Chapitre 5 : Calcul de primitives et équations différentielles

MPSI Lycée Camille Jullian

10 novembre 2026

Lors d'une grosse fiesta organisée chez les fonctions,
la fonction exponentielle pleurniche dans un coin.
Les autres fonctions viennent la voir :
- Bah pourquoi tu pleures ?
- Bououh snif, je suis toute seule, bouhouhou.
- Bah viens avec nous, on va t'intégrer !
- Non, snif snif, c'est pas la peine, bouhouhou, ça changera rien !

Les sociétés naissantes sont toujours primitives.

Richard Matheson (dans *Je suis une légende*).

Les équations différentielles sont un outil absolument fondamental en mathématiques, intervenant très régulièrement dans quantité de problèmes faisant intervenir une modélisation par des fonctions. Vous en retrouverez régulièrement l'usage en physique notamment. Les problèmes de résolution d'équations différentielles sont en général extrêmement difficiles à résoudre (nombre de problèmes mathématiques ouverts à l'heure actuelle concernent des équations différentielles), c'est pourquoi nous nous contenterons dans ce chapitre d'apprendre à résoudre des types très particuliers d'équations. Dans les cas qui nous concernent, les méthodes sont clairement définies et leur application quasiment mécanique, nécessitant en gros uniquement de savoir calculer des primitives dans le cas des équations du premier ordre.

Objectifs du chapitre :

- Reconnaitre sans hésitation les primitives classiques.
- Maîtriser les techniques d'intégration par parties et de changement de variable, et savoir les employer à bon escient.
- Savoir résoudre une équation linéaire du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants, en maîtrisant notamment la méthode de variation de la constante.
- Comprendre et savoir analyser un problème de recollement de solutions.

1 Primitives et intégrales

1.1 Définitions

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f sur I si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F' = f$.

Proposition 1. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) est également une primitive de f. Réciproquement, si G est une primitive de f, la fonction $G - F$ est constante (autrement dit, il existe une constante k pour laquelle $G = F + k$).

Démonstration. C'est essentiellement évident : si $F' = f$, alors $(F + k)' = f$ donc $F + k$ est une primitive de f. Et si F et G sont deux primitives de f, on a $(G - F)' = f - f = 0$, donc $G - F$ est constante (la démonstration rigoureuse de ce point attendra le chapitre sur la dérivation et le théorème des accroissements finis). □

Proposition 2. Soit f continue sur I et $a \in I$, alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f sur I. Il s'agit de l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration. L'unicité est évidente : si deux primitives de f s'annulent en a, puisqu'elles diffèrent d'une constante, cette constante et nécessairement nulle. La preuve rigoureuse de la première partie de l'énoncé nécessite d'une part une définition claire de l'intégrale, et d'autre part des techniques d'analyse un peu poussées, nous l'admettrons pour l'instant (ce théorème est connu sous le nom de théorème fondamental de l'analyse). □

Corollaire 1. Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

Remarque 1. Elle en admet même une infinité, qui diffèrent toutes d'une constante, mais toutes les primitives ne peuvent pas nécessairement se mettre sous la forme précédente puisqu'elles ne s'annulent pas nécessairement sur I.

Définition 2. Pour une fonction F continue sur un segment $[a, b]$, on note $[F(x)]_a^b$ l'**accroissement** de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire le réel $F(b) - F(a)$.

On utilisera également la notation d'intégrale sans borne inférieure pour désigner l'ensemble des primitives d'une fonction donnée (sur un intervalle précisé par le contexte, par défaut l'intervalle de définition de la fonction à intégrer). Par exemple, on pourra noter $\displaystyle\int^x \cos(t)\ dt = \sin(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple : La détermination de primitives sera bien sûr la technique privilégiée pour le calcul explicite d'intégrales. Par exemple, $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$.

Exemple : Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 2te^{t^2}\ dt = [e^{t^2}]_0^1 = e - 1$.

Pour conclure ce paragraphe, un petit tableau des primitives et formules utiles à connaître. Rien de nouveau bien entendu, puisque ce tableau est simplement obtenu en « retournant » celui des dérivées classiques. D'autres primitives peuvent être considérées comme classiques, comme par exemple celle

de la tangente qui s'obtient simplement en écrivant $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et en repérant une dérivée de ln, mais elles sont volontairement omises car on les retrouvera (et on détaillera donc le calcul) systématiquement dans les exercices. Dans la dernière colonne du tableau, f (ou g) désigne une fonction continue quelconque, et F (ou G) une de ses primitives.

Proposition 3. Primitives usuelles :

Fonction	*Primitive*	*Fonction*	*Primitive*	*Fonction*	*Primitive*
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	kf	kF
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$f+g$	$F+G$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$u'f(u)$	$F(u)$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$f'f$	$\dfrac{f^2}{2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$			$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$			$f'e^f$	e^f

Exercice : Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\ dt$
2. $I_2(x) = \displaystyle\int^{x} \sin(t)\cos^2(t)\ dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{t^2-2t-1}\ dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\ dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+x^2}\ dx$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{1+x^2}\ dx$

Solutions :

1. Ici, le plus simple est de transformer un peu le contenu de l'intégrale en utilisant une formule de duplication : $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, donc $\cos^2(t) = \dfrac{\cos(2t)+1}{2}$. On peut donc écrire $I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t) + 1\ dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.
2. Ici, par contre, pas besoin de faire quoi que ce soit, on doit reconnaire une dérivée de composée (à un facteur près), en l'occurrence celle de $\cos^3(x)$. On calcule donc directement $I_2(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
3. Le numérateur de la fraction étant quasiment la dérivée du dénominateur, on intègre directement, en faisant toutefois très attention au fait que ce dénominateur est négatif entre 0 et 1 : $I_3 = \left[\dfrac{1}{2}\ln(2t+1-t^2)\right]_0^{1} = \dfrac{\ln(2)}{2}$.

4. Un très grand classique à connaitre absolument : on écrit la tangente sous la forme $\frac{\sin}{\cos}$ et on y voit (au signe près) une forme $\frac{u'}{u}$. On en déduit immédiatement que $I_4 = [-\ln(|\cos(t)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.
5. On ne doit même pas réfléchir ici : $I_5 = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
6. Attention, rien à voir avec la précédente, même si ici aussi on est capables de trouver une primitive directe : $I_6 = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$.

1.2 Intégration par parties

Théorème 1. Intégration par parties.
Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$$

.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de dérivation d'un produit : uv est une primitive de $u'v + uv'$, donc $[uv]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\ dt$, et la formule en découle immédiatement. □

Remarque 2. Cette formule peut paraitre peu intéressante dans la mesure où on se contente de remplacer une intégrale de produit par une autre intégrale de produit, mais elle est en fait extrêmement importante en pratique. Elle sera très souvent utilisée dans le cas d'un calcul d'intégrale de produit peu évident, que l'on souhaite transformer un produit plus simple. Il faut bien comprendre que lors d'une intégration par parties (qu'on abrégera systématiquement en IPP), l'une des deux fonctions du produit est dérivée et l'autre intégrée. On essaiera donc de prendre pour u des fonctions qui se simplifient en dérivant (par exemple $u(t) = t$, ou $u(t) = \ln(t)$), et pour v' des fonctions qui ne se compliquent pas trop quand on intègre (par exemple $v'(t) = e^t$).

Exemple 1 : On souhaite calculer $I = \int_0^1 xe^x\ dx$. Comme on ne connait pas de primitive évidente de la fonction à intégrer, on va procéder à une IPP en posant bien sûr $u(x) = x$, ce qui implique $u'(x) = 1$, et $v'(x) = e^x$, qu'on peut intégrer en $v(x) = e^x$. Les deux fonction étant très clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration, on peut donc écrire $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$.

Exemple 2 : Calcul de $I = \int_1^e x^3\ln^2(x)\ dx$. On va effectuer une première IPP en posant bien sûr $u(x) = \ln^2(x)$, donc $u'(x) = 2\frac{\ln(x)}{x}$, et $v'(x) = x^3$ qu'on va intégrer en $v(x) = \frac{x^4}{4}$ pour obtenir $I = \left[\frac{x^4\ln^2(x)}{4}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{2}\ln(x)\ dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\int_1^e x^3\ln(x)\ dx$. Il ne reste qu'à effectuer une deuxième IPP pour se débarasser définitivement du logarithme : on pose $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et à

nouveau $v'(x) = x^3$, donc $v(x) = \dfrac{x^4}{4}$. On trouve cette fois $I = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^4\ln(x)}{4}\right]_1^e + \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_1^e x^3\ dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{e^4}{8} + \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_1^e = \dfrac{e^4}{8} + \dfrac{e^4}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{5e^4-1}{32}$.

