

Interrogation Écrite n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

24 septembre 2026

Énoncé :

1. Cette interrogation contient une question sur les contraposées, donc elle ne porte pas sur les équations.
2. On effectue le changement de variable $X = x^2$ pour se ramener à l'inéquation $X^2 - 2X - 8 < 0$, dont le discriminant est $\Delta = 4 + 32 = 36$, et qui admet donc pour racines $X_1 = \frac{2-6}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{2+6}{2} = 4$. L'expression du second degré est strictement négative entre ses racines donc lorsque $-2 < 0 < 4$. Or, X est toujours positif par définition, donc la seule condition à vérifier est en fait $x^2 < 4$, ce qui donne donc $\mathcal{S} =]-2, 2[$.
3. On met tout au même dénominateur pour obtenir $\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{x^2 - 1} = \frac{5}{2}$, soit $\frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{5}{2}$. Autrement dit, après un petit produit en croix, $4x^2 + 4 = 5x^2 - 5$, donc $x^2 = 9$ puis $x = \pm 3$. On ne s'est pas vraiment préoccupé du domaine de résolution de l'équation ici, mais les valeurs interdites 1 et -1 ne posent aucun problème, donc $\mathcal{S} = \{-3, 3\}$.
4. Commençons par constater que le membre de droite de notre équation a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et admet pour racines $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Sur l'intervalle $]1, 2[$, l'équation ne peut donc pas avoir de solution puisque son membre de droite est strictement négatif, alors que celui de gauche est positif en tant que valeur absolue. Plaçons-nous maintenant dans le cas où $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$, notre équation est alors vérifiée dans un des deux cas suivants : $x^2 - x - 6 = x^2 - 3x + 2$ ou $x^2 - x - 6 = -x^2 + 3x - 2$. La première équation donne $2x = 8$, soit $x = 4$, et la deuxième donne $2x^2 - 4x - 4 = 0$, ou encore $x^2 - 2x - 2 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 4 + 8 = 12$, et admettant pour racines $x_3 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$, et $x_4 = 1 + \sqrt{3}$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 4\}$.
5. On constate que -1 est racine évidente de cette équation : $(-1)^3 - 5 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 9 = -1 - 5 - 3 + 9 = 0$. On peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a = 1$, puis $b + a = -5$ donc $b = -6$, et $c + b = 3$ donc $c = 9$ (ce qui est cohérent avec le coefficient constant). Il nous reste à résoudre l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$ qui a pour solution double $x_0 = 3$ puisqu'on reconnaît une identité remarquable : $(x-3)^2 = 0$. Conclusion : $\mathcal{S} = \{-1, 3\}$.
6. C'est typiquement le genre d'inéquation pour laquelle un tableau est indispensable. Les trois valeurs absolues s'annulent respectivement en 2, en -2 et en 1 :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$ 4 - 2x $	$4 - 2x$	$4 - 2x$	$4 - 2x$	$2x - 4$	$2x - 4$
$ x + 2 $	$-2 - x$	$x + 2$	$x + 2$	$x + 2$	$x + 2$
$ x - 1 $	$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$	$x - 1$	$x - 1$

Il est temps de résoudre sur chacun de nos quatre intervalles :

- sur $] -\infty, -2]$, on obtient l'inéquation $4 - 2x + 2 + x \leq 2 - 1 + x$, soit $-2x \leq -5$, donc $x \geq \frac{5}{2}$. Aucune des valeurs solutions n'appartient à l'intervalle, $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
- sur $[-2, 1]$, on obtient $4 - 2x - x - 2 \leq 2 - 1 + x$, soit $-4x \leq -1$, donc $x \geq \frac{1}{4}$. Cette fois-ci, on conserve l'intervalle $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.
- sur $[1, 2]$, on résout $4 - 2x - x - 2 \leq 2 - x + 1$, soit $-2x \leq 1$, donc $x \geq -\frac{1}{2}$. Toutes les valeurs de l'intervalle vérifient cette inégalité, on conserve donc $\mathcal{S}_3 = [1, 2]$.
- enfin, sur $[2, +\infty[$, on résout $2x - 4 - x - 2 \leq 2 - x + 1$, soit $2x \leq 9$, donc $x \leq \frac{9}{2}$. On conserve donc $\mathcal{S}_4 = \left[2, \frac{9}{2}\right]$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\right]$.