Corrigé des Exercices sur les Espaces vectoriels

ECE1 Lycée Dumas

19 juin 2007

Exercice 1

A n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il est bien stable par somme et par produit par un réel positif, mais pas par produit par un réel négatif ; par exemple $(2,6)\ inA$ mais $-3(2,6) = (-6,-18) \notin A$.

B n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, il est stable par produit par un réel mais pas par somme ; par exemple $(0;2) \in B$, $(-4;0) \in B$, mais $(0,2) + (-4,0) = (-4,2) \notin B$.

C est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: si $(x,y) \in C$ et $(x',y') \in C$, alors $x = y$ et $x' = y'$ donc $x + x' = y + y'$ et $(x,y) + (x',y') \in C$; de même, si $x = y$, alors $\lambda x = \lambda y$ donc C est stable par produit par un réel.

D n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il n'est stable ni par somme ni par produit par un réel ; par exemple $(2,-1) \in D$, mais $3(2,-1) = (6,-3) \in D$.

Exercice 2

On peut écrire F sous la forme $F = \{(x,y,x+y) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $F = Vect((1,0,1);(0,1,1))$ (F est bien constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs). C'est donc bien un sous-ev de $\mathbb{R}^3$. De même, $G = Vect((1,1,1);(-1,1,-3))$ est un ev. L'intersection des deux ensembles est constitué des éléments de G vérifiant l'équation définissant F, donc $F \cap G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a-b+a+b-a+3b = 0\} = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a = -3b\} = \{(-4b,-2b,-6b) \mid b \in \mathbb{R}\} = Vect((-4,-2,-6))$. L'intersection est donc également un ev.

Exercice 3

Il suffit de « retourner » le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} Y_1 & = & X_1 & + & X_2 & + & X_3 \\ Y_2 & = & X_1 & + & X_2 & & \\ Y_3 & = & 2X_1 & + & X_2 & - & X_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} Y_1 & - & Y_2 & = & X_3 & & \\ & & Y_2 & = & X_1 & + & X_2 \\ Y_1 & + & Y_3 & = & 3X_1 & + & 2X_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & Y_1 & - & Y_2 & = & X_3 \\ 3Y_2 & - & Y_1 & - & Y_3 & = & X_2 \\ Y_1 & + & Y_3 & - & 2Y_2 & = & X_1 \end{array}\right.$$

On a exprimé les vecteurs X_1, X_2 et X_3 comme combinaisons linéaires de Y_1, Y_2 et Y_3, donc ils appartiennent à $Vect(Y_1, Y_2, Y_3)$. Comme l'espace vectoriel engendré par une famille est le plus petit qui la contient, on a alors $Vect(Y_1, Y_2, Y_3) \subset Vect(X_1, X_2, X_3)$. Mais de la même façon, les Y_i étant définis comme combinsais linéaires des X_i, l'inclusion en sens inverse est vraie. Les deux espaces sont donc les mêmes.

Remarquons que d'un point de vue matriciel, on a $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$, les deux matrices étant inverses l'une de l'autre (si la matrice n'était pas inversible, les deux espaces vectoriels engendrés ne seraient pas les mêmes).

Exercice 4

On a $F = \left\{ \left(x, y, \dfrac{x+y}{4} \right) \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\left(1, 0, \dfrac{1}{4} \right) ; \left(0, 1, \dfrac{1}{4} \right) \right)$. Cette dernière famille est donc génératrice. Pour G, il faut d'abord résoudre le système : on a $z = -x - y$, ce qui donne en remplaçant dans la deuxième équation $x - 2y = 0$, donc $x = 2y$, puis $z = -2y - y = -3y$. Finalement, $G = \{(2y, y, -3y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((2, 1, -3))$.

Exercice 5

Pour F, il faut commencer par résoudre le système (on peut déjà remarquer que t n'apparait pas dans le système donc peut prendre n'importe quelle valeur) : la dernière équation donne $z = 4x$, qu'on peut remplacer dans les deux premières équations pour obtenir $y - 7x = 6x - 3y = 0$. On obtient facilement $x = y = 0$, donc $z = 0$ et $F = \{(0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = Vect((0, 0, 0, 1))$. Une base de F est donc constituée du seul vecteur $((0, 0, 0, 1))$.

C'est beaucoup plus simple pour G : $G = Vect((1, 2, 4, 2); (-2, -3, 0, 1); (1, 0, 2, -1)$. Encore faut-il vérifier que cette famille est libre pour que ce soit une base de G. Supposons donc qu'une combinaisons linéaire de ces vecteurs soit nulle : $\lambda(1, 2, 4, 2) + \mu(-2, -3, 0, 1) + \nu(1, 0, 2, -1) = 0$. En regardant la deuxième coordonnée, on obtient $2\lambda - 3\mu = 0$, donc $\mu = \dfrac{3}{2}\lambda$. De même, avec la troisième coordonnée, on obtient $4\lambda + 2\nu = 0$, donc $\nu = -2\lambda$. On peut désormais remplacer tout cela dans la première coordonnée : $\lambda - 2\mu + \nu = 0$, donc $-4\lambda = 0$. On en déduit que $\lambda = 0$, puis $\mu = \nu = 0$, donc la famille est libre. Elle forme donc bien une base de G (sui est donc de dimension 3).