Exemple 3 : On peut aussi calculer des primitives en effectuant des IPP sur des intégrales sans borne inférieure. Dans ce cas, le « crochet » dans la formule sera simplement remplacé par la fonction $u(x)v(x)$, qu'on n'a pas besoin d'évaluer en une valeur précise puisqu'il n'y a pas de bornes fixes. Calculons par exemple celles de la fonction ln sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On calcule donc $\displaystyle\int^x \ln(t)\ dt$ par IPP en posant $u(t) = \ln(t)$, ce qui donne $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, et $v'(t) = 1$ (astuce classique pour « forcer » une IPP quand il n'y a pas naturellement de produit sous l'intégrale), qu'on peut intégrer en $v(t) = t$. On trouve alors $\displaystyle\int^x \ln(t)\ dt = x\ln(x) - \int^x t \times \frac{1}{t}\ dt = x\ln(x) - \int^x 1\ dt = x\ln(x) - x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

1.3 Changement de variable.

Théorème 2. Changement de variable.
Soit f une fonction continue sur le segment $[\varphi(a), \varphi(b)]$, où φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ vers $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$.

Démonstration. C'est cette fois-ci une conséquence directe de la formule de dérivation d'une composée : $\varphi' \times f \circ \varphi$ a pour primitive $F \circ \varphi$ (où F est une primitive quelconque de f), donc $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = [F \circ \varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$. □

Remarque 3. En pratique on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle (soyons honnêtes, elle ne sert même essentiellement à rien). Si on dispose d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable allégée, on « pose » $t = \varphi(x)$ (ou dans l'autre sens $x = \varphi^{-1}(t)$), et on effectue alors les trois modifications suivantes dans notre intégrale :

- on remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
- on remplace dans l'intégrale l'expression $f(x)$ par une expression ne faisant intervenir que la variable t.
- on modifie le dx en $\varphi'(t)dt$ (on écrira simplement $dx = \varphi'(t)dt$ même si c'est un abus de notation).

Ces modifications reviennent bien à appliquer la formule donnée dans le théorème.

Exemple : On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x}\ dx$. Ayant par malheur oublié comment intégrer correctement une fonction puissance, on décide de faire le changement de variable $t = \sqrt{x}$, soit $x = t^2$. On modifie donc les éléments suivants :

- la fonction à intégrer $x\sqrt{x}$ devient $t^2 \times t = t^3$.
- les bornes deviennent 0 et $\sqrt{2}$.

- l'élément différentiel est modifié en $dx = 2t\ dt$.

Autrement dit, $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} t^3 \times 2t\ dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2t^4\ dt = \left[\frac{2}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{5} \times (\sqrt{2})^5 = \frac{8\sqrt{2}}{5}$. Bien sûr le calcul direct donne le même résultat : $I = \displaystyle\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{5}$.

Exemple 2 : Un calcul extrêmement classique faisant intervenir un changement de variable est celui de $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$. On pose $x = \sin(t)$ (ce qui n'a rien de franchement évident si on n'a pas l'habitude de ce type de calcul), ou si vous préférez $t = \arcsin(x)$. On remplace alors les bornes par $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$. La fonction à intégrer devient $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ (car $\cos(t) \geqslant 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$), et l'élément différentiel vérifie $dx = \cos(t)\ dt$. On obtient alors $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt$. On peut maintenant utiliser la formule de duplication $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour écrire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. Rien de surprenant dans ce résultat puisqu'on vient tout bêtement de calculer l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

Remarque 4. Il est tout à fait possible d'utiliser un changement de variable pour calculer une primitive sous forme d'intégrale sans borne inférieure, il faut simplement bien penser dans ce cas à revenir à la variable initiale en fin de calcul.

Remarque 5. C'est à l'aide de la formule de changement de variable qu'on peut prouver de façon rigoureuse les deux résultats classiques suivants, qui sont géométriquement évidents :

- si f est une fonction impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$.
- si f est une fonction paire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$.

1.4 Fractions rationnelles

Définition 3. Une **fraction rationnelle** est un quotient de polynômes.

Théorème 3. Principe de la décomposition en éléments simples.
Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur est à racines simples, alors on peut décomposer F sous la forme $F(x) = P_1(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{x-\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{b_j x + c_j}{Q_j(x)}$, où :

- a_i, b_j et c_j représentent des constantes réelles.
- les nombres α_i sont les racines réelles du polynôme Q.
- les autres dénominateurs $Q_j(x)$ représentent les facteurs de degré 2 à discriminant négatif de ce même polynôme Q.
- P_1 est le polynôme quotient de la division euclidienne de P par Q (ce terme n'apparait donc que si P est de degré supérieur ou égal à Q).

Remarque 6. Ce théorème est le même que celui vu dans le chapitre précédent pour les télescopages de sommes, au tout petit détail près qu'on n'a pas supposé le degré du numérateur strictement

inférieur à celui du dénominateur, d'où l'ajout du terme obtenu par division euclidienne des deux polynômes (qui serait nul avec l'hypothèse précédente).

En pratique, si on a à calculer une intégrale (ou une primitive) d'une fraction rationnelle, on procédera toujours de la façon suivante :

- factorisation du dénominateur Q, qu'il faut absolument décomposer sous forme de produit de termes de degré 1 ou de degré 2 à discriminant négatif (comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur que nous consacrerons aux polynômes, c'est toujours théoriquement possible, sous la seule hypothèse de l'absence de racines multiples).
- après avoir invoqué le théorème de décomposition en éléments simples, détermination des constantes apparaisant au numérateur des différents éléments simples. Nous donnons dans les exemples qui suivent des techniques de calcul rapide de ces constantes dans les cas simples. Dans tous les cas, simples ou non, le nombre total de constantes à déterminer est égal au degré du polynôme Q.
- calcul explicite de l'intégrale. Les éléments simples à dénominateur du premier degré s'intègrent directement à l'aide de ln, ceux à dénominateur du second degré nécessitent en général de combiner un ln avec une arctan, nous allons détailler les techniques correspondantes dans les exemples qui suivent.

Exemple 1 : On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2}$.

- On commence donc par factoriser le dénominateur, qui a ici pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et pour racines $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Autrement dit, $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$.
- Le théorème de décomposition en éléments simples permet alors d'affirmer que $\dfrac{x+3}{x^2-x-2} = \dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-2}$. Pour déterminer les constantes, on peut utiliser les astuces de calcul suivantes : on multiplie l'égalité par $x-2$ pour obtenir $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{a(x-2)}{x+1}+b$, puis on pose $x=2$, ce qui donne $b = \dfrac{5}{3}$. De même, en multipliant par $x+1$ puis en posant $x=-1$, on trouve $a = -\dfrac{2}{3}$.
- Il ne reste plus qu'à calculer $I = \dfrac{5}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{5}{3}[\ln(2-x)]_0^1 - \frac{2}{3}[\ln(x+1)]_0^1 = -\dfrac{5}{3}\ln(2) - \dfrac{2}{3}\ln(2) = -\dfrac{7}{3}\ln(2)$ (il est tout à fait normal d'obtenir ici une valeur négative puisqu'on intègre une fonction qui est toujours négative sur l'intervalle $[0,1]$).

Exemple 2 : On veut calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+2x+3}$.

- Le dénominateur ayant cette fois un discriminant négatif, il n'y a rien à factoriser, et donc pas de décomposition en éléments simples à effectuer. On passe tout de suite à l'étape de calcul de l'intégrale.
- Le premier objectif est de se « débarasser du t » au numérateur en faisant apparaitre un quotient de la forme $\dfrac{f'}{f}$ pour l'intégrer à l'aide d'un ln : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2+2x+3}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\right]_0^1 - J = \dfrac{\ln(6)}{2} - \dfrac{\ln(3)}{2} - J = \dfrac{\ln(2)}{2} - J$, où on a noté $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x^2+2x+3}$, intégrale où nous allons faire apparaitre cette fois une dérivée d'arctangente après avoir effectué une mise sous forme canonique. En effet, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2+2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2}\,dx = \left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. On ne connait évidemment pas

ces valeurs de la fonction arctangente, on se contente donc de conclure que $I = \dfrac{\ln(2)}{2} - \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}) + \sqrt{2}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exemple 3 : Dernier exemple, on veut maintenant calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

- Le dénominateur étant de degré 3, il a forcément une racine réelle qui va permettre de le factoriser. Ici, la racine est évidente, c'est $x = -1$, ce qui permet d'écrire $x^3 + 1 = (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c$. Une petit identification des coefficients donne les conditions $a = 1$, puis $a + b = 0$ donc $b = -1$ et $b + c = 0$ donc $c = 1$ (ce qui est cohérent avec la dernière condition). Le deuxième facteur $x^2 - x + 1$ de notre produit ayant un discriminant négatif, on ne peut pas aller plus loin.
- On va maintenant éffectuer la décomposition en éléments simples sous la forme $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$. En multipliant par $x + 1$ et en évaluant en $x = -1$, on trouve comme d'habitude $a = \dfrac{1}{3}$. Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires qu'on ne peut pas obtenir de la même façon. Une alternative est tout simplement de prendre directement certaines valeurs « simples » de x dans notre égalité. Ici, on peut poser $x = 0$ pour trouver $1 = a + c$, soit $c = 1 - a = \dfrac{2}{3}$. Pour déterminer b, on peut aussi utiliser une astuce surprenant en multipliant tout par x pour obtenir $\dfrac{x}{x^3+1} = \dfrac{ax}{x+1} + \dfrac{bx^2+cx}{x^2-x+1}$, puis on calcule la limite en $+\infty$ des deux membres, ce qui donne $0 = a + b$, soit $b = -a = -\dfrac{1}{3}$. Conclusion : $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$.
- Il est temps de l'intégrale I. Le premier morceau ne pose pas de problème : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{\ln(2)}{3}$. Pour l'autre moitié, on va avoir besoin de combiner un ln et un arctan : $\dfrac{x-2}{x^2-x+1} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2-x+1)]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = 0 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{4}{3}\times\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1}\,dx = -2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$
$= -\sqrt{3}\left(\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$. On peut maintenant conclure le calcul : $I = \dfrac{\ln(2)}{3} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} = \dfrac{\ln(2)}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$. C'est vraiment sublime.

