.

Reste à calculer la valeur de a_k ! La suite a_k est arithmético-géométrique puisque $a_{k+1} = 3-2a_k$, son équation caractéristique est $x = 3-2x$, dont la solution est $x = 1$. On introduit donc la suite auxiliaire $(b_k)_{k\geq 1}$, définie par $b_k = a_k - 1$, et qui vérifie $b_{k+1} = a_{k+1} - 1 = (3-2a_k) - 1 = 2 - 2a_k = -2(a_k - 1) = -2b_k$. La suite b_k est donc une suite géométrique de raison -2. Par ailleurs, son deuxième terme est $b_1 = 2$ puisque $a_1 = 3$, donc $b_k = -(-2)^k$ et $a_k = 1-(-2)^k$. La matrice A^k peu donc s'écrire sous la forme $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(1-(-2)^k) & 1-2\times(1-(-2)^k) & 2\times(1-(-2)^k) \\ 1-(-2)^k & (-2)^k-1 & 2-(-2)^k \end{pmatrix}$.

Exercice 9

1. On commence par un peu de calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.
2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons P_k la propriété "Il existe deux réels a_k et b_k tels que $A^k = a_kA^2 + b_kA$". Pour une fois on initialise la récurrence pour $k = 2$: P_2 est bien vérifiée en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (on a bien $A^2 = 1\times A^2 + 0\times A$. Supposons P^k vérifiée, on a alors $A^{k+1} = A\times A^k = A\times(a_kA^2 + b_kA) = a_kA^3 + b_kA^2 = a_k(6A - A^2) + b_kA^2 = (b_k - a_k)A^2 + 6a_kA$, qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.
3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes : $a_{k+1} = b_k - a_k$ et $b_{k+1} = 6a_k$. On a donc $b_k = 6a_{k_1}$ ce qui donne en remplaçant dans la première relation $a_{k+1} = -a_k + 6a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$, dont les deux racines sont $x = 2$ et $x = -3$. On a donc $a_k = \alpha 2^k + \beta(-3)^k$, avec $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ et $a_3 = 8\alpha - 27\beta = -1$. La résolution du système donne $\alpha = \frac{1}{10}$ et $\beta = \frac{1}{15}$, donc $a_k = \dfrac{2^{k-1} - (-3)^{k-1}}{5}$, et $b_k = 6 \times \dfrac{2^{k-2} - (-3)^{k-2}}{5}$.
4. On se contentera d'écrire $A^k = \begin{pmatrix} 6a_k - 2b_k & -3a_k + b_k & -3a_k + b_k \\ -8a_k + 6b_k & 6a_k - 2b_k & 2a_k - 4b_k \\ 2a_k - 4b_k & -3a_k + b_k & a_k + 3b_k \end{pmatrix}$ sans préciser les valeurs. Pour $k = 1$, on obtient avec les formules de la question précédente $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, ce qui donne $A = 0\times A^2 + 1\times A$, ce qui est indiscutablement vrai. Et pour $k = 0$, on obtient $a_0 = \frac{1}{6}$ et $b_0 = \frac{1}{6}$, et là ça ne marche plus...

Exercice 10

1. En posant $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a effectivement $M_{a,b} = aI + bK$.

2. Plutôt que de faire un calcul de produit de matrices pénible, utilisons la question précédente : $M_{a,b} \times M_{c,d} = (aI + bK)(cI + dK) = acI + adK + bcK + bdK^2 = acI + (ad + bc)K + bdK^2$, et on obtient la même chose en faisant le produit dans l'autre sens.
3. Un petit calcul montre que $K^2 = 2K$. Une récurrence immédiate montre alors que $K^k = 2^{k-1}K$. Comme $M_{1,-1} = I - K$, on a via Newton $M_{1,-1}^k = (I - K)^k = \sum_{p=0}^{k} I^p(-K)^{k-p} = I - (\sum_{p=0}^{k-1}(-2)^{k-p})K$.

