Géométrie d'Arakelov non-archimédienne

Guillaume Lafon

11 août 2004

Table des matières

Introduction

Ce texte reprend le contenu d'un exposé fait le 4 juin 2003 dans le cadre du cours de DEA donné par V.Maillot et C.Mourougane à l'université Paris 6 et intitulé Géométrie d'Arakelov.

L'objectif de cet exposé est d'introduire des analogues de tous les outils de la géométrie d'Arakelov "classique" (on emploiera désormais ce mot, sans les guillemets, pour désigner la théorie des variétés arithmétiques définies sur le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres, comme exposé dans [?]) dans un cadre plus général. La théorie y perd les aspects purement analytiques que l'on a dans le cas classique avec l'étude de variétés analytiques complexes, mais tous les principaux objets trouvent des équivalents dans ce nouveau cadre, et on sera à même d'y énoncer une formule de Riemann-Roch, but du présent exposé.

Le contenu de cet exposé est entièrement repris des deux articles [?] et [?]. Ce texte ne comprenant pas de démonstration détaillée, le lecteur est invité à consulter ces textes pour plus de détails.

1 Notations et outils

1.1 Le cadre de travail

On notera dans toute la suite du texte Λ un anneau de valuation discrète excellent, K son corps des fractions et k son corps résiduel. On désignera par X un schéma propre et lisse sur $Spec(K)$ et on appellera modèle de X un schéma propre et plat $\mathcal{X}$ défini sur $Spec(\Lambda)$ tel que $\mathcal{X} \times_{Spec(\Lambda)} Spec(K)$, fibre générique de $\mathcal{X} \to Spec(\Lambda)$, soit isomorphe à X. On notera $\mathcal{X}_f = \mathcal{X} \times_{Spec(\Lambda)}$

$Spec(k)$ la fibre spéciale. Dans l'analogie avec le cas classique, cette fibre spéciale va jouer le rôle de la variété des points complexes, et c'est donc à partir de ce schéma $\mathcal{X}_\prime$ que l'on va définir tous les outils arithmétiques associés à X.

Pour plus de simplicité, on fera également ime hypothèse de régularité sur la catégorie des modèles de X : si on note $\mathcal{M}(X)$ la catégorie des modèles réguliers de X (les flèches étant les morphismes de schémas se restreignant à l'identité de X sur la fibre générique), on supposera que les modèles pour lesquels $\mathcal{X}_0^{red}$ est un diviseur à croisements normaux (on appellera désormais ces modèles DCN) forment une partie cofinale de $\mathcal{M}(X)$. Dans toute la suite, on ne considèrera que des modèles réguliers.

Remarque 1. *Si Λ est localisation d'une algèbre de type fini sur un corps de caractéristique zéro (ce qui est le cas qu'on étudiera le plus volontiers, puisqu'on s'intéressera principalement à des schémas définis sur $\mathbb{C}(t)$ ou $\mathbb{C}((t))$), cette dernière condition est automatiquement vérifiée.*

1.2 Groupes de Chow

On va commencer à définir tous les outils nécessaires à l'étude de telles variétés, les plus simples étant les groupes de Chow. pour définir un groupe de Chow sur X, on ne peut pas se contenter de prendre le groupe de Chow de la variété complexe associée comme dans le cas classique, il faut tenir compte des fibres spéciales de tous les modèles réguliers de X, d'où l'idée de définir les objets par limite projective.

Definition 1. *Si Y est propre de type fini sur $Spec(\Lambda)$ (en particulier pour un modèle DCN), on note $CH_k(Y)$ son k-ème groupe de Chow, c'est-à-dire l'ensemble des cycles de dimension k sur Y modulo équivalence rationnelle. On appelle classe fondamentale la classe dans CH_{dimY} de Y, également notée $[Y]$.*

Remarque 2. *Si on ne se restreint pas à des modèles possédant une certaine régularité, on a des difficultés pour la définiiton des groupes de Chow, en particulier, la notion de dimension pose problème sur des modèles qui ne sont pas propres ; pour plus de détails sur la façon de contourner ces difficultés, on pourra se reporter à [**?**], qui donne les définitions les plus générales des groupes de Chow et de l'intersection (entre autres...)*

Definition 2. *On définit les groupes de Chow contravariants $CH^k(Y)$ par l'isomorphisme de Poincaré $CH^k(Y) \simeq CH_{d-k}(Y)$ (où d est la dimension de Y).*

Remarque 3. *On peut en fait définir les groupes de Chow contravariants de manière intrinsèque, mais c'est un peu technique. Pour un morphisme de modèles réguliers $Y \xrightarrow{f} Z$, on définit $CH^k(f)$ comme $\{Cg : CH_k(Z) \rightarrow$*

$CH_{k-p}(Z) \times_Y X\}$ *associés à des morphismes* g *de* Z *dans* X *vérifiant un certain nombre de conditions techniques, et on pose ensuite* $CH^k(Y) = CH^k(id)$.

Proposition 1. *Si* $Y \xrightarrow{f} Z$ *est un morphisme plat de fibres de dimension constante* d*, on peut définir une classe canonique* $[f] \in CH_{-d}(f)$ *qui vérifie* $[f](\alpha) = f^{-1}(\alpha)$ *pour un* $k-d$*-cycle* α *sur* Z*. Pour un morphisme* $Y \xrightarrow{f} Z$ *qui est localement intersection complète de dimension* d*, on peut de même définir une classe canonique* $[f] \in CH^d(f)$*.*

Corollaire 1. *Si* $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}'$ *est un morphisme de modèles réguliers de* X*, en notant* $\pi_0 : \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}'_0$ *la restriction à la fibre spéciale, on*