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre.

2.1 Vocabulaire général sur les équations différentielles.

Définition 4. Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y (réelle ou complexe, même si nous traiterons surtout le cas réel dans ce chapitre), et faisant intervenir les dérivées successives y', y'', …, $y^{(n)}$ de la fonction y. L'**ordre** d'une équation différentielle correspond à l'ordre de dérivation maximal de l'inconnue y apparaissant dans l'équation (ainsi, une équation est d'ordre 2 si y'' apparait dans l'équation, mais aucune dérivée d'ordre supérieure à 2). On peut définir énormément de types d'équations différentielles, parmi lesquels nous nous attarderons sur les suivants :

- l'équation est **homogène** (ou plus simplement **sans second membre**) si son second membre (dans lequel on place systématiquement tout ce qui ne dépend pas de y ni de ses dérivées) est nul.
- l'équation est **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ (autrement dit, les seules opérations autorisées sur la fonction y et ses dérivées sont les sommes et les produits pas des fonctions fixes de la variable x).
- une équation linéaire est **normalisée** si de plus $a_n(x) = 1$.
- les **courbes intégrales** d'une équation différentielle sont les courbes représentatives de ses solutions.

Exemples : L'équation $\cos(x)y' + xy^2(x) = 0$ est une équation non linéaire (à cause de l'élévation au carré) homogène du premier ordre.

L'équation $y''(x) - 3\ln(x)y = \mathrm{ch}(x)$ est une équation linéaire normalisée du second ordre.

L'équation $2y''' - 3y' + 5y = \sin(x)$ est une équation linéaire du troisième ordre à coefficients constants (ce qui signifie tout simplement que les coefficients devant les différentes dérivées de y dans le membre de gauche sont tous des constantes).

Remarque 7. Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I (on ne cherchera jamais à effectuer une résolution sur un ensemble qui n'est pas un intervalle) revient bien sûr à chercher toutes les fonctions y vérifiant l'équation sur tout l'intervalle I. Cela suppose nécessairement que la fonction y soit (au moins) n fois dérivable sur l'intervalle I (pour une équation différentielle d'ordre n).

L'inconnue d'une inconnue différentielle est pratiquement toujours notée y, par contre la variable de la fonction y pourra être notée x ou t selon les cas. Les mathématiciens ont même l'affreuse habitude de ne pas toujours indiquer la variable quand ils écrivent leurs équations différentielles. Ainsi, on parlera de résoudre $xy' + 3x^2y^2 = 0$, sans préciser que x représente la variable de la fonction y.

2.2 Résolution de l'équation homogène associée.

Nous nous intéressons dans tout ce paragraphe à une équation linéaire homogène du premier ordre, donc une équation de la forme $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction **continue** sur l'intervalle de résolution I.

Théorème 4. Les solutions de l'équation $y' + a(x)y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{-A(x)}$, où K est une constante réelle et A une primitive (fixée) de a.

Démonstration. Commençons par constater que ces fonctions sont effectivement solutions de l'équation : si $y(x) = Ke^{-A(x)}$, alors $y'(x) = -Ka(x)e^{-A(x)}$, donc $y'(x) + a(x)y(x) = -Ka(x)e^{-A(x)} + Ka(x)e^{A(x)} = 0$. Réciproquement, supposons y solution de l'équation et posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$, où A est une primitive quelconque de a (qui, étant continue, possède nécessairement des primitives), on a alors $z'(x) = y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)) = 0$. La fonction z a une dérivée nulle, elle est donc constante, égale à un certain réel K. On a alors, par définition de z, $y(x) = Ke^{-A(x)}$. □

Remarque 8. On notera en général dans les exercices y_h les solutions de l'équation homogène, mais il ne s'agit pas d'une notation « officielle », il faut donc bien repréciser la notation à chaque fois qu'on l'utilise.

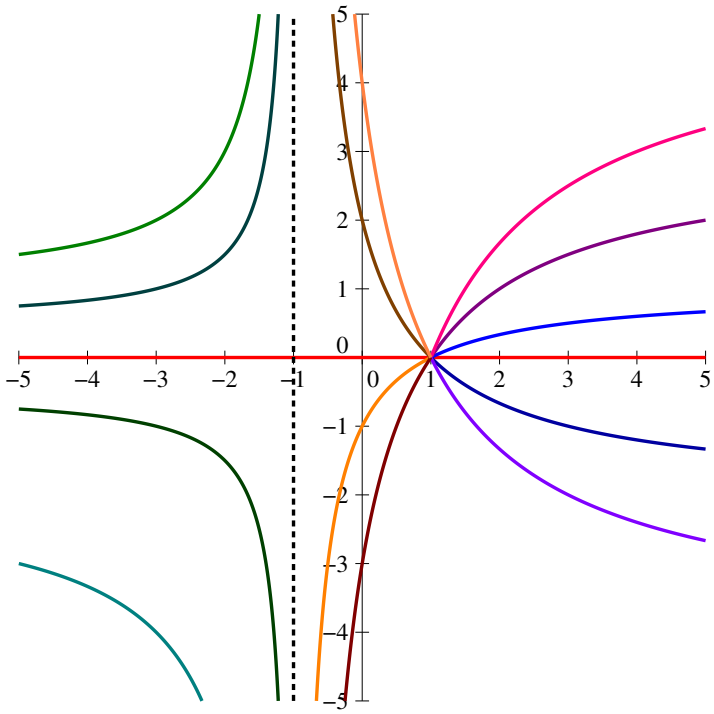
Exemple : Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction $x \mapsto 2x$ étant évidemment continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives, et la

fonction $x \mapsto x^2$ est une de ces primitives. Les solutions de cette équation homogène sont donc toutes les fonctions $x \mapsto Ke^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$ (sur une copie, votre rédaction devrait ressembler assez précisément à ceci).

Exemple : Considérons maintenant l'équation différentielle $(1-x^2)y' + 2y = 0$. On pourrait penser a priori résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais l'application du théorème cité ci-dessus nécessite de mettre d'abord notre équation sous forme normalisée, donc ici de l'écrire sous la forme $y' + \dfrac{2}{1-x^2}y = 0$, ce qui impose de choisir un intervalle de résolution où le dénominateur $1-x^2$ ne s'annule pas, par exemple $I =]1, +\infty[$. Sur cet intervalle, la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{1-x^2}$ est continue donc admet des primitives. En calculer une n'est toutefois pas évident et va ici nécessiter une décomposition en éléments simples (toutes les techniques de calcul de primitive, IPP et changement de variable notamment, peuvent être utilisées lors de cette étape de calcul de la primitive). On écrit donc $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{1-x}$, et on calcule par la méthode de son choix $a = b = 1$ (je ne détaille pas les calculs, ils sont très classiques ici). Autrement dit, $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$ admet par exemple pour primitive la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - \ln(x-1) = \ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$. On en déduit que les solutions de notre équation sur l'intervalle I sont de la forme $y_h : x \mapsto K_1 e^{-\ln(\frac{1+x}{x-1})}$, avec $K_1 \in \mathbb{R}$, soit après simplification $y_h : x \mapsto \dfrac{K_1(x-1)}{1+x}$, avec $K_1 \in \mathbb{R}$.

Remarquons que, si on avait choisi de résoudre l'équation sur l'intervalle $]-\infty, -1[$, on aurait obtenu la même primitive (les signes dans les deux ln seraient opposés à ceux obtenus sur l'intervalle I, mais après regroupement des ln, on peut simplifier pour trouver exactement la même expression), donc on aurait sur cet intervalle des solutions de la forme $y_h : x \mapsto \dfrac{K_2(x-1)}{1+x}$, avec $K_2 \in \mathbb{R}$ (cette nouvelle constante K_2 est par contre complètement indépendante de la constante K_1 obtenue sur l'intervalle I). De même, sur le troisième intervalle $]-1, 1[$, on obtient $y_h : x \mapsto \dfrac{K_3(1-x)}{1+x}$, avec $K_3 \in \mathbb{R}$. Dans la mesure où la constante K_3 peut prendre n'importe quelle valeur réelle, on peut en fait écrire à nouveau la même formule que sur les deux intervalles précédents, quitte à changer simplement le signe de la constante.