Exercice 11

1. On a bien $A^2 = 5A - 4I$.
2. On procède comme à l'exercice 9, par récurrence. On peut l'initialiser à $k = 1$ ou $k = 2$, et en la supposant vérifiée au rang k, on a $A^{k+1} = A(a_kA + b_kI) = a_kA^2 + b_kA = 5a_kA - 4a_kI + b_kA$, qui est bien de la formé demandée avec $a_{k+1} = 5a_k + b_k$ et $b_{k+1} = -4a_k$.
3. On a donc $b_k = -4a_{k-1}$, puis $a_{k+1} = 5a_k - 4a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 5x + 4 = 0$, dont les racines sont 1 et 4. Après un calcul bref mais intense, on doit aboutir à $a_k = (\dfrac{4^k - 1}{3}$ et $b_k = \dfrac{4 - 4^k}{3}$.
4. On en déduit que $A^k = \begin{pmatrix} 2a_k + b_k & a_k & a_k \\ a_k & 2a_k + b_k & a_k \\ a_k & a_k & 2a_k + b_k \end{pmatrix}$ et, comme $B = \frac{1}{4}A$, on a $B^k = \frac{1}{4^k}A^k$. On peut s'amuser à écrire les coefficients de cette matrice, les 4^k disparaissant dans les formules donnant a_k et b_k (enfin, il y en a, mais au dénominateur) et on remarque que les coefficients se rapprochent de plus en plus de ceux de la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 12

1. On peut commencer à droite ou à gauche au choix. $PT = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 24 \\ 4 & 8 & 0 \\ -4 & -0 & -12 \end{pmatrix}$ et $PTQ = \begin{pmatrix} 56 & 64 & 64 \\ 24 & 16 & 48 \\ -56 & -56 & -88 \end{pmatrix}$ ce qui vaut bien $8A$.
2. Le calcul donne $PQ = QP = 8I$, donc $A^2 = \dfrac{1}{64}PTQPTQ = \dfrac{1}{64}PT(8I)TQ = \dfrac{1}{8}PT^2Q$ puis $A^3 = A^2 \times A = \dfrac{1}{8}PT^2Q \times \dfrac{1}{8}PTQ = \dfrac{1}{64}PT^2(QP)TQ = \dfrac{1}{8}PT^3Q$. Par récurrence, on obtient facilement $A^k = \dfrac{1}{8}PT^kQ$. Or, T étant diagonale, on sait que $T^k = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$, ce qui permet si on le souhaite d'obtenir de belles formules pour les coefficients de A^k.

Exercice 13

1. C'est très simple, mais faisons-le de manière formelle pour nous échauffer avant la suite. En fait, on a $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Ici, il suffit de constater que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
2. Pas de difficulté non plus, $Tr(A + B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = Tr(A) + Tr(B)$.

3. Un peu plus rigolo : $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$, avec $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, donc $Tr(AB) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}b_{ji}$. De la même façon, on a $Tr(BA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{ij}a_{ji}$. Je vous laisse vous convaincre que les deux sommes sont égales.
4. Si une telle égalité était vérifiée, on aurait $Tr(AB - BA) = Tr(I) = n$. Mais d'après les questions précédentes, $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$, ce n'est donc pas possible.

Exercice 14

1. Calculons $M_a^2 = \begin{pmatrix} 1-4a+6a^2 & 2a-3a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 1-4a+6a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 2a-3a^2 & 1-4a+6a^2 \end{pmatrix}$. Le réel a_0 doit donc à la fois vérifier $1 - 4a_0 + 6a_0^2 = 1 - 2a_0$ et $2a_0 - 3a_0^2 = a_0$. La première équation a pour solutions 0 et $\frac{1}{3}$, et celles de la deuxième sont 0 et $\frac{1}{3}$ également. Il y a donc en fait deux solutions, mais la deuxième est plus intéressante (sinon, on a juste la matrice identité). Dans ce cas, tous les coefficients de M_{a_0} sont égaux à $\frac{1}{3}$.
2. En posant $\alpha = 1 - 3a$, on a effectivement l'égalité demandée.
3. On a déjà vu que $P^2 = P$; on calcule que $Q^2 = Q$, $PQ = 0$ et $QP = 0$.
4. On a $M_a^2 = (P + \alpha Q)^2 = P^2 + \alpha PQ + \alpha QP + \alpha^2 Q^2 = P + \alpha^2 Q$. Par une récurrence facile, on obtient $M_a^k = P + \alpha^k Q$.

Exercice 15

En regardant de près les formules du produit, on se rend compte que le produit $E_{ij} \times E_{kl}$ sera nul sauf dans le cas où $j = k$, auquel cas il vaut E_{il}.