Pour H, il faut aussi commencer par résoudre le système. On a $z = x + y$ (première équation) et $t = y - 2x$ (deuxième équation), ce qui donne en remplaçant dans la dernière équation $-2y - 2x = 0$, soit $y = -x$. On en déduit que $z = 0$ et $t = -3x$. Finalement, $H = \{(x, -x, 0, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -1, 0, -3))$. Ce vecteur forme bien entendu une base de H.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$, tout famille génératrice de trois vecteurs est une base. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cherchons λ, μ, ν tels que $(x, y, z) = \lambda(0, 1, 1) + \mu(2, 0, -1) + \nu(2, 1, 1)$. La première coordonnée donne $2\mu + 2\nu = x$, soit $\mu = \dfrac{x}{2} - \nu$. La deuxième coordonnée donne $\lambda + \nu = y$, donc $\lambda = y - \nu$. Enfin, on a pour la troisième coordonnée $\lambda - \mu + \nu = z$, donc en remplaçant $\nu = -z + y + \dfrac{x}{2}$. On en déduit $\lambda = z - \dfrac{x}{2}$ et $\mu = z - y$. On peut donc exprimer tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des trois vecteurs de la famille, elle est génératrice et comporte trois éléments, c'est une base. Pour obtenir les coordonnées de $(4, -1, 1)$ dans cette nouvelle base, il suffit de calculer les valeurs de λ, μ et ν correspondant à $x = 4$, $y = -1$ et $z = 1$. On obtient $\lambda = -3$; $\mu = 2$ et $\nu = 0$. Les coordonnées de $(4, -1, 1)$ dans la base $((0, 1, 1); (2, 0, -1); (2, 1, 1))$ sont donc $(-3, 2, 0)$. De même, les coordonnées de $(1, 0, 0)$ deviennent $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2} \right)$.

Pour l'autre base, la méthode est la même. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $(x, y, z) = \lambda(3, -1, 1) + \mu(2, 0, 0) + \nu(1, -2, 4)$, les deux dernières coordonnées donnent $-\lambda - 2\nu = y$ et $\lambda + 4\nu = z$. En faisant la somme des deux, on obtient $\nu = \dfrac{y+z}{2}$, puis $\lambda = -2y - z$. Enfin, la première coordonnée donne $3\lambda + 2\mu + \nu = x$, donc $2\mu = x - 3\lambda - \nu = x + \dfrac{11}{2}y + \dfrac{5}{2}z$. Les nouvelles coordonnées de $(4,-1,1)$ sont donc $\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ et celles de $(1,0,0)$ sont $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Exercice 7

Comme l'espace vectoriel possède une base formée de trois vecteurs, il est de dimension 3. Il suffit donc de montrer que les familles sont génératrices pour qu'elles forment des bases. Or, si (e_1, e_2, e_3), tout élément de E peut s'écrire sous la forme $x = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = \dfrac{\lambda + \mu - \nu}{2}(e_1 + e_2) + \dfrac{-\lambda + \mu + \nu}{2}(e_2 + e_3) + \dfrac{\lambda - \mu + \nu}{2}(e_3 + e_1)$, donc il est combinaison linéaire de la famille (e_1, e_2, e_3), qui est donc génératrice et donc une base de E. De même, si $x = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$, $x = (\lambda - \mu)e_1 + (\mu - \nu)(e_1 + e_2) + \nu(e_1 + e_2 + e_3)$ donc $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base.

Exercice 8

L'ensemble des solutions du premier système peut tout simplement s'écrire $\{(-2y-3z-4t, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{R}^3\} = Vect((-2,1,0,0); (-3,0,1,0); (-4,0,0,1))$. Cette famille de vecteurs est libre puisqu'une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs devrait annuler les trois dernières coordonnées, ce qui impose que ses trois coefficients soient nuls. C'est donc une base de l'ensemble des solutions de l'équation.

Pour le deuxième système, la première équation donne $t = x+y+z$, puis la deuxième $3x+4y+z = 0$, soit $z = -3x - 4y$. On a donc $t = -2x - 3y$ et l'ensemble des solutions est $\{(x, y, -3x - 4y, -2x - 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-3,-2); (0,1,-4,-3))$. Cette famille est constituée de deux vecteurs non proportionnels, elle est donc libre et constitue une base de l'ensemble des solutions du système.