On peut maintenant se demander s'il existe des solutions de l'équation initiale valables sur $\mathbb{R}$ tout entier. Les formules obtenues permettent de créer de façon évidente des solutions valables sur $]-1, +\infty[$, qui s'annulent toutes quand $x = 1$ (on prend des valeurs opposées pour les constantes K_1 et K_3 et $f : x \mapsto \dfrac{K(x-1)}{x+1}$ est bien solution sur tout l'intervalle $]-1, +\infty[$). On a beaucoup plus de problèmes avec la valeur interdite $x = -1$, où la seule solution pour créer une fonction continue (n'ayant pas une limite infinie en -1) est d'imposer $K_2 = K_3 = 0$, ce qui à son tour impose $K_1 = 0$ si on veut conserver une fonction dérivable en 1. La seule solution possible sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction identiquement nulle. Nous étudierons de façon un peu plus précise ces histoires de recollements de solutions plus loin dans ce cours. Ci-dessous, des allures de courbes intégrales de l'équation (on a volontairement utilisé des couleurs différentes pour les trois intervalles de résolution) :



2.3 Résolution de l'équation complète.

On s'intéresse maintenant à une équation avec second membre de la forme $y' + a(x)y = b(x)$, où a est toujours une fonction continue sur l'intervalle de résolution I, et b est elle-même une fonction continue et dérivable sur I.

Théorème 5. Les solutions de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sont de la forme $x \mapsto Ke^{-A(x)} + y_p(x)$, où K est une constante réelle, A une primitive fixée de a, et y_p une solution particulière quelconque de l'équation (qui en admet toujours).

Remarque 9. Ce théorème énonce simplement un grand principe à retenir pour la résolution des équations différentielles linéaires : on obtient **toutes** les solutions de l'équation complète en ajoutant à **une** solution particulière de l'équation **toutes** les solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. Soit donc y_p une solution particulière de l'équation et y une solution quelconque. On a $y' + a(x)y = b(x) \Leftrightarrow y' + a(x)y = y_p' + a(x)y_p \Leftrightarrow (y - y_p)' + a(x)(y - y_p) = 0$. La différence des deux fonctions est donc solution de l'équation homogène, ce qui en utilisant les résultats du paragraphe précédent donne la forme demandée. □

Définition 5. Un **problème de Cauchy** associé à une équation différentielle du premier ordre est un système de la forme $\begin{cases} y' + a(x)y &= b(x) \\ y(x_0) &= \alpha \end{cases}$, où x_0 est un réel appartenant à l'intervalle de résolution I de l'équation différentielle, et α une valeur réelle quelconque. Autrement dit, il s'agit de résoudre une équation différentielle avec une condition initiale imposée.

Théorème 6. Un problème de Cauchy du premier ordre admet toujours une solution unique, il s'agit (avec les notations précédentes) de la fonction $x \mapsto \alpha e^{A(x_0)-A(x)} + e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\ dt$.

Démonstration. Cette démonstration fait intervenir une technique classique dans la résolution théorique d'équations différentielles. On cherche une fonction y vérifiant l'équation et telle que $y(x_0) = \alpha$. Posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$. On obtient, très similairement à ce qu'on a fait pour les équations homogènes un peu plus haut, $z'(x) = b(x)e^{A(x)}$. La fonction z est donc la primitive de be^A valant $\alpha e^{A(x_0)}$ en x_0 (cette primitive est unique), c'est-à-dire $z(x) = \alpha e^{A(x_0)} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$. Cela donne bien la formule souhaitée pour y. □

Remarque 10. Cette formule n'est heureusement à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solutions, puisqu'on ne saura de toute façon pas calculer l'intégrale. Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut utiliser le théorème précédent et donc trouver une solution particulière de l'équation. On a un peu l'impression de tourner en rond dans la mesure où est en train de prétendre en gros que, pour trouver les solutions d'une équation, il faut commencer par trouver une solution de cette même équation, mais il existe une technique efficace pour trouver cette fameuse solution particulière, technique que l'on mettra en oeuvre quasiment systématiquement :

Définition 6. Méthode de variation de la constante.

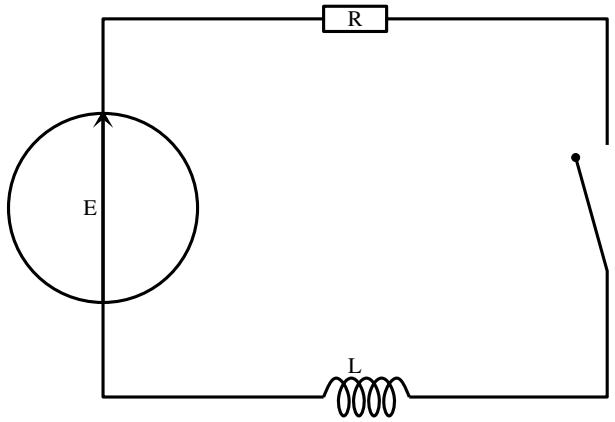
Cette méthode consiste, une fois qu'on a résolu l'équation homogène associée à une équation différentielle linéaire du premier ordre, à chercher une solution particulière y_p de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$ (où, avec les notation habituelles, on a obtenu $y_h(x) = Ke^{-A(x)}$). Autrement dit, on transforme la constante K des solutions de l'équation homogène, ce qui donne à cette méthode son nom de « variation de la constante » qui peut à première vue sembler quelque peu contradictoire.

Remarque 11. Les seuls cas où on n'aura pas recours à cette méthode seront ceux où on arrivera à trouver une solution particulière « évidente » sans aucun calcul, ou avec des calculs plus simples que ceux de la variation de la constante (cf plus bas quelques cas classiques où on peut s'en passer).
Pourquoi la méthode fonctionne-t-elle ? C'est en fait tout bête : on pose donc $y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$, et on dérive cette expression pour remplacer dans notre équation différentielle : $y_p'(x) = K'(x)e^{-A(x)} - a(x)K(x)e^{-A(x)}$. La fonction y_p est solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ si et seulement si $K'(x)e^{-A(x)} = b(x)$ (les termes « en $K(x)$ » se simplifient systématiquement lors de ce calcul ; si ce n'est pas le cas, c'est forcément que vous vous êtes trompés, soit dans le calcul des solutions de l'équation homogène, soit dans votre dérivation de y_p). Autrement dit, on est ramenés à un calcul de primitive, en l'occurrence celui de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ (ce qui correspond à la démonstration théorique de l'existence des solutions à un problème de Cauchy). Et si on ne sait pas calculer cette primitive ? Eh bien, on est coincés.

Exemple 1 : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' + xy = x$ (sur $\mathbb{R}$). L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Ici, pas besoin de variation de la constante pour trouver une solution particulière, il y en a une de triviale : $y_p(x) = 1$ (si on ne s'en rend pas compte, la méthode marchera mais nécessitera un calcul pas si facile pour retrouver cette même solution). Les solutions de l'équation complète sont de la forme $y : x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}} + 1$, avec $K \in \mathbb{R}$.

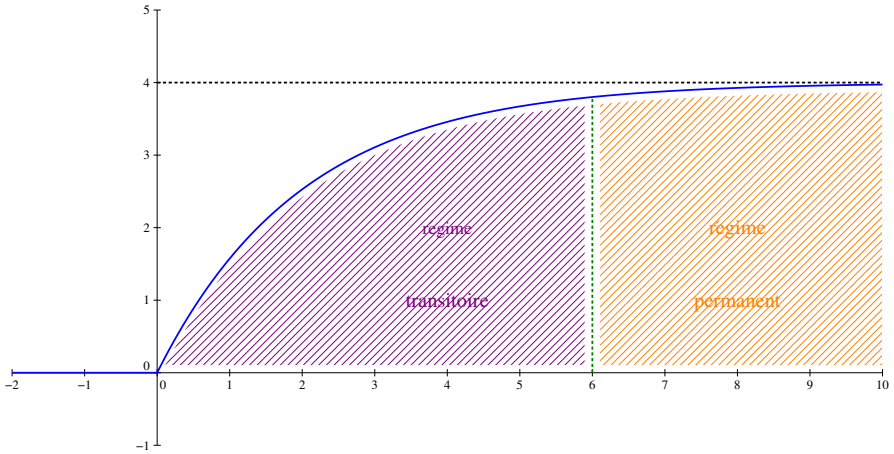
Exemple 2 : On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $xy' + 2y = e^x$. L'intervalle de résolution est justifié par le fait que la normalisation de l'équation la transforme en $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$. L'équation homogène associée est $y' + 2\frac{y}{x} = 0$, dont les solutions sont de la forme $Ke^{-A(x)}$, où A est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ (fonctio qui, étant certainement continue sur $]0, +\infty[$, y admet nécessairement des primitives). Une telle primitive est $x \mapsto 2\ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-2\ln(x)} = \frac{K}{x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
Reste maintenant à trouver une solution particulière, via la méthode de variation de la constante. Posons donc $y_p(x) = \frac{K(x)}{x^2}$, et calculons $y'(x) = \frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3}$. La fonction y_p est solution de l'équation complète si $\frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3} + 2\frac{K(x)}{x^3} = \frac{e^x}{x}$, soit $K'(x) = xe^x$. On calcule une primitive de cette dernière fonction à l'aide d'une IPP : $K(x) = \int^x te^t\, dt$. On pose $u(t) = t$, donc $u'(t) = 1$, et $v'(t) = e^t$, pour lequel on peut choisir $v(t) = e^t$. On a donc $K(x) = xe^x - \int^x e^t\, dt = (x-1)e^x + L$, avec $L \in \mathbb{R}$. En pratique, on peut ne pas s'embêter et poser $L = 0$ (si on garde un L quelconque, on va en fait obtenir **toutes** les solutions de l'équation complète au lieu d'une seule solution particulière), c'est-à-dire choisir $y_p(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ (attention ici à ne pas confondre bêtement $K(x)$ et $y_p(x)$). Toutes les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : x \mapsto \frac{K + (x-1)e^x}{x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Pour les plus curieux, on obtiendrait exactement le même type de formule (avec une constante indépendante) en résolvant sur $]-\infty, 0[$.

Exemple 3 : On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E, une résistance R, une bobine d'inductance L et un interrupteur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert. Comment évolue l'intensité i dans le circuit ?



Comme vous le savez tous, l'intensité dans ce circuit vérifie l'équation différentielle (écrite avec des notations de physicien) $L\frac{di}{dt} + Ri = E$, avec de plus la condition initiale $i(0) = 0$ (puisque l'intensité dans le circuit est forcément nulle quand $t < 0$, et que l'intensité est continue). En notant $\tau = \frac{L}{R}$ (ce qu'on appelle constante de temps du circuit), on obtient (avec une notation plus mathématique, et sous forme normalisée) $i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la

forme $y_h : t \mapsto Ke^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $K \in \mathbb{R}$, et la fonction constante $\dfrac{E}{R}$ est solution particulière évidente de l'équation. Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : t \mapsto \dfrac{E}{R} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$. Comme de plus $i(0) = 0$, on obtient $K = -\dfrac{E}{R}$, soit $i(t) = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ (si $t \geqslant 0$, bien entendu). La courbe ressemble à ceci (on a pris $\dfrac{E}{R} = 4$ et $\tau = 2$) :



La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec une asymptote horizontale de valeur $\dfrac{E}{R}$ en $+\infty$. En physique, on dira plutôt que l'intensité est en régime permanent quand elle s'approche fortement de son asymptote (en pratique, pour un circuit RL, on considère le régime permanent atteint pour $t = 3\tau$, à cet instant, l'intensité vaut environ 95% de sa valeur maximale, tout simplement parce $e^{-3} \simeq 0.05$), et en régime transitoire dans sa période de forte croissance.

Proposition 4. Principe de superposition.
Soit $y' + a(x)y = 0$ une équation différentielle homogène et y_1, y_2 des solutions particulières respectives des équations $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration. C'est un calcul idiot : si $y_1' + a(x)y_1 = b_1(x)$ et $y_2' + a(x)y_2 = b_2(x)$, on a en additionnant $(y_1 + y_2)' + a(x)(y_1 + y_2) = b_1(x) + b_2(x)$. □

Proposition 5. Les trois types de second membre suivants permettent de chercher directement une solution particulière sous une forme spécifique, sans avoir besoin d'utiliser la méthode de variation de la constante :

- l'équation $y' + ay = P(x)$, où a est une constante, et P un polynôme de degré n, admet toujours une solution particulière polynomiale de degré n.
- l'équation $y' + ay = P(x)e^{kx}$, où a et k sont deux constantes (avec bien sûr $k \neq 0$) et P un polynôme de degré n, admet toujours une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme de degré n si $a + k \neq 0$, de degré $n + 1$ sinon.
- l'équation $y' + ay = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, où a et ω sont des constantes, admet toujours une solution particulière de la forme $\gamma\cos(\omega x) + \delta\sin(\omega x)$ (avec $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$).

Exemple 1 : On cherche à résoudre l'équation $y' - y = (2x+1)e^x$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto Ke^x$, avec $K \in \mathbb{R}$. On est ici dans le cas particulier « $a + k = 0$ », il faut donc chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a alors $y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$, donc y_p est solution de l'équation complète si $(2ax + b)e^x = (2x + 1)e^x$. On peut choisir $a = b = 1$ (et par exemple $c = 0$) pour obtenir la solution $y_p : x \mapsto (x^2+x)e^x$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (x^2+x+K)e^x$ (avec $K \in \mathbb{R}$).

Exemple 2 : On cherche à résoudre l'équation $y' + 2y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^{-2x}$ (avec $K \in \mathbb{R}$), et on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. On aura donc $y_p'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$. La fonction y_p est solution de l'équation complète si $(2b + 2a)\cos(2x) + (2b - 2a)\sin(2x) = \cos(2x) + 2\sin(2x)$. Cette relation est vérifiée si $2a + 2b = 1$ et $2a - 2b = 2$, ce qui donne en additionnant $4a = 3$ soit $a = \dfrac{3}{4}$, puis $b = a - 1 = -\dfrac{1}{4}$. Une solution particulière est donc $y_p : x \mapsto \dfrac{3}{4}\cos(x) - \dfrac{1}{4}\sin(x)$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-2x} + \dfrac{3}{4}\cos(x) - \dfrac{1}{4}\sin(x)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3 Équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants.

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre. Simplement, la complexité devenant nettement plus élevée, on se restreindra (en plus de la linéarité) au cas de coefficients constants.

Définition 7. Une **équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants** est une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = f(x)$, où a et b sont deux nombres réels, et f une fonction continue sur l'intervalle de résolution I. On associe comme d'habitude à cette équation l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Un problème de Cauchy pour une équation du deuxième est constitué d'un système du type :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by &= f(x) \\ y(x_0) &= \alpha \\ y'(x_0) &= \beta \end{cases}$$

Définition 8. L'**équation caractéristique** associée à l'équation sans second membre est l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$.

Théorème 7. Solutions complexes de l'équation homogène.

- Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes (réelles ou complexes) r_1 et r_2, les solutions complexes de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
- Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto (A + Bx)e^{r_0 x}$, avec toujours $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

Théorème 8. Solutions réelles de l'équation homogène.

- Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions relles de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Si l'équation caractéristique a une racine double réelle r_0, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto (A+Bx)e^{r_0 x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Enfin, si l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$, les solutions sont de la forme $x \mapsto (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{rx}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 12. Dans tous les cas, les solutions de l'équation homogène s'écrivent comme combinaisons obtenues à partir de deux solutions particulières de cette équation. Nous aurons une interprétation de ce résultat quand nous aurons étudié les espaces vectoriels.

Démonstration. Dans un premier temps, occupons-nous du cas complexe. Commençons par rechercher les solutions de l'équation de la forme $y : x \mapsto e^{rx}$. On a alors $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2 e^{rx}$, donc en factorisant par e^{rx}, y est solution de l'équation si et seulement si $r^2 + ar + b = 0$, donc si r est racine de l'équation caractéristique. On en déduit aisément que, dans le cas des racines distinctes, les fonctions données dans le théorème sont effectivement solutions de l'équation.

Soit donc r_1 une racine de cette équation et y une solution quelconque de notre équation différentielle, on va l'écrire (de façon très analogue au cas du premier ordre) sous la forme $y(x) = z(x)e^{r_1 x}$. On a alors $y'(x) = (z'(x) + r_1 z(x))e^{r_1 x}$ et $y''(x) = (z''(x) + 2r_1 z'(x) + r_1^2 z(x))e^{r_1 x}$. En factorisant une fois de plus par $e^{r_1 x}$, on obtient la condition $z'' + (2r_1 + a)z' + (r_1^2 + ar_1 + b)z = 0$. Le dernier terme du membre de gauche étant nul (puisque par définition r_1 est solution de l'équation caractéristique), la fonction z' est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre $z'' + (2r_1 + a)z' = 0$. Dans le cas où r_1 est racine double de l'équation, on a $r_1 = -\dfrac{1}{2a}$ donc $2r_1 + a = 0$, et z'' est nulle. La fonction z est alors affine, et on retrouve bien des solutions de la forme $y(x) = z(x)e^{r_1 x} = (A + Bx)e^{r_1 x}$. Si r_1 n'est pas racine double, on a par contre $z'(x) = Ke^{-(2r_1+a)x}$, avec $K \in \mathbb{C}$. On peut intégrer cette condition en $z(x) = Ae^{-(2r_1+a)x} + B$ (la constante K s'étant transormée en A après division par $-(2r_1 + a)$), soit $y(x) = z(x)e^{r_1 x} = Ae^{-(r_1+a)x} + Be^{r_1 x}$. Or, la deuxième racine de l'équation caractéristique n'est autre que $-(r_1 + a)$, puisqu'on sait que les deux racines du trinôme ont pour somme $-a$. On retrouve exactement les solutions annoncées.