Exercice 9

1. Soient X_1, $X_2 \in F$, alors $AX_1 = AX_2 = 0$, donc $A(X_1 + X_2) = 0$ et $X_1 + X_2 \in F$. De même, si $AX = 0$, on a $A(\lambda X) = 0$, donc F est stable par somme et produit par un réel, c'est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$.
2. Il faut pour cela résoudre le système homogène dont la matrice est A :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & & & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$
La dernière équation donne $x = 5z$, ce qui en remplaçant dans les premières nous donne $-y + 7z = 0$ et $y - 7z = 0$. ces deux équations étant équivalentes, on en déduit simplement que $y = 7z$, donc $F = \{(5z, 7z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = Vect((5,7,1))$. Ce vecteur est une base de F.
3. Supposons Y_1, $Y_2 \in G^2$, on a donc $Y_1 = AX_1$ et $Y_2 = AX_2$. Mais alors, $Y_1 + Y_2 = A(X_1 + X_2) \in G$. De même, $\lambda Y_1 = \lambda AX_1 = A(\lambda X_1)$, donc $\lambda Y_1 \in G$. L'ensemble G est donc un sous-ev de $\mathbb{R}^3$.
4. $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ -2x & + & y & + & 3z & = & b \\ -x & & & + & 5z & = & c \end{array}\right.$ a une solution. Si l'on effectue la même manipulation sur les lignes qu'à la question 2, on obtient de même y et x en fonction de z (et de a, b et c, naturellement), mais en plus on a la condition $a - b + c = 0$. On en déduit que $G = \{(a, b, b-a) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-1); (0,1,1))$.
5. Les deux vecteurs de la famille précédentent ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, donc une base de G.

Exercice 10

1. Il suffit de constater qu'on peut remplacer x par n'importe quelle valeur positive, en particulier 1 : on a alors $a + b = 0$.
2. En effet, si $x > 1$, on peut diviser l'égalité de départ par $x^2 \ln x$, qui ne s'annule, et on obtient $\frac{a}{x \ln x} + \frac{b}{\ln x} + \frac{c}{x} + d = 0$. Regardons maintenant la limite du membre de gauche quand x tend vers $+\infty$, elle vaut d. Mais comme ce membre de gauche est constant égal à 0 par hypothèse, on doit avoir $d = 0$.
3. C'est exactement la même chose en divisant cette fois par x^2 (et en utilisant que $d = 0$). La limite vaut cette fois-ci b (on a une croissance comparée pour le dernier terme), donc $b = 0$.
4. Comme $a + b = 0$ et $b = 0$, on a donc $a = 0$. Seul c peut encore être non nul, c'est-à-dire qu'on a $cx \ln x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui ne se produit que si $c = 0$ (sinon, la fonction ne s'annule que pour $x = 1$).
5. On vient de montrer que toute combinaison linéaire nulle de la famille avait des coefficients nuls, ce qui prouve que la famille est libre. Comme elle est de plus génératrice (par hypothèse !), c'est une base de E, sui est donc de dimension 4.

Exercice 11

1. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (I, J, K, L), qui est un espace vectoriel, et même précisément l'espace vectoriel engendré par cette famille.
2. Supposons $aI + bJ + cK + dL = 0$, on a donc $\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ d & a & c & b \\ b & d & a & c \\ c & b & d & a \end{pmatrix} = 0$, ce qui implique manifestement $a = b = c = d = 0$. La famille est donc libre.
3. La famille (I, J, K, L) est libre et génératrice, elle engendre donc un espace vectoriel de dimension 4.
4. On calcule sans difficulté $J^2 = L$, $K^2 = L$, $L^2 = L$, $J^3 = K$, $K^3 = J$ et $L^3 = L$.
5. On a $JK = JJ^3 = J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. De même, $KJ = I$, puis $KL = LK = K^3 = J$ et $JL = LJ = J^3 = K$
6. Soient deux matrices de E, qui s'écrivent donc $aI + bJ + cK + dL$ et $eI + fJ + hK + iL$. Leur produit, via un calcul passionnant et en utilisant les résultats des deux questions précédentes, vaut $(ae + bh + cf + di)I + (af + be + ci + dh)J + (ag + bi + ce + df)K + (ai + bf + cg + de)L$, qui appartient bien à E. L'ensemble E est ce qu'on appelle une algèbre (espace vectoriel + stabilité par produit interne).

Exercice 12

1. La fonction exponentielle est l'exemple qui nous vient à l'esprit. Le but de l'exercice est de montrer que c'est (presque) la seule à vérifier $f' = f$.
2. Soient deux fonctions f et g vérifiant $f' = f$ et $g' = g$. On a $(f + g)' = f' + g' = f + g$, donc $f + g \in E$. De même, $(\lambda f)' = \lambda f' = \lambda f$, donc $\lambda f \in E$. L'ensemble E est donc un sous-ev de l'espace vectoriel des fonction réelles.
3. Si f et g sont deux fonction dans E (et que g ne s'annule pas), on a $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - gf}{g^2} = 0$. La fonction $\frac{f}{g}$ est donc constante. Tous les éléments de E sont donc proportionnels, ce qui prouve que E est de dimension 1.

4. La fonction e^x est donc une base de E. Autrement dit, $\{x \mapsto ke^x \mid k \in \mathbb{R}\}$.