Passons au cas réel. Les deux premiers cas (racines réelles distinctes ou racine double) sont exactement similaires, nous ne reprendrons pas les calculs. Concentrons-nous sur le cas des deux racines complexes conjuguées. On sait que dans ce cas $y(x) = e^{rx}(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x})$. Examinons les valeurs prises par une telle fonction en $x = 0$ et en $x = \dfrac{\pi}{2\omega}$. Comme $y(0) = A + B$, pour que $y(0)$ soit réel, il faut avoir $\text{Im}\,(A) + \text{Im}\,(B) = 0$. De même, pour que y soit réelle en $\dfrac{2\pi}{\omega}$, il faut que $e^{\frac{2\pi r}{\omega}}(iA - iB)$ soit réel, ce qui se produit si $i(A - B) \in \mathbb{R}$, soit $A - B \in i\mathbb{R}$, ou encore $\text{Re}\,(A) = \text{Re}\,(B)$. Finalement, les deux conditions combinées nous donnent $B = \overline{A}$, donc $y(x) = e^{rx}(Ae^{i\omega x} + \overline{A}e^{-i\omega x}) = 2e^{rx}\text{Re}\,(Ae^{i\omega x}) = 2e^{rx}(\text{Re}\,(A)\cos(\omega x) - \text{Im}\,(A)\sin(\omega x))$, qui est bien de la forme annoncée. □

Proposition 6. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

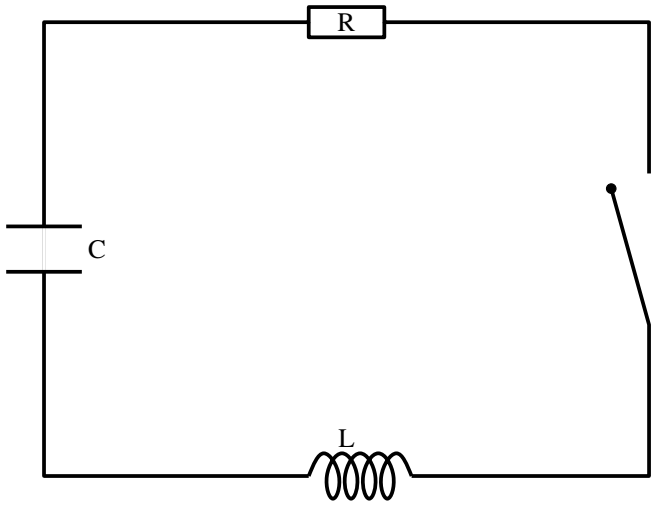
Les solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ (avec toujours $\omega \in \mathbb{R}$ sont de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Cette dernière équation intervient régulièrement en physique (oscillateur harmonique), où on écrit plutôt les solutions sous la forme équivalente $t \mapsto C\cos(\omega t + \varphi)$, avec $C \in \mathbb{R}$ (constante appelée **amplitude** de la solution) et $\varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right[$ (constante appelée **déphasage** de la solution).

Démonstration. C'est une application directe des théorèmes précédents : dans le premier cas, l'équation caractéristique $r^2 - \omega^2 = 0$ a pour solutions $r_1 = \omega$ et $r_2 = -\omega$, dans le deuxième cas l'équation $r^2 + \omega^2 = 0$ a pour solutions $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$. Dans ce deuxième cas, toutes les solutions de l'équation sont périodiques. □

Exemple 1 : Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (on supposera toujours dans les exemples qu'on ne cherche que les solutions réelles de l'équation). Si on ajoute deux conditions initiales supplémentaires, par exemple $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, la solution du problème de Cauchy correspondant devient unique. Ici, on obtient le système $A + B = 1$ et $A + 2B = 0$ (puisque $y'(x) = Ae^x + 2Be^{2x)}$, dont on tire en soustrayant les deux équations $B = -1$ puis $A = 2$. La seule solution de l'équation homogène vérifiant les deux conditions imposées est donc $y : x \mapsto 2e^x - e^{2x}$.

Exemple 2 : De même, les solutions de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $x \mapsto (A + Bx)e^x$ (avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$), et la seule solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

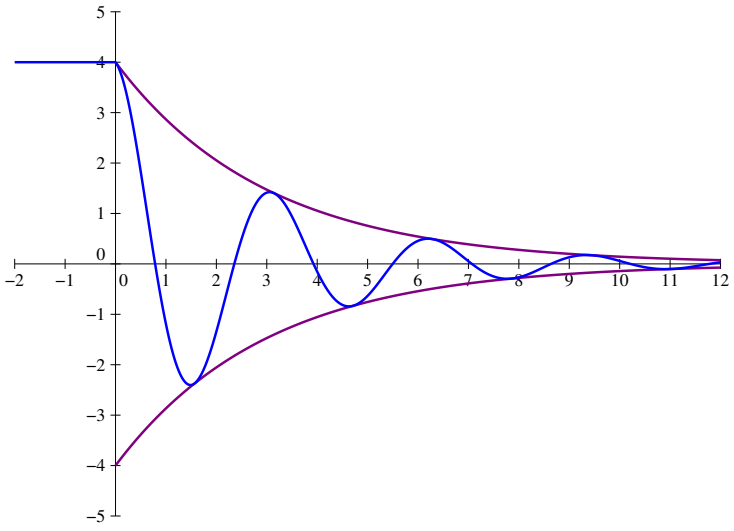
Exemple 3 : Revenons une nouvelle fois à un peu de physique. On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que, comme la dernière fois, on fermera à $t = 0$ pour observer la décharge du condensateur dans le circuit.



On suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de l'interrupteur. On va s'intéresser à l'évolution de cette charge q. Elle est, mathématiquement parlant, une primitive de l'intensité i. Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_C = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur. On a donc dans le circuit (loi des mailles) $L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$, soit en exprimant tout en fonction de la charge q, l'équation $q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$ (on est revenus à la notation mathématique des dérivées, la variable étant bien sûr ici une variable temporelle t).

On note habituellement en physique $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, constante appelée pulsation propre du circuit, et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R}$, qu'on appelle facteur de qualité du circuit. Notre équation différentielle devient alors $q'' + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 q = 0$. On a par ailleurs les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité quand on ferme l'interrupteur). Cette équation est une équation homogène du second ordre à coefficients constants, et son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

Le discriminant est strictement positif quand $Q < \frac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont de la forme $r = \frac{\omega_0}{2Q}(\pm\sqrt{1 - 4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux (puisque la parenthèse est nécessairement négative). La charge est donc une somme de deux fonctions exponentielles décroissantes, on parle alors de régime apériodique, la charge se contentant de décroitre de q_0 vers 0 (de façon à peu près exponentielle). Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante. On parle alors de régime pseudo-périodique : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps. Une allure de la fonction de charge dans ce cas :



Enfin, dans le cas où $Q = \frac{1}{2}$, il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante. On parle de régime critique, la courbe ressemble en fait à celle du régime apériodique.

Théorème 9. Soit $y'' + ay + b = f(x)$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Alors ses solutions sont de la forme $y : x \mapsto y_p(x) + y_h(x)$, où y_p est une solution particulière fixée de l'équation, et y_h parcourt l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. C'est le même principe et la même preuve que pour le premier ordre : si $y''+ay+b = f$, on a $y'' + ay + b = y_p'' + ay_p' + c$, d'où $(y - y_p)'' + a(y - y_p)' + (y - y_p) = 0$, et $y - y_p$ est donc solution de l'équation sans second membre. □

Proposition 7. Un problème de Cauchy associé à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants admet toujours une solution unique.

Démonstration. Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$ et prenons par exemple le cas de deux racines complexes distinctes. Les solutions sont alors de la forme $x \mapsto y_p(x) + Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$. Imposer à une solution les deux conditions $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$ revient donc à demander que A et B soient solutions d'un système du type $\begin{cases} Aa + Bb &= \alpha \\ r_1 Aa + r_2 Bb &= \beta \end{cases}$, où a, b, α et β sont des constantes complexes. Il nous manque quelques connaissances sur les systèmes pour démontrer rigoureusement que celui-ci aura toujours une solution unique, mais c'est bien le cas (pour ceux qui connaissent, il faut vérifier que le déterminant de la matrices des coefficients est non nul). □

Proposition 8. Le principe de superposition reste vrai pour les équations différentielles du deuxième ordre.

Le problème principal reste donc le même que dans le cas des équations du premier ordre : trouver une solution particulière de l'équation. La méthode de la variation de la constante ne s'adaptant pas de façon évidente aux équations du second ordre (il y aurait de toute façon deux constantes à faire varier, vous étudierez cela l'an prochain), nous nous bornerons à décrire quelques cas où on peut trouver directement une solution sous une forme imposée.

Théorème 10. Soit $y'' + ay' + b = P(x)e^{xt}$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, telle que P soit un polynome de degré n. Il existe alors toujours une solution particulière à l'équation de la forme $x \mapsto Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme de degré $n + p$, l'entier p étant la multiplicité de k en tant que racine de l'équation caractéristique associée à notre équation différentielle. Autrement dit :

- si k ne coïncide pas avec une des racines de l'équation caractéristique (cas le plus fréquent), on ne modifie pas le degré du polynôme.
- si k est racine simple de l'équation caractéristique, il faut augmenter d'une unité le degré du polynôme.
- si k est racine double de cette même équation, il faut augmenter de deux unités le degré du polynôme.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$.
Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Pour chercher une solution particulière, nous allons en fait en chercher deux, en utilisant le principe de superposition. Commençons donc par chercher une solution de l'équation $y''-y = x^2+1$ sous la forme $y_{p_1}(x) = ax^2+bx+c$ (on est bien dans le cas du théorème précédent même s'il n'y pas d'exponentielle, il faut simplement considérer ici que la constante k du théorème est égale à 0). On calcule alors très facilement $y''_{p_1}(x) = 2a$, la fonction y_{p_1} est donc solution si $-ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + 1$, ce qui nous donne comme conditions $-a = 1$, donc $a = -1$, puis $b = 0$, et $2a - c = 1$, donc $c = 2a - 1 = -3$. On obtient donc $y_{p_1}(x) = -x^2 - 3$.

Cherchons maintenant une solution particulière à l'équation $y''-y = e^x$ sous la forme $y_{p_2}(x) = (\alpha x+\beta)e^x$ (puisque 1 est racine de l'équation caractéristique, on doit « augmenter le degré du polynôme », donc ici multiplier l'exponentielle par un polynôme de degré 1). On calcule $y'_{p_2}(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$, puis $y''_{p_2}(x) = (\alpha + 2\alpha + \beta)e^x$, donc y_{p_2} est solution de l'équation (en factorisant tout par e^x) si $\alpha x + 2\alpha + \beta - (\alpha x + \beta) = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{2}$. On peut prendre n'importe quelle valeur pour β (ce sera en fait tout le temps le cas quand on a augmenté initialement le degré du polynôme, on peut ne pas mettre de coefficient dans le polynôme recherché), choisissons par exemple $y_{p_2}(x) = \dfrac{1}{2}xe^x$.

Une solution particulière de l'équation complète est donc $y_p : x \mapsto -x^2 - 3 - \dfrac{xe^x}{2}$, et toutes les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto -x^2 - 3 + \left(A - \dfrac{x}{2}\right)e^x + Be^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 13. On peut trouver de même des solutions particulières dans le cas où un cos ou un sin apparait dans le second membre de l'équation, en utilisant des exponentielles complexes.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + r + 1$, donc les racines sont $r_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $x \mapsto \left(A\cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation générale, commençons par remarquer que $y'' + y' + y = \text{Re}\,(e^{(1+i)x})$. Cherchons alors plutôt une solution particulière (complexe) de l'équation $y'' + y'+y = e^{(1+i)x}$ (la partie réelle d'un nombre complexe dépendant linéairement de ce nombre, il suffira alors de prendre la partie réelle de la solution complexe trouvée pour avoir une solution particulière de notre équation réelle). On la cherche sous la forme $y_C : t \mapsto ae^{(1+i)x}$, où a est bien entendu une constante complexe. On calcule donc $y'_p(x) = a(1+i)e^{(1+i)x}$, et $y''_p(x) = (a(1+i)^2)e^{(1+i)x} = 2iae^{(1+i)x}$ (les exponentielles complexes se dérivent exactement comme les exponentielles réelles). En factorisant tout par $e^{(1+i)x}$, on voit que y_C est solution si $a(2 + 3i) = 1$, soit $a = \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{13}$. On en déduit $y_C(x) = \dfrac{2-3i}{13}e^{(1+i)x}$ puis, en prenant sa partie réelle de cette fonction, on obtient une solution de notre équation initiale : $y_p : x \mapsto \dfrac{2\cos(x) + 3\sin(x)}{13}e^x$ (attention à calculer correctement la partie réelle du produit de deux nombres complexes).

Conclusion : les solutions de l'équation initiale sont les fonctions de la forme
$y : x \mapsto \left(\dfrac{2\cos(x) + 3\sin(x)}{13}\right)e^x + \left(A\cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4 Compléments.

4.1 Un problème détaillé de recollement.

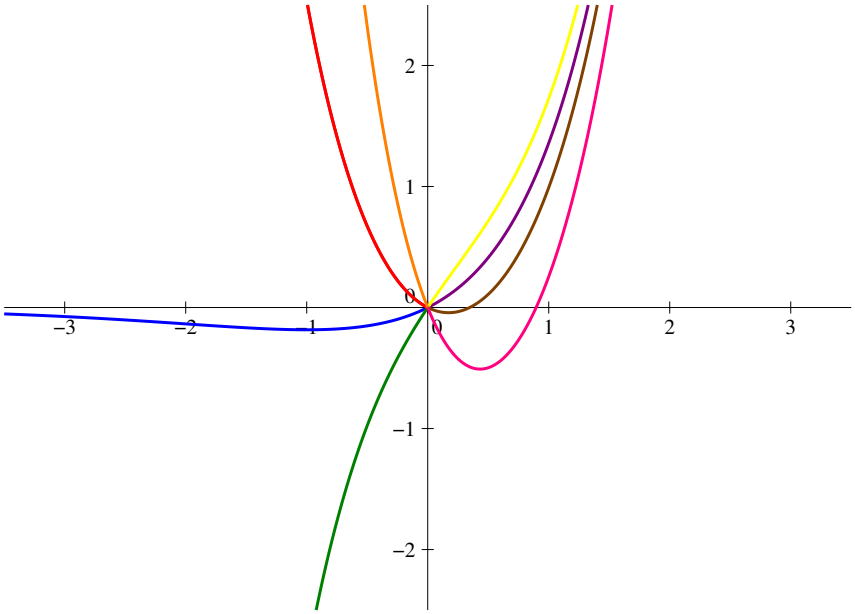
On s'intéresse à l'équation différentielle $xy' + (x-1)y = x^2e^x$. La normalisation de l'équation impose de la résoudre séparément sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Commençons par exemple par la résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'équation homogène associée est $y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = 0$. La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ étant bien sûr continue sur l'intervalle de résolution, elle y admet des primitives, dont la fonction $x \mapsto x - \ln(x)$ fait partie. Les solutions de notre équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{-x+\ln(x)} = Kxe^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation complète à l'aide de la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p(x) = xK(x)e^{-x}$, et on dérive : $y_p'(x) = K(x)e^{-x} + xK'(x)e^{-x} - xK(x)e^{-x}$. En reportant dans l'équation initiale, y_p est solution si $xK(x)e^{-x} + x^2K'(x)e^{-x} - x^2K(x)e^{-x} + (x-1)xK(x)e^{-x} = x^2e^{-x}$, soit $x^2K'(x)e^{-x} = x^2e^{-x}$. On en déduit la condition $K'(x) = e^{2x}$, qui est vérifiée par la fonction $K(x) = \frac{e^{2x}}{2}$. Une solution particulière est donc donnée par la formule $y_p(x) = \frac{xe^x}{2}$, et les solutions de l'équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sont toutes les fonctions de la forme $y(x) = \frac{xe^x}{2} + Kxe^{-x}$.

On peut passer au deuxième intervalle de résolution, où il n'y a en fait presque rien à changer : un signe $-$ à rajouter dans le ln pour les solutions de l'équation homogène, mais qui sera « mangé » par la constante de la formule. La solution particulière obtenue ci-dessus reste valable telle quelle (le calcul est identique), et les solutions sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sont donc de la forme $y(x) = \frac{xe^x}{2} + Lxe^{-x}$, avec $L \in \mathbb{R}$.

Pour pouvoir recoller en 0 des solutions définies sur chacun des deux intervalles, il faut vérifier les deux conditions suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y(x)$ (pour pouvoir prolonger nos deux morceaux en une fonction continue sur $\mathbb{R}$). Ici, cette condition est toujours vérifiées (quelles que soient les valeurs de K et de L), puisque les deux limites sont manifestement toujours nulles.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} y'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y'(x)$ (pour assurer que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0, condition indispensable pour qu'elle puisse être solution de l'équation à cet endroit-là). On calcule donc $y'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{xe^x}{2} + Ke^{-x} - Kxe^{-x}$ (formule valable sur $]0, +\infty[$), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} y'(x) = \frac{1}{2} + K$. Le calcul est identique de l'autre côté : $\lim\limits_{x\to 0^-} y'(x) = \frac{1}{2} + L$. Pour obtenir une fonction dérivable, on doit donc imposer la condition $K = L$, ce qui signifie que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{xe^x}{2} + Kxe^{-x}$ (fonctions dont on pouvait dire depuis un certain temps qu'elles allaient être solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Une allure des courbes intégrales, avec des couleurs différentes pour les courbes obtenues sur les deux intervalles ($K = 0$ en bleu, $L = 0$ en violet, $K = 1$ en vert, $L = 1$ en jaune, $K = -1$ en rouge, $L = -1$ en marron, $K = -3$ en orange, et $L = -3$ en rose) :



4.2 Équations fonctionnelles.

On peut résoudre certaines équations fonctionnelles (équations ayant comme inconnue une fonction, mais ne faisant pas intervenir les dérivées de cette fonction), en les ramenant à une équation différentielle via une dérivation de l'équation. Il est assez fréquent dans ce genre de problèmes que l'équation fonctionnelle fasse intervenir deux variables x et y, et qu'on ne dérive que par rapport à une seule des deux variables. On considèrera alors l'autre variable comme constante au cours du calcul (ce qu'on appelle techniquement une dérivation partielle d'une fonction de deux variables, nous en reparlerons en fin d'année quand nous aborderons les fonctions à deux variables).

Considérons par exemple le problème suivant : on cherche toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

On peut commencer par obtenir des informations très localisées sur la fonction f en imposant des valeurs aux deux variables x et y. Par exemple, en posant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = (f(0))^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, on a même (en remplaçant x par 0 dans l'équation) $f(y) = 0$ pour tout réel y, donc f est dans ce cas la fonction nulle.

Pour obtenir des informations plus générales, dérivons l'équation par rapport à x puis fixons $x = 0$, ce qui donne $f'(x+y) = f'(x)f(y)$, puis $f'(y) = f'(0)f(y)$. En notant $k = f'(0)$, f est donc solution du problème de Cauchy associé à l'équation différente $y' = ky$, avec $y(0) = 1$. Ce problème admet pour unique solution $y : x \mapsto e^{kx}$ (la constante K de résolution de l'équation différentielle vaut 1 à cause de la condition $y(0) = 1$).

Il ne reste plus qu'à vérifier que les fonctions obtenues sont bien solutions du problème initial, ce qui est le cas (la vérification est indispensable car on a procédé par implications et pas par équivalences). Vous aurez bien sûr tous remarqué le magnifique raisonnement par analyse et synthèse que nous avons effectué (c'est assez systématique pour ce genre de problème).

4.3 Méthode d'Euler pour la résolution approchée d'équations différentielles.

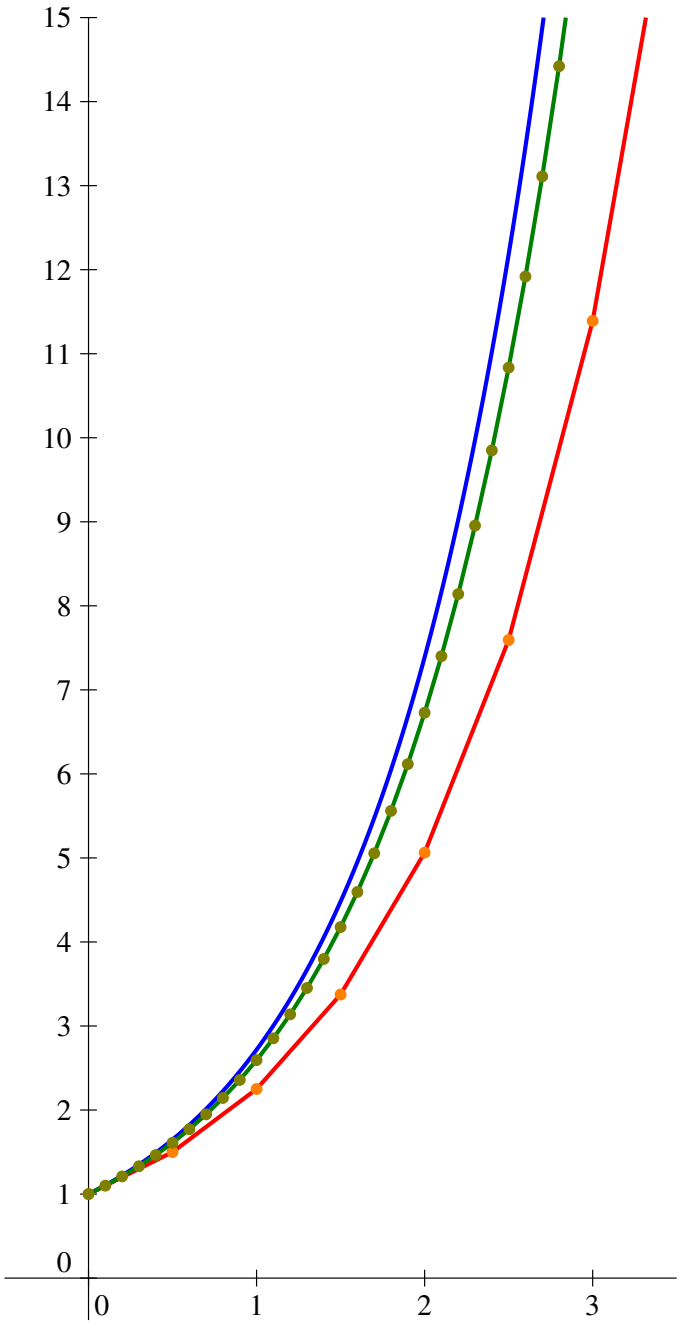
La méthode d'Euler est une méthode de résolution approchée des équations différentielles linéaires qui fonctionne sur le principe suivant : on part d'une condition initiale (on résout donc techniquement un problème de Cauchy et pas une équation complète), et la donnée de la valeur initiale $y(0)$ (en

supposant que la condition initiale est en 0), combinée avec l'équation différentielle elle-même, permet de déduire la valeur de $y'(0)$ et donc de pouvoir tracer la tangente à la courbe de notre solution en son point d'abscisse 0. Cette tangente va être considérée comme une bonne approximation de la courbe elle-même sur un petit intervalle de la forme $[0, h]$, ce qui fournira une valeur approchée de $y(h)$. On recommence ensuite sur le même principe : la valeur approchée de $y(h)$ et l'équation différentielle permettent d'obtenir une valeur approchée de $y'(h)$ et donc de tracer une tangente approchée à cet endroit, qui va servir d'approximation à la courbe sur l'intervalle $[h, 2h]$. On obtient ensuite une valeur approchée de $y(2h)$, puis de $y(3h)$ et ainsi de suite. Bien entendu, les approximations successives qui sont effectuées sont de moins en moins précises au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la condition initiale, et il faut en pratique prendre des valeurs de h très petites pour obtenir de bonnes approximations « à long terme ».

Prenons un exemple ultra classique, celui de l'équation $y' = y$, avec pour condition initiale $y(0) = 1$. On sait bien entendu que la solution de ce problème de Cauchy est la fonction exponentielle, mais voyons ce que donne la méthode numérique d'Euler avec un pas de resolution de la forme $h = \dfrac{1}{n}$, où n est un entier naturel (plus n sera grand, meilleure sera l'approximation) :

- puisque $y(0) = 1$, on a aussi $y'(0) = 1$, et on approche donc la courbe sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ par la droite d'équation $y = x + 1$, ce qui nous donne comme première valeur approchée $y\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{n}$.
- on repart ensuite de $y'\left(\dfrac{1}{n}\right) \simeq 1 + \dfrac{1}{n}$, et on calcule l'équation de la tangente (approchée) correspondante : $y = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(x - \dfrac{1}{n}\right) + 1 + \dfrac{1}{n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(x + 1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Pour $x = \dfrac{2}{n}$, on trouve alors $y\left(\dfrac{2}{n}\right) \simeq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$.
- une récurrence facile permet en fait de prouver qu'on obtiendra de façon générale $y\left(\dfrac{k}{n}\right) \simeq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k$. De façon très intéressante, on peut prouver (c'est même tout à fait à votre portée) que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ pour tout réel x, ce qui prouve que, si on fait tendre n vers $+\infty$ (et donc le pas de résolution vers 0), les courbes approchées obtenues vont en fait se rapprocher de la vraie courbe de la fonction exponentielle.

Pour illustrer ce phénomène, voici les courbes approchées obtenues pour $n = 2$ et $n = 10$ (en bleu, l'exponentielle, en vert la courbe obtenue avec $n = 2$ et en rouge celle obtenue avec $n = 10$) sur l'intervalle $[0, 5]$ (ensuite les courbes s'éloignent de plus en plus de la vraie solution).


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3